

SU(3) 格点规范理论的解析研究*

郑希特*† 徐勇†

* (成都科技大学, 成都)

† (西南交通大学, 成都)

摘 要

变分-累积量展开方法推广到研究 SU(3) 格点 Wilson 模型. 对序参数元格能量计算到二级展开, 四维时模型没有一级相变, 与 Monte Carlo 结果一致. 五维时有一级相变发生. 方法可用于格点理论中与 SU(3) 群有关的各种问题的解析研究.

考虑一个超立方格点上的 SU(3) 纯规范 Wilson 模型, 其作用量为

$$S = \frac{\beta}{6} \sum_p (\text{tr}U_p + \text{tr}U_p^\dagger). \quad (1)$$

这里 $U_p = \prod_{l \in P} U_l$ 为定义在元格 P 的四个链上的 $U_l \in SU(3)$ 的顺次乘积, 求和对所有元格进行. 按变分-累积量展开方法^[1]引入试探作用量

$$S_0 = \frac{1}{2} J \sum_l (\text{tr}U_l + \text{tr}U_l^\dagger). \quad (2)$$

这里求和对所有链进行. J 为变分参数, 将由最低级近似的自由能极小变分条件确定. 类似[1]作累积量展开至二级的单位链自由能 F 和作为序参数的元格平均能量 E_p 分别为

$$F = F_0 - \frac{1}{N_l} \sum_{n=1}^2 \frac{1}{n!} \left[\sum_{l=0}^{n-1} (-J)^l C_n^l \frac{\partial^l}{\partial J^l} \langle S^{n-l} \rangle_c + (-J)^n \frac{\partial^n}{\partial J^n} \ln Z_0 \right], \quad (3)$$

$$E_p = \frac{1}{3} \langle \text{tr}U_p \rangle = \frac{1}{N_p} \sum_{n=1}^2 \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_{l=0}^{n-1} (-J)^l C_n^l \frac{\partial^l}{\partial J^l} \langle S^{n-l} \rangle_c \right]. \quad (4)$$

这里

$$Z_0 = e^{-N_l F_0} = \int [dU] e^{S_0} \equiv z_0^{N_l}, \quad (5)$$

$[dU]$ 为群积分不变测度, $N_l = Md$, $N_p = \frac{1}{2} Md(d-1)$ 分别为链和元格数, M 为格点数, d 为维数. $\langle \dots \rangle_c$ 是对配分函数 Z_0 作的累积平均, 它可以通过相应的统计平均 $\langle \dots \rangle_0$ 系统地算出^[1].

在 SU(2) 群时, $\text{tr}U = \text{tr}U^\dagger$, 从而 $\text{tr}U_p = \text{tr}U_p^\dagger$, 即不必区分不同方向的元格, 而

* 国家自然科学基金资助课题.
本文 1988 年 7 月 9 日收到.

单链积分 z_0 又是一个很好的解析函数, 这样使得问题要相对简单些. 但在 $SU(3)$ 时我们必须计及元格的方向和处理好 z_0 的计算. $SU(3)$ 单链群积分

$$z_0 = \int [dU] e^{\frac{1}{2} J \text{tr}(U+U^*)}. \quad (6)$$

在[2]的基础上可以表示为回路积分^[3]或是四重求和的无穷级数^[4]. 在用于变分-累积量展开时都不方便. 最好还是直接按[2]把群元素作 Weyl 参数化后把(6)式表为一个普通的二重积分

$$z_0 = \iint_{-\pi}^{\pi} [d\phi_1 d\phi_2] e^{J[\cos\phi_1 + \cos\phi_2 + \cos(\phi_1 + \phi_2)]}. \quad (7)$$

这里略去了不影响物理的归一常数. 且

$$[d\phi_1 d\phi_2] = d\phi_1 d\phi_2 \left[\sin \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \sin \frac{2\phi_1 + \phi_2}{2} \sin \frac{\phi_1 + 2\phi_2}{2} \right]^2. \quad (8)$$

本来还可以积去一个变量, 但这样作后被积函数含无穷级数^[5]. 我们将直接用(7)式的形式, 用标准的高斯积分程序可以对给定的 J 得到所需精度的 z_0 值. 在随后的计算中要用到下列函数:

$$\begin{aligned} \omega_1 &\equiv \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial J} \ln z_0, & \omega_{21} &\equiv \langle \text{tr} U \cdot \text{tr} U^+ \rangle_0, \\ \omega_{22} &\equiv \langle \text{tr} U^2 \rangle_0, & \omega_{23} &\equiv \langle (\text{tr} U)^2 \rangle_0. \end{aligned} \quad (9)$$

它们都可以表示成与(7)式类似的二重积分而计算. 容易证明现在有 $\langle \text{tr} U \rangle_0 = \langle \text{tr} U^+ \rangle_0$, $\langle \text{tr} U^2 \rangle_0 = \langle \text{tr} U^{+2} \rangle_0 \dots$ 等.

