第13卷 第6期　高能物理与核物理　Vol. 13, No. 6
1989年 6 月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　June, 1989

关于玻色弦的几何量子化(二)

虞　跃
(中国科学院高能物理研究所,北京)
郭汉英
(中国科学院理论物理研究所,北京)

摘　要

本文给出在全纯极化下玻色弦的 Hilbert 空间和 Virasoro 代数生成元的表示. 我们证明了 Virasoro 代数的中心项可以解释为弦的全纯 Fock 丛的曲率. 反常相消条件是弦的全纯 Fock 丛和全纯鬼真空丛的乘积丛的曲率为零. 我们还讨论了经典的和量子的 BRST 算子、鬼算子和反鬼算子的几何意义.

一、引　言

在前一篇文章中[1],我们给出了玻色弦的几何量子化描述. 玻色弦的辛几何,预量子化和量子态的 Hilbert 空间都可以用标准的几何量子化语言来描述. 我们还特别指出,预量子化 Hilbert 空间上的共形代数没有反常. 共形反常只在取了极化以后的量子态 Hilbert 空间中出现. 事实上,共形反常的出现还具有更深刻的几何背景. 正如一些作者最近所做的,圈空间上共形代数的反常可以看作它的齐性空间 $\mathrm{Diff}S^1/S^1$ 上的全纯 Fock 线丛的曲率[2,3]. 在我们现在的情况下,反常也可以看作弦的相空间的齐性空间 $G'=G/H$ 上的全纯 Fock 丛的曲率. 这里 G 是相空间的重参数变换群, H 是由 L_0 生成的单参子群. 这个曲率在临界维数时正好与 G' 上的鬼真空丛的曲率相差一个符号. 反常相消条件可由 G' 上的全纯 Fock 丛和鬼真空丛的直积丛的曲率为零来描述. 另外,我们还将看到 BRST 算子,鬼算子和反鬼算子可以在重参数化群的意义下得到几何解释. 经典的和量子的 BRST 算子可以看作在 G 的不同表示下 G 上的外微方算子. 鬼算子基本上可以看作 G 上的左不变 1 形式,而反鬼算子则是 G 上的内积算子.

本文的内容如下: 第一节,我们讨论坐标表象与全纯(反全纯)表象之间的变换,从而导出在全纯(反全纯)表象下 Virasoro 代数的生成元的表示. 第三节,我们证明反常正好就是 G' 上全纯(反全纯) Fock 丛的曲率,而反常相消条件则是 Fock 丛和鬼真空丛的直积丛的曲率为零. 第四节,我们讨论经典的和量子的 BRST 算子,鬼算子和反鬼算子的几何意义.

本文 1988 年 5 月 20 日收到.

二、全纯表象和反全纯表象

如果 $(p(\sigma),\ q(\sigma))$ 是玻色开弦相空间的局域坐标．傅立叶展开是

$$q(\sigma)=q_0+\sum_{m=1}q_m\cos m\sigma,\quad p(\sigma)=p_0+\sum_{m=1}p_m\cos m\sigma \tag{2.1}$$

其中

$$q_m=-\frac{i}{m}(\bar\alpha_m-\alpha_m),\quad p_m=\bar\alpha_m+\alpha_m \tag{2.2}$$

这时，可以选取一个近复结构 J

$$J\begin{pmatrix} q_0\\ \vdots\\ q_m\\ \vdots\\ p_0\\ \vdots\\ p_m\\ \vdots\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}1 &&&&&\\ &1&&&&\\ &&\frac{1}{2}&&&\\ &&&\ddots&&\\ &&&&\frac{1}{m}&\\ &&&&&\ddots\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}-1 &&&&&\\ &-1&&&&\\ &&-2&&&\\ &&&\ddots&&\\ &&&&-m&\\ &&&&&\ddots\end{matrix} & 0\end{array}\right)\begin{pmatrix} q_0\\ \vdots\\ q_m\\ \vdots\\ p_0\\ \vdots\\ p_m\\ \vdots\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

