第14卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 3
1990年3月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 1990

快报

一个1+1维格点$U(1)$规范模型的准确求解

郑 波 郭硕鸿
(中山大学物理系，广州)

摘 要

本文准确求解了一个 1+1 维格点 $U(1)$ 规范模型. 结果显示格点规范模型具有正确的连续极限.

一、引 言

格点规范理论的连续极限问题是一个根本问题. 在纯规范场方面，郭硕鸿等人用变分法对 2+1 维格点规范理论进行了较深人的研究，取得一定进展[1]. 含费米场情形，人们对格点 Schwinger 模型进行Monte Carlo 模拟,得到一些结果[2]. 此外，作者通过求解准确解,也对格点 Schwinger 模型的连续极限进行了探讨[3,4]. 但是,到目前为止,我们仍没有完全可靠的结论.

近来,作者提出并求解了一个非相对论性的 1+1 维 $U(1)$ 规范模型[5]. 本文则准确求解了这一模型相应的格点规范模型. 结果显示格点规范模型具有正确的连续极限，本文是格点规范理论现有的唯一的完全严格可解的例子，对格点规范理论的进一步研究十分有益.

二、模型及基态

我们采用哈密顿体系,设相应于参考文献[5]中提出的 1+1 维 $U(1)$ 规范模型的格点规范模型的哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}e^2a\sum_x E(x)^2+\frac{F}{a^2}\sum_x :\bar{\phi}(x)(2\phi(x)-U(x,1)\phi(x+1)-U(x,-1)\phi(x-1)):, \tag{2.1}$$

其中 e 为实的耦合常数，a 为格距，F 为大于零的实参数，$U(x,\pm1)$ 为格点规范理论中通常定义的规范场，$E(x)$ 为电场，$U(x,\pm1)$ 和 $E(x)$ 满足对易关系

本文 1989 年9月9日收到.

$$[U(x,1),E(x)]=U(x,1),\quad [U(x,-1),E(x-1)]=-U(x,-1),\tag{2.2}$$

$\psi(x)$ 和 $\psi^+(x)$ 为两分量费米场，

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta^+(x)\end{pmatrix},\qquad \psi^+(x)=(\xi^+(x)\quad \eta(x)),\tag{2.3}$$

满足反对易关系

$$\{\xi(x),\xi^+(x)\}=1,\quad \{\eta(x),\eta^+(x)\}=1,\tag{2.4}$$

γ_0 取为

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\tag{2.5}$$

而正规乘积“:……:”则只对(2.3)式定义的费米场产生消灭算子作用．事实上，H也可以重写为

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}e^2a\sum_x E(x)^2+\frac{F}{a^2}\sum_x(\xi^+(x)-\xi^+(x+1)U(x+1,-1))\\ &\cdot(\xi(x)-U(x,1)\xi(x+1))+\frac{F}{a^2}\sum_x(\eta^+(x)-U(x,1)\eta^+(x+1))\\ &\cdot(\eta(x)-\eta(x+1)U(x+1,-1)).\end{aligned}\tag{2.6}$$

只要注意到这里 $\psi'(x)$ 和 $\psi^+(x)$ 含有 $\sqrt{a}$ 因子，不难明白，在经典连续极限下，H趋于参考文献[5]中 1+1 维 $U(1)$ 规范模型的哈密顿量．此外，我们必须指出，对这一模型，我们的格点化方案在自由粒子情形没有加倍问题．

我们定义 $|0\rangle$态为

$$E(x)|0\rangle=0,\ \xi(x)|0\rangle=0,\ \eta(x)|0\rangle=0.\tag{2.7}$$

易见

$$H|0\rangle=0,\tag{2.8}$$

即$|0\rangle$为H的能量为零本征态．又因为

$$\begin{aligned}&E(x)^+=E(x),\\ &(\xi(x)-U(x,1)\xi(x+1))^+=(\xi^+(x)-\xi^+(x+1)U(x+1,-1)),\\ &(\eta(x)-\eta(x+1)U(x+1,-1))^+=(\eta^+(x)-U(x,1)\eta^+(x+1)),\end{aligned}\tag{2.9}$$

所以H正定，即$|0\rangle$为H的基态．

三、能谱及连续极限

由于H具有规范不变性，我们只需考虑双费米子态的能谱．一般地，规范不变、空间平移不变的状态为

$$|E\rangle=\sum_{x,n}f_E(n)\xi^+(x)U(x,n)\eta^+(x+n)|0\rangle,\tag{3.1}$$

其中

$$U(x,n)=\begin{cases}\prod\limits_{i=0}^{n-1}U(x+i,1) & n>0\\ \prod\limits_{i=0}^{-(n-1)}U(x-i,\ -1) & n<0.\end{cases}\tag{3.2}$$

