第 13 卷 第 4 期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 4
1989 年 4 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Apr., 1989

# 玻色弦的 BKS 核和路径积分

费少明
(浙江大学，杭州)

虞跃
(中国高等科学技术中心(世界实验室)，理论物理分中心．中国科学院高能物理研究所，北京)

**摘要**

本文利用 Blattner-Kostant-Sternberg (BKS) 核讨论了玻色弦的几何量子化和路径积分量子化的联系，给出了 Polyakov 路径积分表达式．

## 一、引言

弦的正则量子化[1]和 Polyakov 路径积分量子化[2]的联系一直是人们所关注的问题．我们知道，几何量子化是正则量子化的一个整体和协变的描述，而量子力学的路径积分量子化又可以通过几何量子化中的 BKS 核理论导出[3]．在本文中，我们将讨论玻色弦的 BKS 核和 Polyakov 路径积分量子化的联系．

在几何量子化中，极化理论具有十分重要的地位，不同的极化可以给出具有相同经典极限的不同的量子理论． BKS 核理论研究的就是不同极化下量子态间的关系．通过对玻色弦在某一极化 $F$ 下的 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 与对它们作由哈密顿量算符 $\hat{H}$ 生成的正则变换后的 $F_t$ 和 $\mathscr{H}_t$ 的关系的研究，我们得到弦的 Polyakov 路径积分形式．

本文顺序如下：第二节，讨论玻色弦的 Hilbert 空间；第三节，研究玻色弦的 BKS 核并给出力学量的算符表示；第四节，从 BKS 核出发导出玻色弦的路径积分表达式．

## 二、量子化的 Hilbert 空间

设 $\xi^\alpha, \alpha = 0,1$，是二维世界面$M$上的坐标，$g^{\alpha\beta}$ 是$M$的度规张量，$q\mu(\xi)$ 为弦的坐标．这时相空间 $\Gamma$ 中的辛形式是[4]

$$\omega = \int_\Sigma d\Sigma_\alpha[\delta H^{\alpha\mu} \wedge \delta q_\mu + \delta H^\alpha_{\beta\gamma} \wedge \delta g^{\beta\gamma}] \tag{2.1a}$$

其中 $H^{\alpha\mu} = \sqrt{g}\ \ g^{\alpha\beta}\partial_\beta q^\mu$

$$H^\alpha_{\beta\gamma} = \sqrt{g}\,(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\lambda_{\beta\lambda}\delta^\alpha_\gamma) - \frac{1}{2}\sqrt{g}\ \ g_{\beta\gamma}(\Gamma^\alpha_{\sigma\lambda}g^{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda}g^{\sigma\alpha}) \tag{2.1b}$$

本文 1988 年 8 月15日收到．

$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 是 Levi-Civita 联络，$\Sigma$ 为 $M$ 中一条曲线．由于 $d\omega=0$，(2.1a) 与初始曲线 $\Sigma$ 的选择无关，因此可选固定 $\tau$ 的积分，于是

$$\omega=\int_0^A d\sigma(\delta H^{0\mu}\wedge\delta q_\mu+\delta H^0_{\beta\gamma}\wedge\delta g^{\beta\gamma}) \tag{2.2}$$

这里，对玻色开弦，$A=\pi$，对玻色闭弦，$A=2\pi$．

把关于 $\sigma$ 的积分离散化，取 $\Delta=\frac{A}{N}$，$\sigma_n=n\Delta$，

则

$$\omega=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Delta[\delta H^{0\mu}_n\wedge\delta q_{\mu n}+\delta H^0_{\beta\gamma n}\wedge\delta g^{\beta\gamma}_n] \tag{2.3}$$

其中 $\delta H^{0\mu}_n=\delta H^{0\mu}(\sigma_n)$，$\delta q_{\mu n}=\delta q_\mu(\sigma_n)$ 等等．若记

$$q_n=\begin{cases}q_{\mu n} & 1\leqslant n\leqslant N\\ g^{\beta\gamma}_{n-N} & N<n\leqslant 2N,\end{cases}\qquad P_n=\begin{cases}\Delta H^{0\mu}_n & 1\leqslant n\leqslant N\\ \Delta H^0_{\beta\gamma n-N} & N<n\leqslant 2N\end{cases} \tag{2.4}$$

则 (2.3) 可重写为

$$\omega=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{2N}\delta P_n\wedge\delta q_n \tag{2.5}$$

这时相空间 $\Gamma=(P_n,q_n)$，相应的预量子化线丛 $L$ 具有联络 $\theta$，

$$\theta=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{2N}P_n\delta q_n \tag{2.6}$$

