第 13 卷 第10期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 10
1989 年 10 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Oct., 1989

快报

Massive 格点 Schwinger 模型的准确基态和弦张力

郑　波
(中山大学物理系,广州)

摘　要

本文提出 Massive 格点 Schwinger 模型的一种新的 Hamiltonian, 找到其准确基态. 对 Naive 和 Susskind 两种费米子方案,准确计算了无穷长弦弦张力,结果均为 $\frac{1}{2}e^2$, 与 Massless 格点 Schwinger 模型的结果相同. 这表明 Massive 和 Massless 格点 Schwinger 模型同样地给出线性禁闭势,并且当 $a\to 0$ 时没有解除禁闭的相变发生,与连续理论现有的结果一致.

一、引　言

众所周知, Massless Schwinger 模型可以准确求解,它的夸克禁闭,能谱等同于质量为 $e/\sqrt{\pi}$ 的自由玻色场[1]. 但是,对 Massive Schwinger 模型,尽管人们作了种种努力,仍无法找到准确解[2].

格点规范理论是有希望的低能理论. 通过求解 Massive 格点 Schwinger 模型,我们可以得到 Massive Schwinger 模型的相关信息. 近年来,人们用 Monte Carlo 模拟的方法,对 Massive 格点 Schwinger 进行了广泛的研究,取得一些有意义的进展[3]. 但是, Monte Carlo 模拟总有它的局限性,我们必须发展解析计算方法.

对纯规范场理论,利用格点规范理论 Hamiltonian 的不唯一性,郭硕鸿等提出了一个具有可解准确基态的 Hamiltonian, 并用变分法计算了 2+1 维胶球质量及弦张力,得到很好的 Scaling 行为和普适性证据[4]. 在参考文献[5]中,作者找到 Massless 格点 Schwinger 模型的一种具有可解准确基态的 Hamiltonian, 准确计算了无穷长弦弦张力,结果为 $\frac{1}{2}e^2$. 这一结果显示 Massless 格点 Schwinger 模型有正确的连续极限行为. 本文应用这一方法于 Massive 格点 Schwinger 模型,提出一种新的 Hamiltonian, 找到其准确基态,计算了无穷长弦弦张力,结果亦为 $\frac{1}{2}e^2$. 由此可见, Massive 和 Massless 格点 Schwinger 模型同样地给出线性禁闭势,并且当 $a\to 0$ 时没有解除禁闭的相

本文 1989 年 4 月 28 日收到.

变发生，与连续理论现有结果一致[2].

二、准确基态和弦张力

首先集中讨论 Naive 费米子方案. 对 Massless 格点 Schwinger 模型，我们可以取 Hamiltonian 为[5]

$$H_0 = \frac{1}{2} e^2 a \sum_x e^{-CR_1} E(x) e^{2CR_1} E(x) e^{-CR_1}, \tag{2.1}$$

其中

$$R_1 = \sum_{\substack{x \\ k=\pm 1}} \bar{\Phi}(x) r_k U(x,k) \phi(x+k), \tag{2.2}$$

$r_{-1} = -r_1$, $\bar{\Phi}(x)$ 和 $\phi(x)$ 为费米场，$U(x,k)$ 为规范场，

$$[U(x,1), E(x)] = U(x,1),\quad [U(x,-1), E(x-1)] = -U(x,-1), \tag{2.3}$$

C 为保证 H_0 有正确经典连续极限，必须满足

$$-2C + 3\int_0^C dC' I_0(-4C') - 2C I_0(-4C) = \frac{1}{(ae)^2}, \tag{2.4}$$

$I_0(z)$ 为零阶虚宗量贝塞尔函数. 为了方便考虑加入费米子质量项，不妨取如下表象：

$$r_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad r_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix},\quad \phi^+(x) = (\xi^+(x) \quad \eta(x)). \tag{2.6}$$

设

$$H_m = m \sum_x e^{-CR_1} \xi^+(x) e^{2CR_1} \xi(x) e^{-CR_1} + m \sum_x e^{-CR_1} \eta^+(x) e^{2CR_1} \eta(x) e^{-CR_1}, \tag{2.7}$$

因为

$$\begin{aligned} e^{CR_1} \phi(x) e^{-CR_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C^n \phi_n(x), \\ e^{-CR_1} \phi^+(x) e^{CR_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C^n \phi_n^+(x), \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中

$$\phi_0(x) = \phi(x),$$

$$\phi_n(x) = [R_1, \phi_{n-1}(x)]$$

$$= (-1)^n r_0 r_{k_1} U(x,k_1) \cdots r_0 r_{k_n} U\left(x + \sum_{i=1}^{n-1} ki, kn\right) \phi\left(x + \sum_{i=1}^{n} ki\right), \tag{2.9}$$

$$\phi_0^+(x) = \phi^+(x),$$

$$\phi_n^+(x) = [-R_1, \phi_{n-1}^+(x)]$$

$$= (-1)^n \bar{\phi}\left(x - \sum_{i=1}^{n} ki\right) r_{k_n} U\left(x - \sum_{i=1}^{n} ki, kn\right) \cdots r_0 r_{k_1} U(x - k1, k1).$$