满足

$$J^2=-1 \tag{2.4}$$

再定义

$$\begin{aligned} q_0&=-i(z_0-\bar z_0),\quad p_0=\bar z_0+z_0\\ z_n&=(\delta_{n,0}+(1-\delta_{n,0})/\sqrt{n})\bar\alpha_n\\ \bar z_n&=(\delta_{n,0}+(1-\delta_{n,0})/\sqrt{n})\alpha_n \end{aligned} \tag{2.5}$$

则由 $d^2=0$ 和

$$d=\partial+\bar\partial \tag{2.6}$$

得

$$\partial^2=\bar\partial^2=0 \tag{2.7}$$

于是，J 是可积的．这时，辛结构和 X_f 可写成

$$\omega=2idz_0\wedge d\bar z_0+i\sum_{n=1}d\bar z_n\wedge dz_n \tag{2.8}$$

$$X_f=i/2\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z_0}\frac{\partial}{\partial z_0}-\frac{\partial f}{\partial z_0}\frac{\partial}{\partial\bar z_0}\right)+i\sum_{n=1}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z_n}\frac{\partial}{\partial z_n}-\frac{\partial f}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial\bar z_n}\right) \tag{2.9}$$

弦满足的约束 $L_n=0$ 可表示为

$$L_0=-\frac{1}{2}(z_0+\bar z_0)^2-\sum_{m>0}mz_m\bar z_m \tag{2.10}$$

$$L_n = -\sqrt{n}(z_0+\bar{z}_0)\bar{z}_n - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\,\bar{z}_m\bar{z}_{n-m} - \sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\,\bar{z}_m z_{m-n}, \quad n>0$$

$$L_{-n} = -\sqrt{n}(z_0+\bar{z}_0)z_n - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\,z_m z_{n-m} - \sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\,z_m\bar{z}_{m-n}, \quad n>0$$

(2.10)满足共形代数

$$\{L_n, L_m\}_{P,B} = (n-m)L_{n+m} \tag{2.11}$$

取预量子化线丛上的连络是

$$\theta^j = -i(z_0+\bar{z}_0)d(z_0-\bar{z}_0) + \frac{i}{2}\sum_{n>0}(z_n d\bar{z}_n - \bar{z}_n dz_n) + (-1)^j\frac{i}{2}d\left(\sum_{n>0}|z_n|^2\right), \; j=1, 2 \tag{2.12}$$

对应于指标 j，我们取极化 $F^{(j)}$

$$F^{(1)} = \left\{\frac{\partial}{\partial p_0}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right\}, \quad F^{(2)} = \left\{\frac{\partial}{\partial p_0}, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\} \quad n>0, \tag{2.13}$$

在极化 $F^{(j)}$ 下，

$$H_{F^{(1)}} = \{f^1(q_0, z_n)\}, \quad H_{F^{(2)}} = \{f^2(q_0, \bar{z}_n)\} \tag{2.14}$$

Virasoro 代数的生成元是

$$\hat{O}^1_{L_0} = -\frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0}\right)^2 - \sum_{l>0} l z_l \frac{\partial}{\partial z_l} + \beta$$

$$\hat{O}^1_{L_n} = -\sqrt{n}\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0}\right)\frac{\partial}{\partial z_n} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\frac{\partial}{\partial z_m}\frac{\partial}{\partial z_{n-m}} - \sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\,z_m\frac{\partial}{\partial z_{m-n}}, \quad n>0$$

$$\hat{O}^1_{L_{-n}} = -\sqrt{n}\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0}\right)z_n - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\sqrt{m(n-m)}\,z_m z_{n-m} - \sum_{m>n}\sqrt{m(m-n)}\,z_{m-n}\frac{\partial}{\partial z_m}, \quad n>0 \tag{2.15}$$

