

# 电子直线加速器变盘模型束 流动力学的三维计算

宋忠恒 王晓敏

(中国原子能科学研究院,北京)

## 摘 要

本文采用变半径盘电荷模型作束流动力学的三维计算,给出了粒子在各向的位移及其变化速率,以及束流在各相平面的均方根发射度的大小和束流发射度图象。

## 一、问题的提出

在强流短脉冲电子直线加速器里,描述粒子运动最重要的问题是在低能区对束流空间电荷效应的处理。最初用盘电荷模型来描述束流的纵向运动<sup>[1]</sup>,即将一脉冲束流沿纵向分成若干个电荷盘,这些盘是刚性的,研究这些盘在外场和电荷盘空间电荷场的联合作用下的纵向运动。因为仅孤立地研究纵向运动,不能给出粒子横向运动的信息,且在研究纵向运动时认为盘的径向尺寸不变,也偏离实际。环电荷模型<sup>[2]</sup>可以克服这个局限性,即将注入的脉冲束流先按纵向分成若干个电荷盘,再将每个盘分成若干个同心电荷环,这些电荷环的径向尺寸是可以变化的,研究这些环在外电磁场和电荷环空间电荷场的联合作用下的纵向和横向运动,并给出各相平面上束流的均方根发射度的数值,显然是很有意义的。用环电荷模型来作粒子动力学计算,由于计算量较大,适宜在初选方案的基础上作细致的束流动力学模拟。为了克服只计算纵向运动的盘模型的局限和避免多次冗长的计算,我们在盘模型和环模型的基础上,发展了变半径盘电荷模型,简称“变盘模型”。变盘模型假定整个盘上电荷呈均匀分布,在纵向运动中盘保持刚性特征,即盘在 $z$ 向不畸变,但在径向( $r$ 方向)盘可以伸缩。研究这些盘在外电磁场和电荷盘的空间电荷场联合作用下的纵向和横向运动,并给出各相平面上束流均方根发射度的数据和发射度的图象。由于计算量适中,并保持用环电荷模型研究粒子三维运动的所有基本功能,在物理设计中可直接用来选定方案。由于跟踪的是盘片,且盘片数目没有必要取得太多,所以就细致程度以及给出的束流均方根发射度的数值来说,比起环模型来可能差一些。将环模型和变盘模型结合起来,以变盘模型为基础,然后再用环模型做精细计算,可以较快较细致地描述强流短脉冲电子直线加速器里粒子的运动。

## 二、相空间的表达式

在带电粒子加速器里, 经常用相空间的概念来描述束流的性能。束流的相空间通常称为束流的发射度。根据需要, 或用直角坐标系, 或用圆柱坐标系来描述。

在直角坐标系里相空间的定义是<sup>[3]</sup>:

$$\mathcal{E}_V = \int_V dx dp_x dy dp_y dz dp_z, \quad (1)$$

式中  $(x, p_x)$ ,  $(y, p_y)$ ,  $(z, p_z)$  分别为组成直角坐标系的三个方向的位移和动量。当位移取 cm 为单位时, (1) 式所表示的相空间的单位是  $(m_0c\text{-cm})^3$ 。在通常情况下用相平面的概念, 其表达式是

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x = \int_S dx dp_x \\ \mathcal{E}_y = \int_S dy dp_y \\ \mathcal{E}_z = \int_S dz dp_z \end{cases} \quad (2)$$

在实际应用中一般写成:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x = xp_x = \gamma\beta xx' \\ \mathcal{E}_y = yp_y = \gamma\beta yy' \\ \mathcal{E}_z = zp_z = \gamma\beta z = \frac{\lambda}{2\pi} \gamma\beta\varphi \end{cases} \quad (3)$$

式中“'”表示  $\frac{d}{dz}$ ,  $\gamma$  是相对论因子,  $\beta$  是电子的相对速度,  $\lambda$  和  $\varphi$  分别为微波的波长和相位。各相平面上束流发射度的单位是  $(m_0c\text{-cm})$ 。因为束流都是由很多粒子或粒子束团组成的, 当粒子数目足够多时, 可用统计的方法来描述发射度, 即可以将其写成均方根的形式:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x = [\overline{x^2}(\overline{\gamma\beta x'})^2 - \overline{x\gamma\beta x'}^2]^{1/2} \\ \mathcal{E}_y = [\overline{y^2}(\overline{\gamma\beta y'})^2 - \overline{y\gamma\beta y'}^2]^{1/2} \\ \mathcal{E}_z = \frac{\lambda}{2\pi} [(\overline{\gamma\beta})^2 \overline{(\beta\varphi)^2} - \overline{\gamma\beta\beta\varphi^2}]^{1/2} \end{cases} \quad (4)$$