要求 $|E\rangle$ 为H的能量本征态，即

$$H|E\rangle=E|E\rangle,\tag{3.3}$$

由(2.6)及(3.1)式不难导出 $f_E(n)$ 满足的方程为

$$f_E(n+1)+f_E(n-1)=\frac{2\left(|n|+\dfrac{8F}{e^2a^3}-\dfrac{2E}{e^2a}\right)}{\dfrac{8F}{e^2a^3}}f_E(n).\tag{3.4}$$

对比贝塞尔函数递推关系

$$B_{\nu+1}(z)+B_{\nu-1}(z)=\frac{2\nu}{z}B_\nu(z),\tag{3.5}$$

我们得到(3.4)式的通解为[3]

$$f_E(n)=\begin{cases}f_E^{(+)}(n) & n\geqslant 0\\ f_E^{(-)}(n) & n\leqslant 0,\end{cases}\tag{3.6}$$

$$f_E^{(+)}(n)=\lambda_1^+J_{\nu_n}(z)+\lambda_2^+Y_{\nu_n}(z),$$

$$f_E^{(-)}(n)=\lambda_1^-J_{\nu_{-n}}(z)+\lambda_2^-Y_{\nu_{-n}}(z),$$

其中 $J_\nu(z)$、$Y_\nu(z)$ 分别为第一、二类贝塞尔函数，$\lambda_i^\pm$ 与n无关，

$$z=8F/(e^2a^3),\quad \nu_{\pm n}=\pm n+z-2E/(e^2a).\tag{3.7}$$

利用 $f_E(n)$ 有限性条件，可得

$$\lambda_2^\pm=0,\tag{3.8}$$

所以

$$f_E(n)=\begin{cases}\lambda_1^+J_{\nu_n}(z) & n\geqslant 0\\ \lambda_1^-J_{\nu_{-n}}(z) & n\leqslant 0.\end{cases}\tag{3.9}$$

对于偶宇称态，由$n=0$及$n=1$处解的连接条件，

$$\lambda_1^+=\lambda_1^-,\tag{3.10}$$

能谱由 $\partial_zJ_{\nu_0}(z)$ 的零点方程决定:

$$\partial_zJ_{\nu_0}(z)=0.\tag{3.11}$$

对于奇宇称态，

$$\lambda_1^+=-\lambda_1^-,\tag{3.12}$$

能谱由 $J_{\nu_0}(z)$ 的零点方程决定:

$$J_{\nu_0}(z)=0.\tag{3.13}$$

现在讨论连续极限. 事实上，$na=L$ 为有限值，$a\to 0$ 时 $J_{\nu_{\pm n}}(z)$ 的渐近行为是[6]

$$J_{\nu_{\pm n}}(z)\sim\phi\left((\nu_{\pm n}-z)\Big/\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3}\right)$$

$$\sim \phi\left(\left(\pm na - \frac{2E}{e^2}\right)\Big/\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right), \tag{3.14}$$

其中 $\phi(x)$ 为 Airy 函数. 所以,当 $a \to 0$,

$$f_E(n) \sim \begin{cases} \lambda_1^+ \phi\left(\left(na - \frac{2E}{e^2}\right)\Big/\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right) & n \geqslant 0 \\ \lambda_1^- \phi\left(\left(-na - \frac{2E}{e^2}\right)\Big/\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right) & n \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

与连续理论一致[5]. 相应地,(3.11)和(3.13)式可改写为

$$\phi'\left(-\frac{2E}{e^2}\Big/\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right) = 0, \tag{3.16}$$

$$\phi\left(-\frac{2E}{e^2}\Big/\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right) = 0, \tag{3.17}$$

即能谱也有正确的连续极限.

四、结果与讨论

(1)我们构造了相应于参考文献[5]中提出的 1 + 1 维 $U(1)$ 规范模型的格点规范模型. 我们的格点规范模型在自由粒子情形没有加倍问题. 进一步, 我们求解了格点规范模型的能谱及相应本征态,结果表明格点规范模型具有正确的连续极限.

(2)在本文的基础上,我们有希望通过改变格点规范模型的哈密顿量, 研究格点规范理论的普适性问题.

参　考　文　献

[1] Guo S. H., Zheng W. H. and Liu J. M., *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 2591; Guo S. H. and Zheng W. H., *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 3144.

[2] O. Martin and S. Otto, *Nucl. Phys.*, **B203**(1982), 297.

[3] 郑波和郭硕鸿,高能物理与核物理,**13**(1989),696.

[4] 郑波,高能物理与核物理,**13**(1989),778;郑波,高能物理与核物理,**13**(1989),860.

[5] 郑波和郭硕鸿,高能物理与核物理,**14**(1990),152.

[6] G. N. Watson, Theory of Bessel function (University Press, Cambridge, 1944).

A SOLVABLE (1+1)-DIMENSIONAL LATTICE $U(1)$ GAUGE MODEL

ZHENG BO　GUO SHUOHONG

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou)

ABSTRACT

A (1 + 1)-dimensional lattice $U(1)$ gauge model is solved exactly and the result shows that this model has correct continuum limit.