预量子化 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_p$ 就是该丛上的截面空间．

根据测不准原理，我们必须引入极化，将 $\mathscr{H}_p$ 退化为量子化的 Hilbert 空间．这里我们取 Schrödinger 极化 $F$，其基是 $q=(q_i)$ 的哈密顿矢量场 $\xi_q=(\xi_{q_i})$，其中 $i=1,\cdots,D$；$D=(d+3)N$，$d$ 为弦量 $q_\mu$ 的维数．

这时可以证明 $\mathscr{H}_p$ 中两个沿 $F$ 方向为协变常数的元的厄米内积是不能很好定义的[3]．为此，我们引入另一个复线丛 $\mathrm{V}\Lambda^D F$．

对于任意的 $x\in\Gamma$，极化 $F$ 有标架 $W(x)=(W_i(x))$，$i=1,\cdots,D$；$F$ 上所有标架的集合构成标架丛 BF，它是主丛 $\mathrm{GL}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{GL}(3N,\mathbb{C})$ 的伴矢丛．设

$\mathrm{ML}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{ML}(3N,\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{GL}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{GL}(3N,\mathbb{C})$ 的二次覆盖群，有映射 $\rho$：$\mathrm{ML}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{ML}(3N,\mathbb{C})\to\mathrm{GL}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{GL}(3N,\mathbb{C})$，相应地有 $\mathrm{ML}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{ML}(3N,\mathbb{C})$ 的伴矢丛 $\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{F}$ 与 BF 间的映射 $\tau:\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{F}\to\mathrm{BF}$．$\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{F}$ 可看作一标架丛，相应的标架 $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_i)$ 称为亚线性标架 (Metalinear Frame)．

由 $F$ 我们可构造一个外代数，$F$ 的 $D$ 次外积，记作 $\Lambda^D F$，形成一个复线丛，$\Lambda^D F$ 上的任意截面 $\mu(x)$ 可写成

$$\mu(x)=\mu^{\#}(W)W_1\wedge\cdots\wedge W_D \tag{2.7}$$

$\mu^{\#}$ 为标架丛 BF 上的函数，对于任意 $C\in\mathrm{GL}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{GL}(3N,\mathbb{C})$，显然有

$$\mu^{\#}(WC)=\det(C^{-1})\mu^{\#}(W) \tag{2.8}$$

为了构造一个在 $F$ 方向有很好定义的协变导数的线丛，我们设映射 $\chi$：$\mathrm{ML}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{ML}(3N,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ 是 $\det\cdot\rho$ 作用在 $\mathrm{ML}(dN,\mathbb{C})\otimes\mathrm{ML}(3N,\mathbb{C})$ 上的唯一全纯平方

根,并且 $\chi(\tilde{I})=1$, $\tilde{I}$ 是 $ML(dN,\mathbb{C})\otimes ML(3N,\mathbb{C})$ 的单位元. 定义复线从 $V\Lambda^D F$ 如下: 对于 $V\Lambda^D F$ 的任意截面 $\nu(x)$,

$$\nu(x)=\nu^{\#}(\widetilde{W})\widetilde{W}_1\wedge\cdots\wedge\widetilde{W}_D \tag{2.9}$$

$\nu^{\#}$ 为标架从 $\tilde{B}F$ 上的函数,满足

$$\nu^{\#}(\widetilde{W}\widetilde{C})=\chi(\widetilde{C}^{-1})\nu^{\#}(\widetilde{W}) \tag{2.10}$$

这里 $\widetilde{C}\in ML(dN,\mathbb{C})\otimes ML(3N,\mathbb{C})$ 可由 $\rho:\widetilde{C}\to C\in GL(dN,\mathbb{C})\otimes GL(3N,\mathbb{C})$ 得到.

从 $V\Lambda^D F$ 上的沿 $F$ 方向的协变导数可定义为

$$(\nabla_u\nu)|_U=u(\nu^{\#}\circ\xi)\nu_\xi \tag{2.11}$$

其中 $u\in F$,$\xi$ 是一亚线性标架场,$U$ 是 $\Gamma$ 上的一个邻域. 截面 $\nu_\xi$ 唯一地定义为

$$\nu_\xi^{\#}\circ\xi=1 \tag{2.12}$$

现在我们定义量子化的 Hilbert 空间为从 $L\otimes V\Lambda^D F$ 的截面空间沿 $F$ 是协变常数的那些截面形成的子空间. 设 $\lambda_0$ 是 $L$ 上的一个非零协变常数截面,其自身厄米内积满足

$$\langle\lambda_0,\lambda_0\rangle=1 \tag{2.13}$$

则任意 $\sigma\in\mathscr{H}$ 可写成

$$\sigma=\phi(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi \tag{2.14}$$

这时 $\mathscr{H}$ 内的厄米内积是有很好定义的,对于 $\sigma_1,\sigma_2\in\mathscr{H}$, 有

$$(\phi_1(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi|\phi_2(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi)=\langle\phi_1(q)|\phi_2(q)\rangle=\int\phi_1(q)\phi_2^*(q)\delta^D q \tag{2.15}$$

(2.15) 表明,在 $\mathscr{H}$ 中波函数是平方可积的,符合量子态几率解释.