式中:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2; \\ \overline{(\gamma\beta x')^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\gamma\beta x'_i)^2; \\ \overline{x\gamma\beta x'} &= \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(\gamma\beta x'_i) \right]^2; \end{aligned}$$

余者类推。N 是粒子总数。

因为强流短脉冲电子直线加速器各部件都是圆柱对称的,且有纵向聚焦磁场,用圆柱坐标系来描述问题更为方便。这时,粒子运动的相空间表达式可以写成下述形式:

$$\mathcal{E}_V = \int_V dr dp_r r d\theta dp_\theta dz dp_z, \quad (5)$$

式中  $(r, p_r)$ ,  $(\theta, p_\theta)$ ,  $(z, p_z)$  分别为组成圆柱坐标系的三个方向的位移和动量。各相平面的表达式为:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_r = \int_S dr dp_r \\ \mathcal{E}_\theta = \int_S r d\theta dp_\theta \\ \mathcal{E}_z = \int_S dz dp_z. \end{cases} \quad (6)$$

在实际计算时一般用下述形式:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_r = r p_r = \gamma \beta r r' \\ \mathcal{E}_\theta = r \theta p_\theta = \gamma \beta r \theta r \theta' \\ \mathcal{E}_z = z p_z = \gamma \beta z = \frac{\lambda}{2\pi} \gamma \beta \varphi, \end{cases} \quad (7)$$

其均方根的形式为:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_r = [r^2 (\gamma \beta r')^2 - r \gamma \beta r'^2]^{1/2} \\ \mathcal{E}_\theta = [(r \theta)^2 (\gamma \beta r \theta')^2 - r \theta \gamma \beta r \theta'^2]^{1/2} \\ \mathcal{E}_z = \frac{\lambda}{2\pi} [(\gamma \beta)^2 (\beta \varphi)^2 - \gamma \beta \beta \varphi^2]^{1/2}, \end{cases} \quad (8)$$

式中各量含义与(4)式类似。

可以证明:

$$r p_r = x p_x + y p_y, \quad (9)$$

或写成:

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y. \quad (9')$$

即径向相平面上的束流发射度是  $x$  向和  $y$  向相平面上束流发射度的和。

在圆柱坐标系里研究问题,不仅可以通过求解圆柱坐标系里的运动方程,给出圆柱坐标系各相平面上束流发射度的数据,而且可以利用圆柱坐标系和直角坐标系间的关系,在求解运动方程的基础上求出  $\mathcal{E}_x$  和  $\mathcal{E}_y$ ,以便和通常的束流诊断结果相比较。

### 三、粒子运动方程

研究粒子动力学需求解粒子运动方程,计算束流发射度也必须先求解粒子运动方程。圆柱坐标系里的粒子运动方程在用无量纲的纵向坐标  $\xi = z/\lambda$  作变量时,其各向分量的运动微分方程的表达式为:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\xi} &= -\lambda \mathcal{E}_z \sin \varphi + \lambda \mathcal{E}_{zsc} \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= 2\pi \left( \frac{1}{\beta_p} - \frac{1}{\beta} \right) \\ \frac{d^2 r}{d\xi^2} + \frac{(\gamma\beta)'}{\gamma\beta} \frac{dr}{d\xi} + \frac{\lambda^2}{\gamma\beta} \left[ \frac{\mathcal{B}_z^2}{4\gamma\beta} - \frac{\pi \mathcal{E}_z}{\lambda} \left( \frac{1}{\beta_p \beta} - 1 \right) \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\lambda\beta} \frac{d\mathcal{E}_z}{d\xi} \sin \varphi \right] r - \frac{\lambda^2}{\gamma\beta^2} \mathcal{E}_{rsc} - \frac{\lambda^2 \mathcal{B}_{zk}^2}{4(\gamma\beta)^2} \frac{r_k^4}{r^3} = 0 \\ \frac{d\theta}{d\xi} &= \frac{\lambda}{2\gamma\beta} \left( \mathcal{B}_z - \frac{r_k^2}{r^2} \mathcal{B}_{zk} \right), \end{aligned} \right. \quad (10)$$