和

$$\hat{O}^2_{L_n} = \hat{O}^1_{L_n}\left(z_m \to -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_m}, \frac{\partial}{\partial z_m} \to \bar{z}_m, \beta \to -\beta\right) \tag{2.16}$$

而 Virasoro 代数是：

$$[\hat{O}^i_{L_n}, \hat{O}^i_{L_m}] = (n-m)\hat{O}^i_{L_{n+m}} + (-1)^{i+1}\left(\frac{d}{12}n^3 - \beta m\right)\delta_{m+n,0} \tag{2.17}$$

现在，我们要研究另两个极化下的 Hilbert 空间和 Virasoro 代数的反常．取 $F^{\pm}$ 如下

$$F^+ = \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n},\ n \geqslant 0\right\},\quad F^- = \left\{\frac{\partial}{\partial z_n},\ n \geqslant 0\right\} \tag{2.18}$$

由于预量子化算子 $\hat{O}_{L_n}$ 不保 Hilbert 空间

$$H_{F^+} = \{e^{-\frac{1}{2}p_0^2} f(z_n)\},\ H_{F^-} = \{e^{\frac{1}{2}p_0^2} f(\bar{z}_n)\} \tag{2.19}$$

所以要研究 $H_{F^\pm}$ 与 $H_{F(j)}$ 的变换．事实上，这只需讨论 $f(q_0)$ 与 $f(z_0)\cdot(f(\bar{z}_0))$ 的关系即可．坐标表象和全纯表象的变换关系是

$$\begin{aligned}
&U(z_0,q_0): f(q_0) \rightarrow e^{-\frac{1}{2}p_0^2} f(z_0)\\
&U(z_0,\ q_0) = e^{-\frac{1}{2}p_0^2}\int dq_0 \exp\left[\frac{1}{2}\left(|z_0|^2 - 2q_0^2\right) - iz_0q_0\right]\\
&U^{-1}(z_0,\ q_0) = \int dp_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(p_0^2 + q_0^2 - 2ip_0\cdot q_0\right)\right]e^{-\frac{1}{2}p_0^2}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

坐标表象和反全纯表象的变换关系是

$$\begin{aligned}
&U(\bar{z}_0,\ q_0): f(q_0) \rightarrow e^{\frac{1}{2}p_0^2} f(\bar{z}_0)\\
&U(\bar{z}_0,\ q_0) = \rho^{\frac{1}{2}p_0^2}\int dq_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\bar{z}_0|^2 - 2q_0^2\right) - iz_0q_0\right]\\
&U^{-1}(\bar{z}_0,q_0) = \int dp_0 \exp\left[\frac{1}{2}\left(p_0^2 + q_0^2 + 2ip_0\cdot q_0\right)\right]e^{-\frac{1}{2}p_0^2}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

利用(2.20)和(2.21)可得

$$\begin{aligned}
&\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0}\right)_+ = \frac{\partial}{\partial z_0} + z_0 + p_0\\
&\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0}\right)_- = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} + \bar{z}_0 - p_0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

这时，若作规范变换

$$\theta^{1(2)} \rightarrow \theta^{1(2)} + (-1)^{1(2)}\frac{i}{2}d(p_0^2) \tag{2.23}$$

则得到全纯 Fock 空间和反全纯 Fock 空间

$$\begin{aligned}
&\mathscr{H}^+ = \{f(z_n)\,|\,(\hat{L}_n^+ - \beta\delta_{n,0})f(z_n) = 0\}\\
&\mathscr{H}^- = \{f(\bar{z}_n)\,|\,(\hat{L}_n^- + \beta\delta_{n,0})f(\bar{z}_n) = 0\}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\hat{L}_n^+ = \hat{O}_{L_n}^1\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z_n} + z_n\right)\\
&\hat{L}_n^- = \hat{O}_{L_n}^2\left(-i\frac{\partial}{\partial q_0} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} + \bar{z}_n\right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

