第13卷 第2期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 13, No. 2
1989 年 2 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1989

量子 Berry 相因子的经典模型

孙 昌 璞
（东北师范大学，长春）

摘　　要

本文考虑了经典演化方程和 Schrödinger 方程的类似性，指出具有缓变参数的经典演化方程的解会自然给出具有拓扑性质的几何相因子—我们称之为经典 Berry 相因子．我们给出了绝热条件破坏时非简并情况各级近似方程的通解．作为例子，详尽研究了带电粒子在绝热变化磁场中的运动，明显地得到了一个量子 Berry 相因子的经典模型．这个相因子在几何上可解释为参数空间中单位球面 S^2 上厄米线丛的和乐．

一、引　　言

量子绝热过程的 Berry 拓扑相因子[1,2]已引起理论物理学家和实验物理学家的重视，它不仅在理论上与规范理论[3]，反常[4]以及量子 Hall 效应[5]等重要物理问题相联系，而且在许多精巧的物理实验中得到证实[6-9]．

Berry 相因子的存在具有普遍意义，对于非绝热的量子过程 Y. Aharonov 和 J. Anadan 推广了 Berry 相因子的概念[10]．作者也曾考虑过非绝热过程中 Berry 相因子的行为[11]，对简并和非简并两种情况进行了详细的讨论．值得指出的是我们所建议的实验和 D. Suter 等人用核磁共振所进行的实验基本一样．最近 T. Bitter 和 D. Dubbers 关于中子自旋进动的实验稍加改进[12] 也能验证我们的讨论．为了维持绝热条件，T. Bitter 等采用的是极化的慢中子．如果增加中子速度（可采用快中子反应堆），运动中子将感受到一个旋转较快的变化磁场，从而实现我们的想法．

量子 Berry 相因子的普遍意义还在于它存在于 Schrödinger 型经典演化方程的解中．经典 Berry 相因子的出现不仅使我们用经典客体模拟量子 Berry 相因子成为可能，而且使得规范场概念出在没有通常规范不变性的经典体系中．为了详尽阐述上述一般讨论，我们研究了缓变磁场中带电粒子的运动．

虽然对应于经典绝热过程的拓扑相角——Hannay 角概念已由 Hannay 本人提出，并由 Berry 和 Gozzi 等人加以发展[13,14]，但我们的出发点和内容均不同于他们的讨论．至于我们的经典 Berry 相和 Hannay 角非直接的、内在的联系，尚须进一步探讨．

本文 1987 年 10 月 8 日收到．

二、经典体系的绝热演化

物理学中许多经典演化方程均可表达为

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}\cdots M_{1N} \\ M_{21} & M_{22}\cdots M_{2N} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ M_{N1} & M_{N2}\cdots M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \tag{1}$$

或简写为

$$\frac{d}{dt}X(t) = \widetilde{M}[R(t)]X(t) + f(t) \tag{2}$$

其中 $x_i = x_i(t)$ 是体系的状态变量；$f_i = f_i(t)$ 是驱动力；$M_{ij} = M_{ij}[R(t)]$ 是随着环境特性参量 $R(t) = \{R_1(t), R_2(t), \cdots, R_k(t)\}$ 改变而变化的矩阵元．根据微分方程理论，方程 (1) 和 (2) 的解归结为求 (1) 或 (2) 的特解和相应的齐次方程

$$\frac{d}{dt}X(t) = \widetilde{M}[R(t)]X(t) \tag{3}$$

的通解．因此以下我们主要研究方程 (3)．

若 $\widetilde{M}[R]$ 是反厄米矩阵，$M = i\widetilde{M}$ 则是厄米矩阵，方程 (3) 化为 Schrödinger 型方程．

$$i\frac{d}{dt}X(t) = M[R(t)]X(t) \tag{4}$$

当 $M[R(t)]$ 随时间变化足够缓慢，(4) 的解中会出现类似于 Berry 相因子的拓扑结构．

对固定的参数 R，$M[R]$ 有一组分立的本征值 $\lambda_1[R]$，$\lambda_2[R]$，$\cdots$，$\lambda_N[R]$，相应的本征函数为 $u_1[R]$，$u_2[R]$，$\cdots$，$u_N[R]$．它们满足

$$M[R]u_n[R] = \lambda_N[R]u_n[R] \tag{5}$$

若在绝热条件下，$X(0) = u_n[R(0)]$，则 (4) 的解是

$$X(t) = \exp[i\gamma_n(t)]\exp\left\{-i\int_0^t dt'\lambda_n[R']\right\}u_n[R] \tag{6}$$