利用(2.6)式，我们不难改写 H_m 为

$$H_m = m\sum_x \bar{\phi}(x)\phi(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{m=0\\ n+m\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2m)!}C^{2n+2m}D_{2n+2m}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!(2m+1)!}C^{2n+2m+2}D_{2n+2m+2} \tag{2.10}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!(2m+1)!}C^{2n+2m+1}R_{2n+2m+1} + M_0,$$

其中 $$D_n = \sum_x \bar{\phi}(x)r_0 r_{k1}U(x,k1)\cdots r_0 r_{kn}U\left(x+\sum_{i=1}^{n-1}ki,kn\right)\phi\left(x+\sum_{i=1}^{n}k_i\right),$$

$$R_n = \sum_x \bar{\phi}(x)r_{k1}U(x,k1)\cdots r_0 r_{kn}U\left(x+\sum_{i=1}^{n-1}ki,kn\right)\phi\left(x+\sum_{i=1}^{n}ki\right), \tag{2.11}$$

M_0 为由算符顺序带来的无关常数．由(2.4)式，当 $a\to 0$ 时，

$$C \sim \frac{1}{2}\ln(ae), \tag{2.12}$$

再考虑到在经典连续极限下，

$$D_n \sim (ae)^n,\quad R_n \sim (ae)^n, \tag{2.13}$$

所以， $$H_m \to m\sum_x \bar{\phi}(x)\phi(x) + M_0,\quad 当\ a\to 0. \tag{2.14}$$

即 H_m 在经典极限下和费米子质量项只差一个无关常数．因此，我们可取 Massive 格点 Schwinger 模型的 Hamiltonian 为

$$H = H_0 + H_m. \tag{2.15}$$

因为 $$(e^{CR_1}E(x)e^{-CR_1})^+ = e^{-CR_1}E(x)e^{CR_1},$$

$$(e^{CR_1}\xi(x)e^{-CR_1})^+ = e^{-CR_1}\xi^+(x)e^{CR_1}, \tag{2.16}$$

$$(e^{CR_1}\eta(x)e^{-CR_1})^+ = e^{-CR_1}\eta^+(x)e^{CR_1},$$

所以 H 正定．令

$$|\Omega\rangle = e^{CR_1}|0\rangle, \tag{2.17}$$

其中 $|0\rangle$ 定义如下：

$$E(x)|0\rangle = 0,\xi(x)|0\rangle = 0,\eta(x)|0\rangle = 0. \tag{2.18}$$

则有 $$H|\Omega\rangle = 0, \tag{2.19}$$

即 $|\Omega\rangle$ 为 H 的准确基态．

现在计算弦张力．记一条规范场弦连结一对正反夸克的状态为 $|M_n\rangle$，

$$|M_n\rangle = e^{CR_1}M_n^+|0\rangle,$$

$$M_n^+ = \sum_{\substack{x\\ \Gamma=\pm n}}\xi^+(x)i^{\Gamma}U(x,\Gamma)\eta^+(x+\Gamma), \tag{2.20}$$

$$U(x,\pm n) = \prod_{i=0}^{n-1}U(x\pm i,\pm 1).$$

则无穷长弦弦张力为

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\frac{\langle M_n|H|M_n\rangle}{\langle M_n|M_n\rangle}. \tag{2.21}$$

对任意给定的 a, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\langle 0|M_n\frac{1}{(2k)!}C^{2k}R_1^{2k}M_n^+|0\rangle$ 对全体 n 一致收敛,所以

$$\lim_{n\to\infty}\langle M_n|M_n\rangle=\lim_{n\to\infty}\lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\left\langle 0\left|M_n\frac{1}{(2k)!}(2c)^{2k}R_1^{2k}M_n^+\right|0\right\rangle$$

$$=\lim_{K\to\infty}\lim_{\substack{n\to\infty\\ n>2K}}\sum_{k=0}^{K}\left\langle 0\left|M_n\frac{1}{(2k)!}(2c)^{2k}R_1^{2k}M_n^+\right|0\right\rangle. \qquad (2.22)$$

上式最后一等式 $n>2K$ 的限制条件使得只有 M_n 和 M_n^+ 的规范场弦反方向的组态有贡献,如图 1.