他们满足 Virasoro 代数

$$[\hat{L}_n^\pm,\ \hat{L}_m^\pm] - (n-m)\hat{L}_{n+m}^\pm = \pm\left(\frac{D}{12}n^2 - \beta n\right)\delta_{m+n,0} \tag{2.26}$$

而

$$\hat{L}'_n = \hat{L}_n^+ + \hat{L}_n^- \tag{2.27}$$

则给出预量子化共形代数的另一个表示．

三、反常作为曲率

根据上节讨论，预量子化线丛在全纯极化 F^+ 下退化为相空间上的全纯线丛，即全纯 Fock 丛．我们知道，开弦的相空间的齐性空间 $G'=G/H$ 同胚于用G作用在给定的复结构(2.3)上得到的所有复结构的集合形成的流形．这时，G的李代数$\mathscr{G}$可分解为

$$\mathscr{G}=\mathscr{H}\otimes g' \tag{3.1}$$

其中 $\mathscr{H}$ 是H的李代数．G' 上的全纯线丛 $G'\otimes\mathscr{H}^+$ 的连络定义为[3]

$$\nabla_X\psi=\mathscr{L}_X\psi+\rho(X)\psi,\ \psi\in\mathscr{H}^+ \tag{3.2}$$

其中 $\mathscr{L}_X$ 是李导数．$\rho(X)$ 是 Toplitz 算子．对 G' 上的一个复值函数 f, $\rho(X)$ 满足

$$\rho(X)(f\psi)=f\rho(X)\psi \tag{3.3}$$

这时

$$\begin{aligned}F(X,Y)&=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla[X,Y]\\&=[\rho(X),\rho(Y)]-\rho([X,Y])\end{aligned} \tag{3.4}$$

现在情况下，若 X_n 是李代数的基，$n\neq 0$, 则

$$\rho(X_n)=\hat{L}_n^+,\ n\neq 0 \tag{3.5}$$

所以

$$F(X_n,X_m)=\left(\frac{D}{12}n^3-\beta n\right)\delta_{m+n,0} \tag{3.6}$$

这样，反常可以作为 G' 上全纯 Fock 丛的曲率．

另一方面，由于弦的重参数化不变性，我们要引入鬼场．如何用几何量子化方法处理鬼的量子化还有待于进一步探索．但在正则量子化的框架中，相应鬼的共形反常可以看作 G' 上的全纯鬼真空丛的曲率[4]

$$F^{\text{ghost}}(X_n,X_m)=-\frac{1}{6}[(6\lambda^2-6\lambda+1)n^3-(6N^2+6N+1)n]\delta_{m+n,0} \tag{3.7}$$

其中 λ 是鬼的共形量纲；N是鬼真空的级 (level)，即若用 Ω_N 表示真空，则

$$\begin{aligned}\hat{C}_n\Omega_N&=0\quad n\geqslant -N\\\hat{b}_n\Omega_N&=0\quad n\geqslant N+1\end{aligned} \tag{3.8}$$

于是，共形反常相消条件就是 G' 上的全纯 Fock 丛和全纯鬼真空丛的直积丛的曲率为零．

对反全纯的情况，(2.26) 表明共形反常与全纯的情况只相差一个符号．在另一方面，若A是全纯 Fock 丛上的连络(1, 0)形式，则 $\bar{A}$ 就是反全纯 Fock 丛上的连络(0, 1)形式．设H是 Fock 空间的 Hermite 结构，则

$$A=H^{-1}\partial H,\ \bar{A}=\bar{H}^{-1}\bar{\partial}\bar{H} \tag{3.9}$$

它们相应的曲率(1, 1)形式是

$$F=\bar{\partial}(H^{-1}\partial H),\ \bar{F}=\partial(\bar{H}^{-1}\bar{\partial}\bar{H}) \tag{3.10}$$

