

## 二维 Heisenberg 反铁磁系统中的 正则变换和自旋波

苏刚 牛云  
(兰州大学物理系)

### 摘 要

本文给出了二维 Heisenberg 反铁磁系统中的正则变换。在此变换下发现二维 Heisenberg 反铁磁模型在连续极限下是具有拓扑项的  $O(3)$  非线性  $\sigma$  模型。由于在选取正则变量时有很大的不确定性,因此还不能判定此系统是否确有拓扑项存在。最后对正则变换的物理意义进行了研究,发现它体现了系统自旋的集体激发,表明存在着一种自旋波。

对一维各向同性的反铁磁量子自旋链, Haldane<sup>[1]</sup> 和 Affleck<sup>[2]</sup> 已经做了仔细地研究。Haldane 认为一维 Heisenberg 反铁磁模型在连续场论下可由  $O(3)$  非线性  $\sigma$  模型来描述,而 Affleck 在选取不同的正则变量的情况下证明了在 Haldane 的结果中附加有拓扑项。最近,葛墨林和牛云<sup>[3]</sup> 发现 Affleck 结果中的拓扑项可通过一个联系正则动量和正则坐标的正则变换得到。高孝纯等人<sup>[4]</sup> 也独立地找到了类似的正则变换。由于正则变换不改变系统的基本性质,我们将此变换推广到二维情形,发现此变换下的二维 Heisenberg 反铁磁模型在连续极限下仍然是具有拓扑项的  $O(3)$  非线性  $\sigma$  模型。从正则变换可得到拓扑项的事实表明,给了一个以正则变量表示的哈密顿,在选取正则变量时有很大的不确定性,正是这种性质的存在使我们不能从上述哈密顿推断拓扑项是否确实存在。拓扑项的出现必有其更深刻的物理原因。所以,从我们的讨论中还不能完全断定二维情形下是否真含有拓扑项。不过二维量子 Heisenberg 模型确实是非线性  $\sigma$  模型<sup>[5]</sup>。我们的讨论给出了从量子模型过渡到连续极限下的一种实现途径,其结果也是有意义的。最后,我们对此变换的物理本质进行了讨论,发现它反映了系统中自旋位置的疏密变化,是一种集体激发模式,说明该系统中存在着一种自旋波。实际上,这种自旋波由自旋的量子涨落引起,但它却隐含在正则变换中,说明此变换体现了该系统的内部特征。

考虑二维各向同性 Heisenberg  $S = \frac{1}{2}$  反铁磁模型的哈密顿量

$$H = \sum_{n,m} S_{n,m} \cdot (S_{n+1,m} + S_{n,m+1}) \quad (1)$$

其中最近邻耦合取为 1.  $S_{n,m}$  满足

$$\begin{aligned} S_{n,m}^2 &= S(S+1) \\ \{S_{n,m}^a, S_{n',m'}^b\} &= \epsilon^{abc} S_{n,m}^c \delta_{mm'} \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (2)$$

这里  $S$  是总自旋量子数. 类似于 Haldane<sup>[1]</sup> 的研究办法, 我们将  $S_{n,m}$  在球坐标表象中写出

$$S_{n,m} = (-1)^{n+m} \sqrt{S(S+1)} \left( (1 - Q_{n,m}^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi_{n,m}, (1 - Q_{n,m}^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi_{n,m}, Q_{n,m} \right) \quad (3)$$

其中  $Q_{n,m} = \cos \theta_{n,m}$ .

考虑到系统中自旋有小量子涨落,  $Q_{n,m}$  和  $\varphi_{n,m}$  可表示为

$$Q_{n,m} = Q(x, y) - (-1)^{n+m} a^2 \pi_\varphi / \sqrt{S(S+1)} \quad (4a)$$

$$\varphi_{n,m} = \varphi(x, y) + (-1)^{n+m} a^2 \pi_Q / \sqrt{S(S+1)} \quad (4b)$$

$\pi_\varphi$  和  $\pi_Q$  是分别对应于  $\varphi$  和  $Q$  的正则动量, 它们满足下列对易关系

$$\{\varphi, Q\} = \{\pi_\varphi, \pi_Q\} = 0 \quad (5a)$$

$$\{\varphi(x, y), \pi_\varphi(x', y')\} = \{Q(x, y), \pi_Q(x', y')\} = \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (5b)$$

对二维正方点阵,  $x = y = na$ ,  $a$  是晶格常数. 在连续极限下, 将(2)–(5)代入(1), 遂有

$$H = \int dx dy \left\{ \frac{gc}{2} \left[ (1 - Q^2) \pi_Q^2 + \frac{\pi_\varphi^2}{1 - Q^2} \right] + \frac{c}{2g} [(\partial_x Q)^2 + (\partial_y Q)^2] \right\} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} Q &= \left( (1 - Q^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, (1 - Q^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi, Q \right) \\ g &= \frac{2a}{\sqrt{S(S+1)}}, \quad c = (2S + 1)a \end{aligned} \quad (7)$$

将文献[3]中正则动量的正则变换推广到二维情形, 我们得到

$$\pi_\varphi \rightarrow \tilde{\pi}_\varphi = \pi_\varphi + K \partial_x Q + k \partial_y Q \quad (8)$$

$$\pi_Q \rightarrow \tilde{\pi}_Q = \pi_Q - k \partial_x \varphi - k \partial_y \varphi$$