式中

$$\mathcal{B}_z = \frac{eB_z}{m_0c}; \quad \mathcal{B}_{zk} = \frac{eB_{zk}}{m_0c}; \quad \mathcal{E}_z = \frac{eE_z}{m_0c^2}; \quad \mathcal{E}_{zsc} = \frac{eE_{zsc}}{m_0c^2}; \quad \mathcal{E}_{rsc} = \frac{eE_{rsc}}{m_0c^2};$$

$E_z$  是微波场;  $B_z$  为外加轴向聚焦磁场;  $B_{zk}$  为电子枪阴极处磁场;  $r_k$  为粒子在阴极处的径向位置;  $E_{zsc}$  和  $E_{rsc}$  分别为电荷盘空间电荷场的  $z$  向和  $r$  向分量;  $\beta_p$  是相速。

一个半径为  $r$  的电荷盘感受到另一个半径为  $b$  的电荷盘的空间电荷场的  $z$  向和  $r$  向的平均场表示式为:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{E}_{zsc} &= \frac{2q}{\pi\epsilon_0 a^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\beta_{0s} \frac{b}{a}\right) J_1\left(\beta_{0s} \frac{r}{a}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right) \beta_{0s}^2 J_1^2(\beta_{0s}) \left(\frac{r}{a}\right)} e^{-\beta_{0s}|z'|/a} \\ \bar{E}_{rsc} &= \frac{2q}{\pi\epsilon_0 a^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\beta_{0s} \frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right) \beta_{0s} J_1^2(\beta_{0s})} \\ &\quad \left[ \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^2} \int_0^{r/a} J_1\left(\beta_{0s} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) d\left(\frac{r}{a}\right) \right] e^{-\beta_{0s}|z'|/a} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

式中,  $J_1(x)$  是一阶贝塞尔函数;  $\beta_{0s}$  是零阶贝塞尔函数的第  $s$  个根;  $a$  是束流通道半径;  $q$  是电荷盘的电量;  $|z'|$  表示源盘和观察盘之间的  $z$  向距离。(11)式是没考虑相对论效应的场表式,在计算时我们考虑了力的相对论变换。

在(11)式中,如果令源盘半径  $b = r_i$ , 观察盘半径  $r = r_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  是电荷盘数。在(11)式的求和号前加一个求和号  $\sum_{i=1}^N$ , 即为  $N$  个电荷盘作用在观察盘  $r_j$  上的空间电荷场的总和。若再加一个求和号  $\sum_{j=1}^N$ , 即可求出  $N$  个电荷盘作用在任一个观察盘上的空间电荷场的总和。

#### 四、计算结果

加速器物理设计的任务是确定有关组件的几何尺寸及电磁参数,以及在这样外界条件下粒子的动力学特性。也就是通常所说的束流能散度和束流发射度,或者可以统称为束流发射度,因为能散度可认为是纵向相平面的束流发射度。本文以  $L$ -带电子直线加速器的低能区为例,在统一的电荷模型的基础上作三维粒子动力学计算,通过解三维粒

