第 13 卷 第 4 期 高能物理与核物理 Vol. 13, No. 4
1989 年 4 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Apr., 1989

轴对称空间电荷透镜中的电子云

郁 庆 长
（中国科学院高能物理研究所，北京）

摘 要

空间电荷透镜的聚焦特性决定于其电子云的大小、形状和密度分布. 本文利用数值与解析方法讨论了这些参量.

在空间电荷透镜中存在着被电磁场约束的电子云，它是由阴极发射或气体电离产生的。透镜对离子束的聚焦特性决定于电子云的状态。在多数文献中这种电子云被近似地认为处于平衡态[1]。对于一个轴对称透镜，电子的正则角动量守恒。采用圆柱坐标系 (z, r, φ)，电子的分布函数 f 可写作[2]

$$f = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{1}{kT}(H-\omega P)\right], \tag{1}$$

$$H = \frac{1}{2}mv^2 - eU, \quad P = mrv_\varphi - crA_\varphi. \tag{2}$$

这里 H 为 Hamilton 函数，P 为正则角动量，e 为电子电荷的绝对值，m 为电子质量，T 为电子温度，k 为 Boltzmann 常数，v 为电子速度，U 为电位，A_φ 为磁场矢量位的角向分量，n_0 与 ω 为常数。式 (1) 可进一步化作

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT}[v_z^2 + v_r^2 + (v_\varphi - \omega r)^2]\right\}, \tag{3}$$

$$n = n_0 \exp\left[\frac{e}{kT}(\psi - \psi_0)\right], \tag{4}$$

$$\psi = U + \frac{m\omega^2 r^2}{2e} - \omega r A_\varphi. \tag{5}$$

n 为电子密度，ψ 为修正位[3]。如选择 ψ_0 等于 ψ 的最大值，则 n_0 为电子最大密度，ω 显然是电子的平均角速度。

Poisson 方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{en}{\varepsilon_0} \tag{6}$$

可改写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{en_0\gamma}{\varepsilon_0} \exp\left[\frac{e}{kT}(\psi - \psi_0)\right]. \tag{7}$$

本文 1988 年 1 月 3 日收到

此处 γ 为磁约束因子[1]

$$\gamma = \frac{2\varepsilon_0\omega}{en}\left(B_z - \frac{m\omega}{e}\right) - 1, \tag{8}$$

ε_0 为真空介电常数，B_z 为轴向磁感应强度。

当 n_0, T, ω 已知时(有时用 $n = n_0$ 处的 γ 值 γ_0 代替 ω 更方便一些)，利用文[3]所讨论的数值方法可求解方程(7)，由此可算出电子密度分布。图 1 和图 2 画出了两个透镜中的电子云和 $\gamma(z,0)$，$n(z,0)$ 和 $R(z)$ 曲线，$R(z)$ 是电子云的半径。下面简单讨论两类透镜。

1. 长透镜(图 1)。对于这种透镜除两端的部分外可以认为电子云参量与 z 无关，此时方程(7)可改写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \frac{en_0}{\varepsilon_0}\left\{\exp\left[\frac{e}{kT}(\phi-\phi_0)\right] - \gamma_0 - 1\right\}. \tag{9}$$

n_0, ϕ_0, γ_0 为轴上的 n, ϕ, γ。注意 $\gamma_0 + 1 = (\gamma+1)\exp\left[\frac{e}{kT}(\phi-\phi_0)\right]$。当 $\phi - \phi_0$ 较小时 $\exp\left[\frac{e}{kT}(\phi-\phi_0)\right] = 1 + \frac{e}{kT}(\phi-\phi_0)$，上式的解为

$$\phi = \phi_0 + \frac{kT\gamma_0}{e}[1 - I_0(r/\lambda_D)]. \tag{10}$$

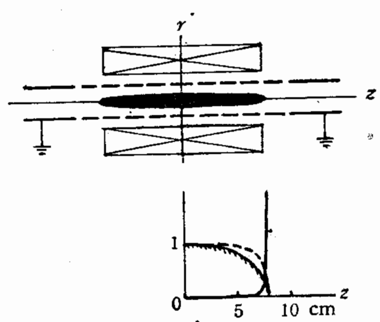

图 1　用于 MeV 级离子束的长空间电荷透镜中的电子云

$n_0 = 10^{10}\mathrm{cm}^{-3}$，$kT = 20\mathrm{eV}$，$\omega = 10^9\mathrm{s}^{-1}$，$B_{max} = 0.09\mathrm{T}$，最高电压 2kV。

////// R/R_{max}　--- n/n_0　—— γ

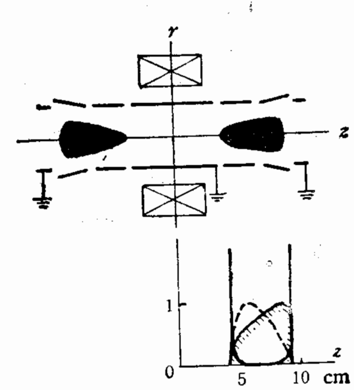

图 2　文[4]所报道的空间电荷透镜中的电子云

$n_0 = 10^9\mathrm{cm}^{-3}$，$\omega = 5\times10^8\mathrm{s}^{-1}$，$B_{max} = 0.057\mathrm{T}$，其余参数同图 1.