## 三、力学量算符和 BKS 核

设 $F_1$ 和 $F_2$ 是 $\Gamma$ 上的两个极化, $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 是与 $F_1$ 和 $F_2$ 对应的 Hilbert 空间. 所谓 BKS 核就是 $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个映射

$$K_{12}(\sigma_1,\sigma_2)=(\sigma_1|u_{12}\sigma_2) \tag{3.1}$$

其中 $\sigma_i\in\mathscr{H}_i$, $i=1,2$,$u_{12}$ 是 $\mathscr{H}_2$ 到 $\mathscr{H}_1$ 的线性映射. 等价地[3], $K_{12}$ 也可以用下式定义,

$$K_{12}(\sigma_1,\sigma_2)=\int_\Gamma\left(\frac{i}{h}\right)^{D/2}[\det\omega(\xi_j^1,\xi_K^2)]^{\frac{1}{2}}\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle|\omega^D| \tag{3.2}$$

其中 $\xi^i\in F^i$,$i=1,2$, 满足

$$\sigma_i=\lambda_i\otimes\nu_{\xi^i},\nu_{\xi^i}^{\#}\circ\xi^i=1,i=1,2, \tag{3.3}$$

现在我们来研究在极化 $F$ 下,力学量 $f$ 对应的量子算符 $\hat{O}_f^F$. 设 $\phi_f^t$ 是 $f$ 生成的 $\Gamma$ 上的一个正则变换群的单参子群, $\phi_f^t$ 诱导的切变换作用在 $F$ 上得到另一极化 $F_t$, 记与 $F$ 及 $F_t$ 对应的 Hilbert 空间为 $\mathscr{H}$ 及 $\mathscr{H}_t$, 这时, $\hat{O}_f^F$ 可以用下式定义

$$\hat{O}_f^F\sigma=i\hbar\frac{d}{dt}u_t\phi_f^t\sigma\Big|_{t=0} \tag{3.4}$$

$\sigma\in\mathscr{H}$, $u_t:\mathscr{H}_t\to\mathscr{H}$. 利用 (3.1) 和(3.2),且把 $\sigma$ 写成(2.14)的形式,则可以证明

$$\hat{O}_f^F\phi(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi=i\hbar\frac{d}{dt}\phi_t(q)\Big|_{t=0}\lambda_0\otimes\nu_\xi \tag{3.5}$$

其中 $\phi_t(q)=(i\hbar)^{-D/2}\int[\det\omega(\xi_{q^i},\phi_f^t\xi_{q^k})]^{\frac{1}{2}}$

$$\cdot\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t(\theta(\xi_f)-f)\circ\phi_f^{-s}ds\right]\ \phi(q\circ\phi_f^{-t})\delta^D P \tag{3.6}$$

(3.5) 给出了力学量算符的一般表达式．在下一节里，我们将用 (3.5) 和(3.6)式来得到玻色弦的路径积分表达式．

## 四、Polyakov 路径积分表示

现在我们取 $f$ 是系统的哈密顿量 $H$，且定义 $q_0^i=q^i\circ\phi_H^{-t}$．把 $H,q_0^i$ 代入(3.6)，并作积分变量替换 $P\to q_0$，则

$$\phi_t(q)=\int\delta^D q_0\phi(q_0)K(0,q_0;t,q) \tag{4.1}$$

其中

$$K(0,q_0;t,q)=(-i\hbar/\Delta^2)^{-\frac{D}{2}}\left\{\det\left[\frac{\delta^2 s(0,q_0;t,q)}{\delta_{q^i}\delta q_0^K}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left\{\det\left[\frac{\delta^2 s(0,q_0;t,q)}{\delta_{q^{j+dN}}\delta_{q^{k+dN}}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\exp[i\hbar^{-1}S(0,q_0;t,q)] \tag{4.2a}$$

$$S(0,q_0;t,q)=\int_0^t(\theta(\xi_H)-H)\circ\phi_H^{-s}ds \tag{4.2b}$$

这里 $j,k=1,\cdots,dN$，且用了公式

$$\det\omega(\xi_j,\phi_H^t\xi_k)=\det\left[-\Delta^2\frac{\delta\phi_H^t q_k}{\delta P_j}\right]$$

$$=(-\Delta^2)^{dN}\left[\det\left(\frac{\delta^2 s(0,q_0;t,q)}{\delta_{q^j}\delta_{q^k}}\right)\right]^{-1} \tag{4.3}$$