其中，$R' = R(t')$

$$\nu_n(t) = i\int_0^t (u_n[R'], \dot{u}_n[R'])dt' \tag{7}$$

在参数空间的闭曲线 C：$\{R(t)|R(0) = R(T)\}$ 上，$\nu_n(t)$ 给出经典 Berry 相因子 $\nu_n[c]$．

三、准绝热近似解

对于绝热条件破坏时的缓变过程，重复我们在文 [11] 中关于量子 Berry 相因子的

讨论．但文 [11] 仅给出二级以下的低级近似解． 本节我们就非简并经典演化方程任意级近似通解,其结果可直接移植到关于量子 Berry 相因子的讨论中去．

设演化方程 (4) 的解是

$$X(t)=\sum_{n} C_{n}(t)\exp\left\{-i\int_{0}^{t}\lambda_{n}[R']dt'\right\}u_{n}[R] \tag{8}$$

代入 (4) 可得关于 $C_m(t)$ 的方程组．

$$C_{m}(t)=-\sum_{n} C_{n}(t)\exp\left\{i\int_{0}^{t}[\lambda_{m}[R']-\lambda_{n}[R']]dt'\right\}(u_{m}[R],\dot{u}_{n}[R]) \tag{9}$$

相应的积分方程是

$$\begin{aligned}&C_{m}(t)+\int_{0}^{t}(u_{m}[R'],\dot{u}_{m}[R'])C_{m}(t')dt'\\&=-\sum_{n\neq m}\int_{0}^{t}C_{n}(t')\exp\left\{i\int_{0}^{t'}(\lambda_{m}[R'']-\lambda_{n}[R''])ds''\right\}(u_{m}[R'],\dot{u}_{n}[R'])dt'\end{aligned} \tag{10}$$

假设参数 $R(t)$ 变化周期为 T，$R(T)=R(0)$． 令 $S=t/T$，(10) 右边的和式可写为

$$\begin{aligned}\sum_{n\neq m}^{N}I_{n}=\sum\int_{0}^{s}C_{n}[s'T]\exp\left\{iT\int_{0}^{s'}(\lambda_{m}[R'']-\lambda_{n}[R'])ds''\right\}\\\times\left(u_{m}[R'],\frac{\partial}{\partial s}u_{n}[R']\right)ds'\end{aligned} \tag{11}$$

定义算符 $\hat{Q}_{mn}(s)$ 和单值连续函数 $\alpha_{mn}(s)$

$$\hat{Q}_{mn}(s)=\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{\lambda_{m}[R]-\lambda_{n}[R]}\right]+\frac{1}{\lambda_{m}[R]-\lambda_{n}[R]}\frac{\partial}{\partial s} \tag{12}$$

$$\alpha_{mn}(s)=\int_{0}^{s}[\lambda_{m}[R']-\lambda_{n}[R']]ds' \tag{13}$$

于是 (11) 式可由分部程分化为

$$\begin{aligned}\sum_{n\neq m}I_{n}=\sum_{n\neq m}\left(\frac{-i}{T}\right)^{l+1}\frac{\exp[i\alpha_{mn}(s)T]}{\lambda_{m}[R]-\lambda_{n}[R]}[\hat{Q}_{mn}(s)]^{l}\\\times\left(u_{m}[R],\frac{\partial}{\partial S}u_{n}[R]\right)C_{m}\end{aligned} \tag{14}$$

代入 (10) 并对 S 微分得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}C_{m}[TS]+\left(u_{m}[R]\frac{\partial u}{\partial s}n[R]\right)C_{m}[TS]\\&=-\sum_{n\neq m}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{T}\right)^{l+1}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\exp[iT\alpha_{mn}(s)]}{\lambda_{m}[R]-\lambda_{n}[R]}[\hat{Q}_{mn}(s)]^{l}\right.\\&\qquad\left.\times\left[\left(u_{m}[R],\frac{\partial}{\partial s}u_{n}[R]\right)C_{m}(TS)\right]\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

令

$$C_{m}(TS)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{T}\right)^{n}b_{m}^{[n]}(s)$$

代入 (15) 并比较 $1/T$ 同次项系数得

$$\frac{d}{ds}b_m^{[0]}(s)+\left(u_m[R],\frac{\partial}{\partial s}u_m[R]\right)b_m^{[0]}(s)=0$$

$$\frac{d}{ds}b_m^{[l]}(s)+\left(u_m[R],\frac{\partial}{\partial s}u_m[R]\right)b_m^{[l]}(s)=f_{(s)}^{[l]}$$

$$\equiv-\sum_{h=0}^{l-1}\sum_{n\neq m}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{\exp[iT\alpha_{mn}(s)]}{\lambda_m[R]-\lambda_n[R]}[\hat{Q}_{mn}(s)]^h b_n^{[l-h-1]}(s)\right.$$
$$\left.\times\left(u_m[R],\frac{\partial}{\partial s}u_n[R]\right)\right\}\tag{16}$$