相应的曲率矩阵就是

$$F\cdot H=(F_{ij})\ \text{和}\ \bar{F}\cdot\bar{H}=((\bar{F})_{ij}) \tag{3.11}$$

利用

$$F\cdot H=-{}^{t}(\overline{F\cdot H}) \tag{3.12}$$

立刻有

$$\bar{F}(X_n, X_m)=\mathrm{Tr}(\bar{F}\cdot\bar{H})=-\mathrm{Tr}(F\cdot H)=-F(X_n, X_m) \tag{3.13}$$

(3.13)说明，反全纯极化下 Virasoro 代数的反常也可以看作反全纯 Fock 丛上的曲率. 另外,我们也可以引进反全纯鬼真空丛. (3.9)到(3.12)的分析表明,其曲率也与全纯鬼真空丛相差一个符号,而反常相消条件则不变.

四、与 BRST 量子化的关系

现在,我们来讨论 BRST 算子、鬼算子和反鬼算子在群G意义下的几何解释.

设 X_n, e^n 分别表示G上的左不变矢量场和左不变 1 形式的量，则作用在G上的一个 $q-1$ 形式上的外微分算子定义为

$$\begin{aligned} d\mu_{q-1}&=d\mu_{l-1}(X_{n_1},\cdots,X_{nq})e^{n_1}\wedge\cdots\wedge e^{n_q}\\ &=\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}X_{n_s}\mu_{q-1}(X_{n_1},\cdots,\widetilde{X}_{n_s},\cdots,X_{nq})e^{n_1}\wedge\cdots\wedge e^{n_q}\\ &\quad+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant q}(-1)^{s+t}\mu_{q-1}([X_{n_s},X_{nq}],X_{n_1},\cdots,\widetilde{X}_{n_s},\cdots,\\ &\quad\widetilde{X}_{n_t},\cdots X_{n_q})e^{n_1}\wedge\cdots\wedge e^{n_q} \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $\widetilde{X}_{n_s}$ 表示 X_{n_s} 不出现. 对一个左不变矢量场 X，作用在 μ_q 上的内积算子 i_X 定义为

$$i_X\mu_q=\sum_{s=1}^{q}\mu_q(X_{n_1}\cdots,X_{n_q})(-1)^{s+1}\langle X, e^{n_s}\rangle e^{n_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{e}^{n_s}\wedge\cdots\wedge e^{n_q} \tag{4.2}$$

李导数 $\mathscr{L}_X$ 定义为

$$\mathscr{L}_X=di_X+i_Xd \tag{4.3}$$

在G的任意一点 x，X_n 张成一个无穷维矢量空间 g_x，e^n 张开 g_x 的对偶空间 $\tilde{g}_x$. 类似于有限维情况[4],我们可以构造一个同构于外代数 $\Lambda(\tilde{g}_x)$ 的 Clifford 代数. 定义

$$\begin{aligned} &\delta(e^n)=i_{X_n}\\ &L(e^n)\cdot 1=e^n,\ L(e^n)e^{n_1}\wedge\cdots\wedge e^{n_s}=e^n\wedge e^{n_1}\wedge\cdots\wedge e^{n_s} \end{aligned} \tag{4.4}$$

它们满足

$$\begin{aligned} &\{\delta(e^n), L(e^m)\}=e^m(X_n)=\delta_n^m\\ &\{\delta(e^n), \delta(e^m)\}=\{L(e^n), L(e^m)\}=0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5)表明 $(\delta(e^n), L(e^m))$ 形成关于 $\tilde{g}_x$ 和 g_x 的配合的 Clifford 代数. 设G上的一个左移为

$$L_gx=gx \tag{4.6}$$

则左移所诱导的,保持(4.4)和(4.5)不变的映射是

$$\begin{aligned} &(\hat{L}_g)_*\delta(e^n)=\delta((L_g)_*e^n)=i_{(L_{g^{-1}})^*X_n}\\ &(\hat{L}_g)^*L(e^n)=L((L_g)_*e^n) \end{aligned} \tag{4.7}$$