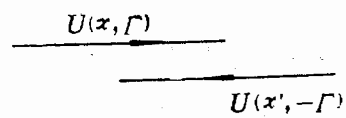

图　1

同理,因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\langle M_n|H_m|M_n\rangle=0, \qquad (2.23)$$

所以,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na}\langle M_n|H|M_n\rangle=\frac{1}{2}e^2\lim_{n\to\infty}\langle 0|M_nEe^{2CR_1}EM_n^+|0\rangle$$

$$=\frac{1}{2}e^2\lim_{K\to\infty}\lim_{\substack{n\to\infty\\ n>2K}}\frac{-1}{n}\sum_{k=0}^{K}\left\langle 0\left|[M_n,E]\frac{1}{(2k)!}(2C)^{2k}R_1^{2k}[M_n^+,E]\right|0\right\rangle, \qquad (2.24)$$

也只有图 1 所示组态贡献. 为方便起见,我们已略去 $E(x)$ 的空间指标及求和. 计及电场 E 的作用,有不等式

$$(n-2k)\leqslant\frac{-\langle 0|[M_n,E]R_1^{2k}[M_n^+,E]|0\rangle}{\langle 0|M_nR_1^{2k}M_n^+|0\rangle}\leqslant n, \qquad (2.25)$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n}\langle 0|[M_n,\ E]R_1^{2k}[M_n^+,\ E]|0\rangle=\langle 0|M_nR_1^{2k}M_n^+|0\rangle, \qquad (2.26)$$

所以
$$\alpha=\frac{1}{2}e^2. \qquad (2.27)$$

对 Susskind 费米子方案,取

$$H_s=\frac{1}{2}e^2a\sum_x e^{-CR_s}E(x)e^{2CR_s}E(x)e^{-CR_s}$$

$$+m\sum_x e^{-CR_s}\xi^+(2x)e^{2CR_s}\xi(2x)e^{-CR_s}$$

$$+m\sum_x e^{-CR_s}\eta^+(2x+1)e^{2CR_s}\eta(2x+1)e^{-CR_s}, \qquad (2.28)$$

其中 $\xi^+(x)$ 和 $\xi(x)$ 只定义于偶格点,$\eta^+(x)$ 和 $\eta(x)$ 只定义于奇格点,

$$R_s = \sum_{\substack{x \\ k=\pm 1}} \xi^+(2x)i^k U(2x,k)\eta^+(2x+k) + \eta(2x+1)i^k U(2x+1,k)\xi(2x+1+k), \tag{2.29}$$

则类似于 Naive 费米子方案的所有结果都可以得到.

三、讨　　论

(1) 对 Massive 格点 Schwinger 模型一类恰当的 Hamiltonian，我们找到其准确基态. 由于质量项的引入,破坏了手征对称性,即便采用 Naive 格点化,也不出现 Massless 情形的无穷简并 θ 真空[5].

(2) 准确计算了无穷长弦弦张力,结果为 $\frac{1}{2}e^2$. 这表明质量项的引入不影响禁闭性质，Massive 和 Massless 格点 Schwinger 同样地给出线性禁闭势,当 $a\to 0$ 时没有解除禁闭的相变发生,与连续理论符合.

(3) Naive 格点化在某些方面也可以得到正确的物理内容,如弦张力.

(4) 我们的方法可以直接应用于 $SU(N)$ 理论.

(5) 在准确基态的基础上,我们有希望求得激发谱.

参　考　文　献

[1] J.Schwinger, *Phys. Rev.*, **128** (1962), 2425.
J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 3594.

[2] S. Coleman, R. Jackiw and L. Susskind, *Ann. Phys.*, **93**(1975), 267.
S.Coleman, *Ann. Phys.*, **101** (1976), 239.

[3] J. Ranft and A. Schiller, *Nucl. Phys.*, **B225**(1983), 204.
H.Gausterer and J.R. Klauder, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 306.

[4] Guo S.H., Liu J.M., and Chen Q.Z., *Chin. Phys. Lett.*, **2**(1985), 409.
Guo S.H., Zheng W.H. and Liu J.M., *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 2593.

[5] Zheng Bo, "The exact ground state of lattice gauge theories", *submitted to Phys. Rev. D.*
郑波, "*Schwinger* 模型弦张力的准确计算",《高能物理与核物理》, 13(1989)

THE EXACT GROUND STATE AND STRING TENSION OF MASSIVE LATTICE SCHWINGER MODELS

ZHENG BO

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

In this paper a new form of the Hamiltonian of the massive lattice Schwinger model is proposed and its exact ground state is found. The string tension is calculated exactly and the result is $1/2\,e^2$ for both Naive and Susskind fermions.