利用初值 $b_m^{[0]}(0)=C_m^{[0]}(0)$，$b_m^{[l]}(0)=0(l=1,2,3,\cdots)$ 有

$$b_m^{[0]}(s)=b_m^{[0]}(0)\exp\left\{-\int_0^s\left(u_m[R],\frac{\partial}{\partial s}u_m[s']\right)ds'\right\}$$

$$b_m^{[l]}(s)=[b_m^{[0]}(s)/b_m^{[0]}(0)]\cdot\int_0^s f_{(s')}^{[l]}$$
$$\cdot\exp\left\{\int_0^{s'}\left(u_m[R''],\frac{\partial}{\partial s'}u_m[R'']\right)ds''\right\}ds'\tag{17}$$

不难看出，在绝热极限 ($T\to\infty$) 下，只须取 0 级近似，(17) 第一个方程恰好给出经典 Berry 相因子.

四、缓变磁场中的带电粒子

作为具体例子，我们讨论缓变磁场中的带电粒子.

设在矢势 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 描述的磁场 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 中，静止质量为 m，电荷为 q 的粒子的拉格朗日量是

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{V})=-mc^2\sqrt{1-V^2/c^2}+q/c\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{V}\tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{V}=\dot{\boldsymbol{X}}$ 相应的运动方程是

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{V}/\sqrt{1-V^2/c^2})=-\frac{q}{c}\left[\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}\right]\tag{19}$$

由于磁场变化极慢，它励激的电场只能引起较小的漂移运动. $\partial A/\partial t$ 即励激的感生电场可以忽略. F. Wilczek 曾考虑过关于磁场中带电谐振子的类似情况[15].

在非相对论极限下，或者考虑到 $\varepsilon=mc^2/\sqrt{1-V^2/c^2}$ 守恒，(19) 均可化为

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{bmatrix}=\frac{ec}{\varepsilon}\begin{bmatrix}0&B_z&-B_y\\-B_z&0&B_x\\B_y&-B_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{bmatrix}\tag{20}$$

这是一个标准的演化方程. 令

$$k=\frac{ec}{\varepsilon}|\boldsymbol{B}|\qquad\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$$

$$M[\boldsymbol{B}(t)]=k\begin{bmatrix}0, & ib_z & -ib_y\\ -ib_z & 0 & ib_x\\ ib_y & -ib_x & 0\end{bmatrix}\tag{21}$$

(20) 化为 Schrödinger 型方程

$$\sum\frac{dX(t)}{dt}=M[\boldsymbol{B}(t)]X(t)\tag{22}$$

对固定 $\boldsymbol{B}(t)$ 解 $M[\boldsymbol{B}(t)]$ 的本征值问题,可得到本征函数

$$u_1[\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{bmatrix}\quad u_2(\boldsymbol{B})=\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\begin{bmatrix}b_xb_z+ib_y\\ b_yb_z-ib_x\\ b_z^2-1\end{bmatrix}$$

$$u_3(\boldsymbol{B})=\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\begin{bmatrix}b_xb_z-ib_y\\ b_yb_z+ib_x\\ -1-b_z^2\end{bmatrix}\tag{23}$$

和相应的本征值 0，$+k$ 和 $-k$,相应的经典 Berry 相因子分别是

$$\begin{aligned}\gamma_1[C]&=i\int_0^T[u_1(\boldsymbol{B}),\ \dot{u}_1(\boldsymbol{B})]dt=0\\ \gamma_2[C]&=i\int_0^T(u_2[\boldsymbol{B}],\ \dot{u}_2[\boldsymbol{B}])dt\\ &=\oint_C[b_z^2/r]\times(b_xdb_y-b_ydb_x)\\ \gamma_3[C]&=i\int_0^T(u_3[\boldsymbol{B}],\dot{u}_3[\boldsymbol{B}])dt=-\gamma_2[C]\end{aligned}\tag{24}$$

其中 C 是磁场 $\boldsymbol{B}(t)$ 在参数空间 $\{B_x,B_y,B_z\}$ 中端点所扫过的闭曲线且满足

$$\boldsymbol{B}(0)=\boldsymbol{B}(T),\ r=\sqrt{b_x^2+b_y^2}.$$

当 $x(0)=\sum\limits_{n=1}^{3}C_n[0]u_n[R(0)]$，则方程 (22) 在绝热极限下的解是

$$\begin{aligned}X(t)=\ &C_1[0]u_1[\boldsymbol{B}(t)]+C_2[0]\exp[i\alpha(t)]u_2[\boldsymbol{B}(t)]\\ &+C_3[0]\exp[-i\alpha(t)]u_3[\boldsymbol{B}(t)]\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $\alpha(t)=\gamma_2(t)+\int_0^t k(t)dt$. 虽然这个相因子不能在实验中直接观察到，但它却影响着解 (25) 的行为。因此可以作间接测量.