考虑作用在表示空间 $\mathscr{H}$ 上的单参数么正变换群 $\exp(-i\hbar^{-1}\hat{O}_H^F)$，由 (3.4) 可知，在 $t\to 0$ 时

$$\exp(-i\hbar^{-1}\hat{O}_H^F)|_{t=0}[\phi(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi]=u_t\phi_H^t|_{t=0}[\phi(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi] \tag{4.4}$$

因此若将区间 $[0,t]$ 分成$M$等分，则在 $M\to\infty$ 时

$$\exp(-it\hbar^{-1}\hat{O}_H^F)[\phi(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi]=\lim_{M\to\infty}[u_{t/M}\phi_H^{t/M}]^M[\phi(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi] \tag{4.5}$$

利用(4.1)，(4.2)及(4.5)式，立刻有

$$(\exp(-it\hbar^{-1}\hat{O}_H^F)\phi(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi|\phi(q)\lambda_0\otimes\nu_\xi)$$

$$=\int\delta^D q\delta^D q_0\phi(q_0)\overline{\phi(q)}\,Z_{NM}(0,q_0;t,q) \tag{4.6}$$

其中

$$Z_{NM}(0,q_0;t,q)=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\left(-\frac{i\hbar}{\Delta^2}\right)^{-MD/2}\int\prod_{s=1}^{M-1}\delta_{q_s}^D$$

$$\times\left[\prod_{r=1}^{M-1}\det\left(\frac{\delta^2 s(0,q_r;t/M,q_{r+1})}{\delta q_r^j\delta q_{r+1}^k}\right)\det\left(\frac{\delta^2 s(0,q_r;t/M,q_{r+1})}{\delta q_r^{j+dN}\delta q_{r+1}^{k+dN}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp\left[i\hbar^{-1}\int_0^t d\tau\int_0^A d\sigma(\mathscr{L}_q+\mathscr{L}_g)\sqrt{g}\right] \tag{4.7}$$

这里

$$\mathscr{L}_q+\mathscr{L}_g=-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha q^\mu\partial_\beta q_\mu-R \tag{4.8}$$

$R$为 Ricci 张量.

注意到连续化的作用量比离散化时具有更高的对称性，即(4.8)具有微分同胚不变性，因此，路径积分表达式必须除去微分同胚群体积，同时，又由于 $\det\left(\frac{\delta^2 s}{\delta q_r^i\delta g_{r+1}^k}\right)\cdot\det\left(\frac{\delta^2 s}{\delta q_r^{i+dN}\delta q_{r+1}^{k+dN}}\right)$是与场量无关的因子，于是，我们得到

$$Z'_{NM}=Z_{NM}/\Omega=\int\mathscr{D}q\mathscr{D}_g\exp\left(-i\hbar^{-1}\int d^2\xi\sqrt{g}\,\mathscr{L}_t\right) \tag{4.9}$$

其中$\Omega$为微分同胚群体积元.

(4.9)式正是我们所熟知的 Polyakov 路径积分表达式. 这样，我们便建立了玻色弦的几何量子化和路径积分量子化的联系.

作者对黄涛教授和陈伟博士对本工作的支持，郭汉英教授和沈为良同志与我们的有益讨论，表示感谢.

## 参 考 文 献

[1] J. Scherk, *Rev. Mod. Phys* .**47** (1975),123.

[2] A. M. Polyakov,*Phys. Lett.*, **103**B (1981) 207; 211.

[3] J. Sniatychki, Geometric Quantization and Quantum Mechanics (Springer-Verlag, New York, 1980; N. J. M. Woodhouse, Geometric Quantization (Claredon Press, Oxford, UK. 1980).

[4] C. Crnkovic and E. Witten, in Newton's Tercentenary Volume, eds., S. Hawking and W. I. Isreal; C. Crnkovic, *Nucl. Phys*. **B288** (1987), 431; Y. Yu, BIHEP preprint, BIHEP-TH-26.

# THE BKS KERNEL OF BOSONIC STRINGS AND PATH INTEGRAL

FEI SHAOMING

*(Zhejiang University, Hangzhou, P. R. China)*

YU YUE

*(Centre of Theoretical Physics, CCAST (World Lab.), Beijing.*
*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)*

## ABSTRACT

The connections between geometric quantization and path integral quantization of bosonic strings are investigated. The Polyakov path integral formulation and its measure are manifestly deduced from the Blattner-Kostant-Sternberg (BKS) kernel of geometric quantization.