分别用不同方向的框图表示 $\text{tr} U_p$ 和 $\text{tr} U_p^+$, 则

$$\langle S^n \rangle_c = \left(\frac{\beta}{6} \right)^n \left\langle \left[\sum_p (\square + \square) \right]^n \right\rangle_c. \quad (10)$$

据累积量展开的性质^[1], 只有联结图形才在 $\langle \dots \rangle_c$ 中有贡献. 在计算中真正要算的是联结图形的统计平均, 其相应的累积平均可以由同次和低次的统计平均和低次的累积平均得到. 在表1中列出了至二级展开的不等价图形及其统计平均值, 从而

$$\begin{aligned} F &= F_0 - \frac{d-1}{2} \sum_{n=1}^2 \frac{1}{n!} \left[\sum_{l=0}^{n-1} (-J)^l C_n^l \left(\frac{\beta}{6} \right)^{n-l} \frac{\partial^l}{\partial J^l} \sum_i \alpha_{n-l,i} \langle D_{n-l,i} \rangle_c \right. \\ &\quad \left. + (-J)^n \frac{\partial^n}{\partial J^n} \ln Z_0 \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$E_p = \sum_{n=1}^2 \frac{1}{n!} \left[\sum_{l=0}^{n-1} (-J)^l C_n^l \left(\frac{n-l}{6} \right) \left(\frac{\beta}{6} \right)^{n-l-1} \frac{\partial^l}{\partial J^l} \sum_i \alpha_{n-l,i} \langle D_{n-l,i} \rangle_c \right]. \quad (12)$$

用和 $SU(2)$ 类似的办法^[1]定 $J(\beta)$ 关系, 得到两支解: $J=0$ 和 $J=J(\beta) \neq 0$. 在 $J=0$ 时(9)式中各函数值为

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_{21} = 1, \quad \omega_{22} = 0, \quad \omega_{23} = 0. \quad (13)$$

代入(12)式即得强耦合展开的结果 $E_p = \frac{1}{18} \beta$. 和 $SU(2)$ 时一样, 强耦合展开包含在这方法的 $J=0$ 这支解中. 所以在 $\beta < 6$ 的区域我们直接用强耦合展开的结果^[6], 其一级 S_1 和二级 S_2 用虚线示于图1上. 在 $\beta \geq 6$ 的区域用 $J=J(\beta) \neq 0$ 的一支解, 在图

表 1

n	i	$D_{a,i}$	$\alpha_{a,i}$	$\langle D_{a,i} \rangle_0$
1	1	\square 或 \square	2	$3\omega_1^4$
2	1	\square 或 \square	2	$\frac{1}{8^3} \left\{ \left[\omega_{22}^2 + \omega_{23}^2 - \frac{2}{3} \omega_{22} \omega_{23} \right] \left[\frac{10}{9} (\omega_{22}^2 + \omega_{23}^2) - \frac{4}{3} \omega_{22} \omega_{23} \right] \right.$ $\left. + \left[2\omega_{22} \omega_{23} - \frac{1}{3} (\omega_{22}^2 + \omega_{23}^2) \right] \left[\frac{20}{9} \omega_{22} \omega_{23} - \frac{2}{3} (\omega_{22}^2 + \omega_{23}^2) \right] \right\}$
	2	\square	2	$1 + \frac{1}{8^3} (\omega_{21} - 1)^4$
	3	\square	$8(2d-3)$	$\omega_1^2 \omega_{21}$
	4	\square	$8(2d-3)$	$\omega_1^6 \omega_{23}$

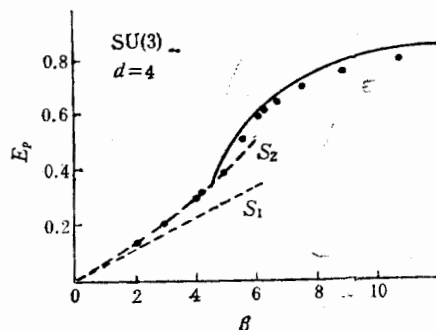


图 1

1上用实线标出展开至二级的结果,图上圆点是 Monte Carlo 的结果^[7]. 从图上可看到没有一级相变发生. 可以期望计入更高级的修正后可以使理论曲线更平滑地逼近 Monte Carlo 的结果,为 $SU(2)$ 时所显示的那样. 对五维情形我们也作了计算,在 $\beta_c = 3.72$ 处有明显的一级相变发生.

这样,变分-累积展开方法推广到了 $SU(3)$ 群,与 $SU(3)$ 群有关的格点上的各种问题可进一步尝试用这种方法处理,这正是本文的目的.

参 考 文 献

- [1] X. T. Zheng, Z. G. Tan and J. Wang, *Nucl. Phys.*, B287 (1987), 171.
- [2] C. Itzykson and J. -B. Zuber, *J. Math. Phys.*, 21 (1981), 419. M. L. Mehta, *Comm. Math. Phys.*, 79 (1981), 327.
- [3] R. Brower, P. Rossi and C. -I Tan, *Nucl. Phys.*, B190 FS3 (1981), 699.
- [4] K. E. Eriksson and N. Svartholm, *J. Math. Phys.*, 22 (1981), 2276.
- [5] 何翔皓,李铁忠,沈鼎昌,高能物理与核物理,8(1981),772.

- [6] R. Balian, J.-M. Drouffe and C. Itzykson, *Phys. Rev.*, D11 (1975), 2104.
[7] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, (1983), 79.

ANALYTIC STUDY OF $SU(3)$ LATTICE GAUGE THEORY

ZHENG XITE*† XU YONG†

*(*Chengdu University of Science and Technology, Chengdu*)

†(*Southwestern Jiaotong University, Chengdu*)

ABSTRACT

The variational-cumulant expansion method has been extended to the case of lattice $SU(3)$ Wilson model. The plaquette energy as an order parameter has been calculated to the 2nd order expansion. No 1st order phase transition in the $d=4$ case is found which is in agreement with the monte Carlo results, and the 1st order phase transition in the $d=5$ case is clearly seen. The method can be used in the study of problems in LGT with $SU(3)$ gauge group.