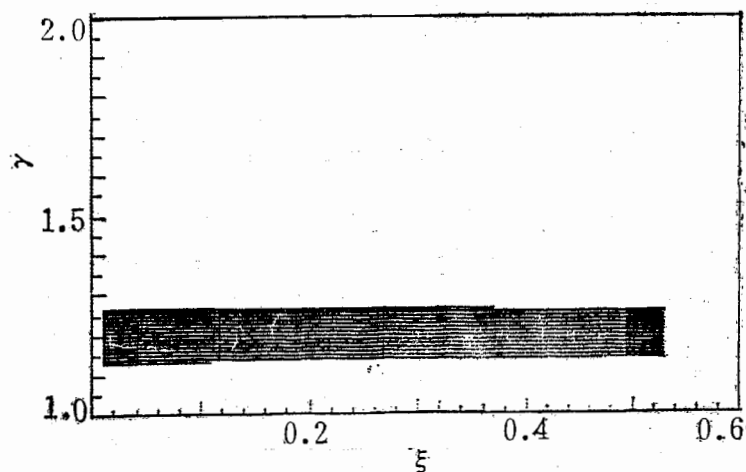


图1 能量相对论因子随距离的变化

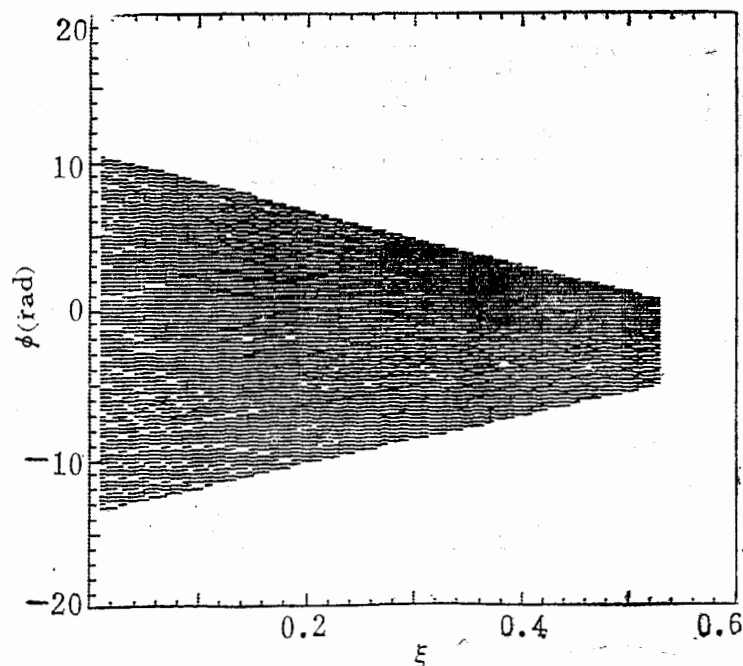


图2 束团的相聚图示

子动力学方程, 给出粒子在各向的位移及其变化速率, 并给出这些粒子束团在各相平面的束流均方根发射度的大小和发射度的图形。

对于一束 100keV, 3ns, 3A 的脉冲束流, 经过一个  $L$ -带的 12 分频腔, 在调制缝隙电场强度为 1.4MV/m 的情况下, 当磁场强度在 150cm 的长度上由 0.015T 缓慢增加到 0.035T 时, 计算结果如图 1—图 6 所示。

图 1 表示能量的变化, 因为是小信号调制, 各电荷盘能量的变化不大, 各电荷盘间的能量差异表示束团能散度的大小。

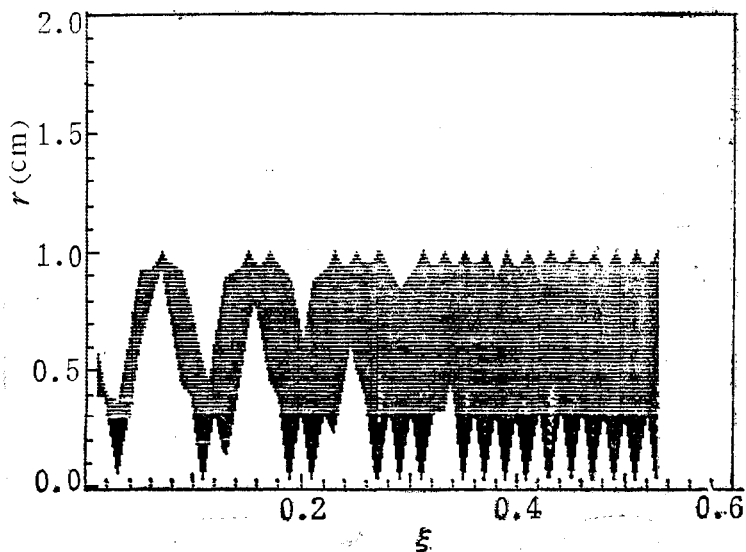


图 3 束团半径随距离的变化

图 2 表示束流相位的变化, 从图上可以看出, 通过小信号调制, 经过 150cm 的漂移, 束团相宽从  $\sim 120^\circ$  聚到  $\sim 30^\circ$ , 束团相宽压缩到初始相宽的四分之一。

图 3 表示束团的径向变化, 电荷盘的起始半径为 1cm, 发散角取  $20'$ 。从图上可以看出, 束团的最大径向位移在束流通行所允许的范围里。在一些地方, 束团的发散角较大。

图 4 到图 6 表示束团在各相平面上的发射度图象和均方根值的大小。人们最感兴趣的是径向发射度, 由于是盘片模型, 所示数值是指束团的边缘粒子。仔细调节磁场, 可以改善径向发射度。束团在作纵向和径向运动的同时还沿  $\theta$  方向旋转, 从计算结果的分析可知, 其旋转周期随轴向磁场而异。