用(4.4)，立刻可以看到，外微分算子可表为

$$d = X_n L(e^n) - \frac{1}{2} f_{mn}^{-l} L(e^n) L(e^m) \delta(e^l) \tag{4.8}$$

其中 f_{nm}^{-l} 是G的李代数的结构常数.

$$[X_n, X_m] = f_{nm}^{-l} X_l \tag{4.9}$$

取G的一个指数映射形式

$$g = \exp \beta^n X_n \tag{4.10}$$

其中 X_n 是左不变向量场．在现在情况下，g_x 的表示空间是经典的相空间 Γ，于是

$$X_n = L_n \tag{4.11}$$

这时若记

$$c^{-n} = L(e^n), \quad b_n = \delta(e^n) \tag{4.12}$$

则(4.8)可以写成

$$Q = d = L_n c^{-n} - \frac{1}{2} f_{mn}^{-l} c^{-m} c^{-n} b_l \tag{4.13}$$

由于 c^m，b_n 满足(4.5)，所以，(4.13)就是我们熟悉的经典 BRST 算子．从 (4.7) 知道，BRST 算子在G的左移作用下其形式是不变的．很明显，反鬼算子就是在G上不变的内积算子．而鬼算子几乎等价于G上的左不变 1 形式

$$\{Q, c^{-n}\} + \frac{1}{2} f_{ml}^{-n} c^{-m} c^{-l} = L(de^n + f_{ml}^n e^m e^l) = 0 \tag{4.14}$$

利用(4.5)，我们也可以写出李导数 $\mathscr{L}_{X_n}$ 的另一种形式

$$\mathscr{L}_{X_n} = \{d, i_{X_n}\} = \{Q, b_n\} = L_n + L_n^{gh.} = \hat{L}_n \tag{4.15}$$

其中

$$L_n^{gh} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{nm}^l b_l c^{-m} \tag{4.16}$$

正是鬼相空间的共形代数的生成元．文献[5]给出的代数关系

$$\begin{aligned} &\{Q, b_n\} = \tilde{L}_n, \ [\tilde{L}_n, Q] = 0 \\ &[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] = f_{mn}^{-l} \tilde{L}_{-l} \\ &[\tilde{L}_m, b_n] = f_{mn}^{-l} b_l \end{aligned} \tag{4.17}$$

事实上是下面(4.18)所给出的 d，$\mathscr{L}_X$ 和 i_X 算子之间的代数关系的另一种表示：

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_X = di_X + i_X d, \ [\mathscr{L}_X, d] = 0 \\ &[\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y] = \mathscr{L}_{[X,Y]}, \ [\mathscr{L}_X, i_Y] = i_{[X,Y]} \end{aligned} \tag{4.18}$$

对于量子化的情况，我们定义鬼真空态是[6]

$$|0\rangle_{gh.} = e^1 \wedge e^0 \wedge e^{-1} \wedge \cdots \tag{4.19}$$

这时，G的表示空间是

$$\mathscr{H} = \{|\text{phys}\rangle\} = \{f(q_0, z_n) \in \mathscr{H} \mid (\hat{O}'_{L_n} - \delta_{n_{10}} \beta) f(q_0, z_n) = 0\} \tag{4.20}$$

李代数是带有中心项的 Virasoro 代数

$$[\hat{O}^1_{L_n}, \hat{O}_{L_m}] = \hat{O}^1_{L_{n+m}} - \left(\frac{D}{12} n^3 - \beta n\right) \delta_{m+n,0} \tag{4.21}$$