////// R/R_{max}　--- n/n_0　—— γ

$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 kT}{e^2 n_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ 为 Debye 长度，I_0 为零阶修正 Bessel 函数，当 ρ 较大时 $I_0(\rho) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho}} \times \exp\rho$。可以认为电子云边界处 $\frac{e}{kT}(\phi-\phi_0) \approx -1$，由此得到

$$R \approx -\lambda_D \ln\gamma_0. \tag{11}$$

---

1) 文[3]中定义的磁约束因子 $\Gamma = \gamma + 1$，今后将称 γ 为磁约束因子.

显然 γ_0 必须大于 0，当 γ_0 增加时 R 减小。对于实用的透镜 R 应大于 $4\lambda_D$，即 γ_0 应小于 0.02。此外当 T 增加或 n_0 减少时 R 增加。

2. 短透镜。图 2 是我国研制的一个空间电荷透镜[4]。计算表明它有两个电子云，分别位于两侧电位较高的区域。这里式 (7) 的 $\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ 项不可省略，但作为粗略近似仍可认为 $R(z) \approx -\lambda_D \ln\gamma(z, 0)$。因为电子云中 γ 较小，由式 (8) 可得

$$n(z, 0) \approx \frac{2\varepsilon_0\omega}{e} B_z(z, 0),\ R(z) \approx -\left(\frac{kT}{2e\omega B_z(z, 0)}\right)^{1/2} \ln\gamma(z, 0). \tag{12}$$

由此可知在电子云中磁场较强的一边电子密度较高而半径较小。这和计算结果一致。

式 (8) 还可改写为

$$\omega^2 - \frac{e}{m} B_z\omega + \frac{1}{4}(1+\gamma)\left(\frac{e}{m} B_C\right)^2 = 0. \tag{13}$$

此处 $B_C = \left(\frac{2mn}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}$ 被称为临界磁感应强度，显然 $B_z \geqslant \sqrt{1+\gamma}\, B_C$ 时上式才有 ω 的实数解。

上述理论没有考虑电子与残余气体原子的碰撞，由于这种碰撞，电子将向外扩散最后损失在电极上。下面研究这一碰撞对电子云的影响。仅讨论长透镜，假定它依靠电子对气体的电离作用补充电子，根据连续性方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(nrv_r) = Zn, \tag{14}$$

并认为电子云中心区域密度是均匀的，可得

$$v_r = \frac{1}{2} Zr. \tag{15}$$

Z 为电离频率。电子径向流体运动方程为

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{e}{m}E_r - \frac{e}{m}\omega B_z r + \omega^2 r - \frac{kT}{mn}\frac{\partial n}{\partial r} - (\nu + Z)v_r. \tag{16}$$

ν 为电子-原子碰撞的动量传输频率，将式 (15) 代入得

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{kT}{en}\frac{\partial n}{\partial r}, \tag{17}$$

$$\phi = U + \frac{m\omega^2 r^2}{2e} - \omega r A_\varphi - \frac{m}{4e} Z(\nu + 1.5Z)r^2. \tag{18}$$

式 (18) 和式 (4) 的差别仅在于多了一个较小的碰撞项。类似地可以导出

$$R = -\lambda_D \ln\gamma, \tag{19}$$

$$\gamma = \frac{2\varepsilon_0}{en}\left[\omega B_z - \frac{m\omega^2}{e} + \frac{m}{2e} Z(\nu + 1.5Z)\right] - 1. \tag{20}$$

因此我们认为，在考虑碰撞的情况下，只要进行适当修正，平衡态理论作为一种近似仍然可以应用。当然，平衡态理论本身不能确定 n_0, T, ω 等参量的值，要确定这些参量需要研究电子云中电子的产生和输运过程。

参　考　文　献

[1] А. И. Морозов и С. В. Лебедев, *Вопросы Теории Плазмы*, **8**(1974), 247.
[2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Statistical Physics, Part 1, Pergamon, Oxford, 1980, 11.
[3] 郁庆长,原子能科学技术, **21**(1987),666.
[4] 邱宏等,高能物理与核物理, **7**(1983),583.

ELECTRON CLOUDS IN AXIAL SYMMETRIC SPACE-CHARGE LENSES

Yu Qingchang
(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

Abseract

The focusing properties of a space-charge lens depend on the size, shape and density distribution of its electron cloud. In this paper these parameters are discussed by both numerical and analytical methods.