将环模型应用于同样条件下的计算<sup>[2]</sup>, 各数据并无太大差别, 只是在将盘片数增加到足够多时, 相应的环的数目也够多了, 在纵向运动方面两者有一定的差异, 说明环模型在

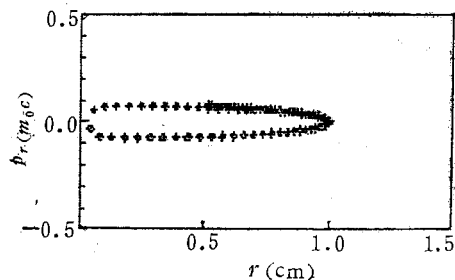


图 4 径向发射度

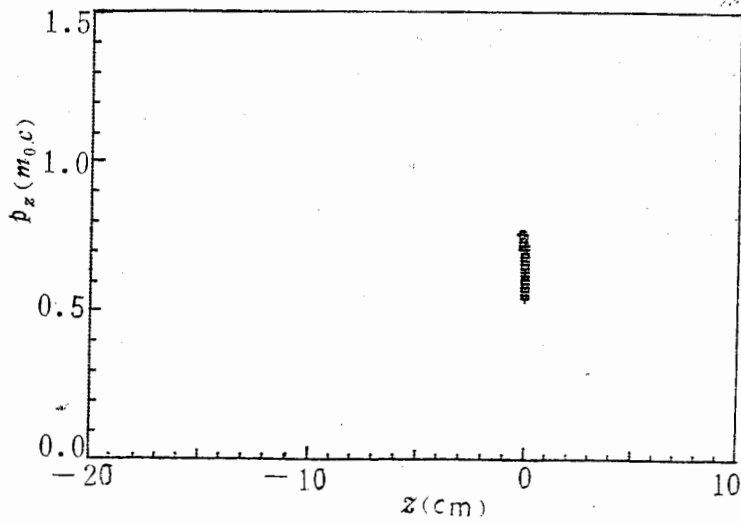
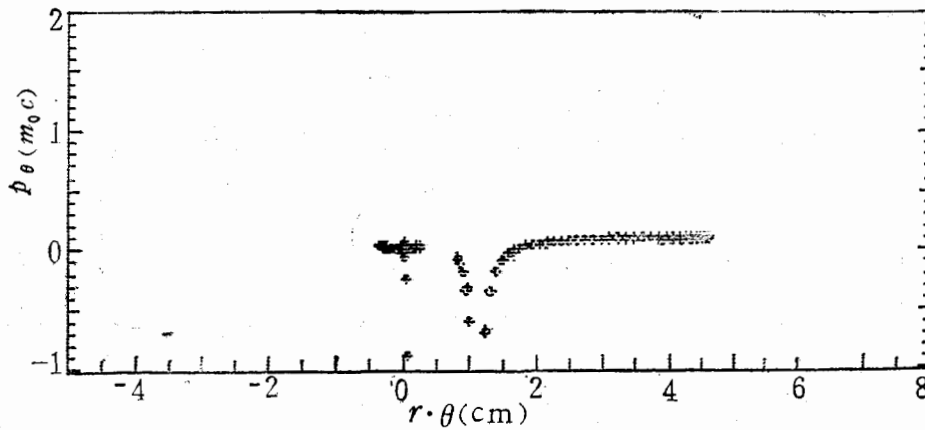


图5 纵向发射度

图6  $\theta$ 相平面发射度

描述纵向运动时更细致。所以,在实际设计中,先用变盘模型作方案选定,然后再用环模型作细致的模拟。

## 参 考 文 献

- [1] C. B. Williams and M. H. MacGregor, IEEE Trans., NS-14, No. 3, (1967), 581.
- [2] 王晓敏、宋志恒,电子直线加速器束流动力学计算的三维理论和程序,《强激光与粒子束》。(待发表)
- [3] P. M. Lapostolle et al., Linear Accelerators, B. 1.2, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1970.

## THREE-DIMENSIONAL DYNAMIC CALCULATION OF CHARGE DISC WITH VARIABLE RADIUS OF ELECTRON LINAC

SONG ZHONGHENG, WANG XIAOMIN

*(Institute of Atomic Energy, Beijing)*

### ABSTRACT

In this paper, charge discs with variable radius are used in three-dimensional calculation for displacement and divergence of charged particles in all directions of motion, as well as the RMS emittance and emittance picture of the bunch in all phase planes.