类似于(4.4)的 Clifford 代数结构定义为

$$\begin{aligned}&\hat{L}(e^{n})e^{n_1}\wedge e^{n_2}\cdots|0\rangle_{gh.}=e^{n}\wedge e^{n_1}\wedge e^{n_2}\wedge\cdots|0\rangle_{gh.}.\\&\hat{\delta}(e^{n})e^{n_1}\wedge e^{n_2}\cdots|0\rangle_{gh.}=i\hat{O}^{1}_{L_n}(e^{n_1}\wedge e^{n_2}\wedge\cdots|0\rangle_{gh.})\end{aligned}\tag{4.22}$$

并满足

$$\begin{aligned}&\hat{L}(e^{n})|0\rangle_{gh.}=0,\quad n\geqslant -1\\&\hat{\delta}(e^{n})|0\rangle_{gh.}=0\quad\ \ n\geqslant 2\end{aligned}\tag{4.23}$$

和

$$\begin{aligned}&\{\hat{L}(e^{n}),\hat{\delta}(e^{m})\}=\delta^{n}_{m}\\&\{\hat{L}(e^{n}),\hat{L}(e^{m})\}=\{\hat{\delta}(e^{n}),\hat{\delta}(e^{m})\}=0\end{aligned}\tag{4.24}$$

与(3.8)比较，$|0\rangle_{gh.}=\Omega_1$，而 $\hat{L}(e^{-n})=\hat{C}^{n}$，$\hat{\delta}(e^{n})=\hat{b}_{n}$. 事实上，根据(4.22),我们有

$$\hat{L}(e^{n})e^{m}|0\rangle_{gh.}=\hat{L}(e^{n})\hat{L}(e^{m})|0\rangle_{gh.},\cdots,\tag{4.25}$$

所以,作用在 $|0\rangle_{gh.}$ 上时,G 上的 $q-1$ 形式可以写作

$$\hat{\mu}_{q-1}|0\rangle_{gh.}=\hat{\mu}_{q-1}(\hat{O}^{1}_{L_{n_1}},\cdots,\hat{O}^{1}_{L_{n_q}}):\hat{L}(e^{n_1})\cdots\hat{L}(e^{n_{q-1}}):|0\rangle_{gh.}\tag{4.26}$$

因此，在作用到 $|0\rangle_{gh.}$ 上的意义下，鬼算子 $\hat{C}^{n}=L(e^{-n})$ 相当于G上的左不变1形式. 这时,G 上的外微分定义成

$$\begin{aligned}\hat{d}\hat{\mu}_{q-1}|f\rangle=&\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\hat{O}^{1}_{n_s}\hat{\mu}_{q-1}(\hat{O}^{1}_{n_1},\cdots,\tilde{\hat{O}}^{1}_{n_s},\cdots,\hat{O}^{1}_{n_q}):\hat{C}^{-n_1}\cdots\hat{C}^{-n_q}:|f\rangle\\&+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant q}(-1)^{s+t}\hat{\mu}_{q-1}([\hat{O}^{1}_{n_s},\hat{O}^{1}_{n_t}],\hat{O}^{1}_{n_1},\cdots,\tilde{\hat{O}}^{1}_{n_s},\cdots,\tilde{\hat{O}}^{1}_{n_t}\cdots,\\&\hat{O}^{1}_{n_2}):\hat{C}^{-n_1}\cdots\hat{C}^{-n_q}:|f\rangle\end{aligned}\tag{4.27}$$

其中

$$|f\rangle=|\mathrm{phys}\rangle\otimes|0\rangle_{gh.}.\ \text{满足}\ d|f\rangle=0\tag{4.28}$$

由于 Virasoro 代数的中心项正比于 $\delta_{n_s+n_t,0}$,所以(4.27)中的 $[\hat{O}^{1}_{n_s},\hat{O}^{1}_{n_t}]$ 的作用等价于 $f^{n_2}_{n_s n_t}\hat{O}^{1}_{L_{n_l}}$. 因此,外微分算子的另一个表示是

$$\hat{Q}=\hat{O}^{1}_{L_n}\hat{C}^{-n}-\frac{1}{2}f^{l}_{nm}:\hat{C}^{-n}\hat{C}^{-m}\hat{b}_{-l}:\tag{4.29}$$