五、讨　论

(1) 就经典演化方程本身而言，由于绝热考虑(忽略了感生磁场)并不具有规范不变性,但和量子力学情况相似[3],拓扑相因子 $\gamma_n(C)$ 却具有一种内在规范结构,可定义新的规范场:

$$\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{b})=(u_n[\boldsymbol{B}],\ \nabla_B u_n[\boldsymbol{B}])\tag{26}$$

事实上,当我们作变换

$$u_n[\boldsymbol{B}]\to u_n'[\boldsymbol{B}]=\exp[i\theta[\boldsymbol{B}]]u_n[\boldsymbol{B}]\tag{27}$$

则有以下规范变换

$$\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{b}) \to \boldsymbol{A}_n'(b) = \boldsymbol{A}_n + i\nabla_B\theta(\boldsymbol{B}) \tag{28}$$

但经典 Berry 相因子

$$\begin{aligned} \nu_n'[C] &= -i\oint_C \boldsymbol{A}_n'(\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{B} \\ &= \nu_n[C] + \oint_C \nabla_B\theta(\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{B} \\ &= \nu_n[C] \end{aligned}$$

即 $\nu_n[C]$ 是规范变换 (28) 的不变量．其中我们用到了

$$\oint_C \nabla_B\theta(\boldsymbol{B})d\boldsymbol{B} = \iint_\sigma \nabla\times\nabla_B\theta(\boldsymbol{B})\cdot d\sigma_B = 0$$

σ 是曲线 C 所张的面积．

(2) 本文所进行的讨论可以为求解具有变参数演化方程提供一个普遍而有效的方法．例如我们可以用这种方法讨论变参数耦合振动问题．

(3) Berry 相因子出现在某些经典演化方程的解中，为我们用经典客体模拟量子 Berry 相因子提供了依据． 考虑到电路分析中时变状态方程是一个 Schrödinger 型方程，我们也许会找到一个可以实施的经典模拟．

在完成本文过程中曾得到吴兆颜先生帮助．与王锡绂教授和陈文同先生进行过有意义的讨论．受益匪浅，作者谨此致谢．

参 考 文 献

[1] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. Lond.* **A392**(1984), 45.

[2] B. Simon, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983), 2167.

[3] R. Jackiw, MIT-CTPpreprint (1987).

[4] P. Nelson and L. Alvrez-Galm, *Comm. Math. Phys.*, 95(1985), 103.

[5] G. W. Semenoff and P. Sodana, *Phys. Rev. Lett.*, 57(1986), 1195.

[6] G. Delacretaz et al., *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 2598.

[7] A. Tomita and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 937.

[8] K. Tycko, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2281.

[9] R. S. Nikam and P. Ring, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 980.

[10] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.*, 58(1987), 1593.

[11] 孙昌璞，高能物理与核物理，12(1987)，351.
Chang-pu Sun, *J. Phys. A: Meth. Gen.*, **21**(1988), in press.

[12] J. Bitter and D. Dubber, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 251.

[13] M. V. Berry, *J. Phys. A: Meth. Gen.*, 18(1985), 15.
J. H. Hannay, *J. Phys. A: Meth. Gen.*, **18**(1985), 221.

[14] E. Gozzi and W. D. Thacker, *Phys. Rev.*, **D35**(1987) 2388; 2398.

[15] F. WlLczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1884), 2111.

A CLASSICAL MODLE OF QUANTUM BERRY'S PHASE FACTOR

SUN CHANGPU

(Northeast Normal University, Changchun)

ABSTRACT

Considering that the classical evolution equations are similar to the Schrodinger eqaution, we point out that there is the structure of the Berry's Phase in the solution of a classical evolution eqaution with adiabatic changing parameters. Thus, we can use a classical evolution process to imitate the quantum adiabatic process. As an example, the motion of a charged particle in slowly-changing magnetic field is studied and the corresponding phase factor can be interpreted as a holomony of the fiber bundle on the sphare s^2 in the parameter space.