需要注意的是,由(4.27)定义的外微分满足

$$\hat{d}^{2}\mu_{q-1}|f\rangle=0\tag{4.30}$$

但(4.29)定义的 $\hat{Q}$ 不满足幂零性:

$$\hat{Q}^{2}=\frac{D-26}{12}\sum_{n=1}n^{3}:\hat{C}_{-n}\hat{C}_{n}:-\left(\frac{D-26}{12}-\beta+1\right)\sum_{n=1}^{\infty}\cdot n:\hat{C}_{-n}\hat{C}_{n}:\tag{4.31}$$

原因在于(4.29)与(4.27)定义的算子在不作用到 $|f\rangle$ 上时不等价. 因此，只有当 $D=26$，$\beta=1$ 时,(4.29)才可以看作G上的外微分算子.

现在,我们已经知道,BRST 算子 $\hat{Q}$ 可以看作G上的取表示为 $\mathscr{H}$ 时的外微分算子. 鬼算子在作用到物理态 $|f\rangle$ 上时相当G上的 Cartan-Maurer 形式

$$\left(Qc^{n}+\frac{1}{2}f^{n}_{ml}:\bar{c}^{m}c^{-l}:\right)|f\rangle=0\tag{4.32}$$

反鬼算子则是内积算子. 类似于(4.15),我们也可以写出李导数 $\mathscr{L}_{\hat{\partial}^1_{L_n}}$ 的另一个表示

$$\mathscr{L}_{\hat{\partial}^1_{L_n}} = \hat{O}^1_{L_n} + \hat{L}^{gh.}_n \tag{4.33}$$

类似于(4.17)的关系也同样可得到.

参　考　文　献

[1] 虞　跃,郭汉英,关于玻色弦的几何量子化(一),将在《高能物理与核物理》发表.

[2] M. Bowick and S. G. Rajeev, *Phys. Rev. Lett.*, 58(1987), 353; *Nucl. Phys.*, **B293**(1987), 348.
J. Mickelsson, *Commun. Math. Phys.*, **112**(1987), 653.
D. Harri, D. K. Hong, P. Ramond and V. G. Rodgers, *Nucl. Phys.*, **B294**(1987), 556.
Z. Y. Zhao, K. Wu and T. Saito, *Phys. Lett.*, **B199**(1987), 37.

[3] K. Pilch and N. P. Warner, *Class. Quant. Grav.*, 4(1987), 1183.

[4] C. Chevalley, The Algebric Theory of Spinors (Columbia Univ. Press (1954)).

[5] H. Y. Guo and K. Wu, in Proceedings of the Paris-Meudon Colloquium, 1986, ed. by H. J. de Vega and N. Scnchez, World Sci. 1987.

[6] I. B. Frenkel, H. Garland and G. J. Zucherman, *Proc. Nat'l Acad. Sci.*, (U. S. A.) 83(1986), 8442.

ON GEOMETRIC QUANTIZATION FOR BOSONIC STRING (II)

Yu Yue

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica P. O. Box 918, Beijing)

Guo Hanying

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, P. O. Box 2735, Beijing)

Abstract

The Hilbert space and the representation of the generators of Virasoro algebra for bosonic string under a holomorphic polarization are given in this paper. It is shown that the contre term of Virasoro algebra may be interpreted as curvature of a holomorphic vector bundle (holomorphic Fock bundle) on coset space $G^{11} = G/H$ where G denotes the conformal transformation group and H the one-parameter subgroup generated by the generator L_0. The condition of the conformal anomaly cancellation may be expressed as the vanishing curvature of the bundle which is obtained by the product of the holomorphic Fock bundle and the holomorphic ghost vacuum bundle. The geometric interpretations of both classical and quantized BRST operators, ghost and antighost operators are also discussed.