$k$  是调节参数. 变换后的正则动量和正则坐标满足

$$\{\varphi, Q\} = \{\tilde{\pi}_\varphi, \tilde{\pi}_Q\} = 0 \quad (9)$$

$$\{\varphi, \tilde{\pi}_\varphi\} = \{Q, \tilde{\pi}_Q\} = \delta(x - x) \delta(y - y')$$

由此可见, 变换(8)保证了 Poisson 括号不变. 或者说变换后相应的对易关系仍然维持. 可以证明, 变换后的运动方程形式不变. 同时, 相空间的体积和动量密度在此变换下也保持不变

$$\int d\varphi dQ d\pi_\varphi d\pi_Q = \int d\varphi dQ d\tilde{\pi}_\varphi d\tilde{\pi}_Q \quad (10)$$

$$\tilde{p} = \tilde{\pi}_\varphi \nabla \varphi(x, y) + \tilde{\pi}_Q \nabla Q(x, y) = p$$

因而变换(8)是正则的.

相应于正则变换(8)的导引函数是

$$dF = (\tilde{\pi}_\varphi - \pi_\varphi) d\varphi + (\tilde{\pi}_Q - \pi_Q) dQ \quad (11)$$

由于我们是在系统中某一格点上的自旋子空间中处理问题, 因此有

$$d\varphi = \dot{\varphi} dt, \quad dQ = \dot{Q} dt \quad (12)$$

将(8)和(12)代入(11),不难得到

$$dF = -k\mathbf{\Omega} \cdot [(\partial_t\mathbf{\Omega} \times \partial_x\mathbf{\Omega}) + (\partial_t\mathbf{\Omega} \times \partial_y\mathbf{\Omega})] dt \quad (13)$$

系统的总导引函数是

$$F_{\text{total}} = -k \int dx dy d\mathbf{\Omega} \cdot [(\partial_t\mathbf{\Omega} \times \partial_x\mathbf{\Omega}) + (\partial_t\mathbf{\Omega} \times \partial_y\mathbf{\Omega})] \quad (14)$$

相应地,哈密顿量(6)成为

$$H = \int dx dy \left\{ \frac{gc}{2} \left[ (1 - \Omega^2)(\tilde{\pi}_\rho + k(\partial_x + \partial_y)\varphi)^2 + \frac{(\tilde{\pi}_\varphi - k(\partial_x + \partial_y)\Omega)^2}{1 - \Omega^2} \right] + \frac{c}{2g} [(\partial_x\mathbf{\Omega})^2 + (\partial_y\mathbf{\Omega})^2] \right\} \quad (15)$$

与此相对应的 Lagrangian 密度是

$$\mathcal{L} = \frac{c}{2g} (\partial_\mu\mathbf{\Omega})^2 + k\mathbf{\Omega} \cdot [(\partial_t\mathbf{\Omega} \times \partial_x\mathbf{\Omega}) + (\partial_t\mathbf{\Omega} \times \partial_y\mathbf{\Omega})], \quad (16)$$

$$x^\mu = (ct, x, y)$$

可见,上式正是附加了拓扑项的  $O(3)$  非线性  $\sigma$  模型,其中右边第二项就是对应的拓扑荷.我们看到二维情形下的拓扑荷比一维情形多了由  $y$  分量引起的一项.因此,在上述正则变换下二维 Heisenberg 反铁磁模型在连续场论下仍是具有拓扑项的  $O(3)$  非线性  $\sigma$  模型.然而,正如我们前面所讲的,对于由正则变量表示的正则系统来讲,正则变量的选取具有很大的自由度.由于这种自由度的存在,使得最后结果可能具有不唯一性.因此,在二维 Heisenberg 反铁磁系统中是否确实存在着拓扑项,从我们上面的研究中还不能做出肯定的判断,这也是利用正则变换研究问题时存在的缺憾.

下面我们来研究一下正则变换所拥有的物理意义.将(8)式代入(4)式,我们发现在此正则变换下自旋变量的相应坐标也发生了变化

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x \\ y &\rightarrow y - (-)^{n+m} ka^2/\sqrt{S(S+1)} \end{aligned} \quad (17)$$

由于拓扑荷的量子化性质,调节参数  $k$  必取  $\frac{1}{g}$  的整数倍,也就是说,  $k$  按  $\frac{1}{g}$  量子化.当

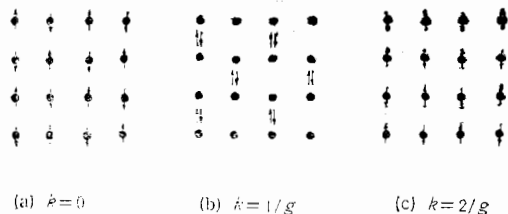


图1 正则变换(8)中隐含的自旋集体激发模式

整个体系中的自旋位置疏密变化,这种自旋的集体激发模式就形成了一种自旋波,如图1所示.实际上,上述图象是连续化近似在二维 Heisenberg 反铁磁系统中的必然结果.这也同时说明了正则变换(8)反映了系统中的内部特征.

$k$  取  $\frac{1}{g}$  的奇数倍时,由(17)可知相邻格点上的自旋从相反方向平移(无自旋翻转)而重合配对(图1(b));当  $k$  取  $\frac{1}{g}$  的偶数倍时,相邻格点上的自旋彼此交换其位置(图1(c)).因此(17)式给出了如下简明物理图象:在连续化近似下,随着自旋的量子涨落,相邻格点上的自旋要么配对,要么交

最后, 我们应该指出, 二维 Heisenberg 反铁磁系统是二维非线性  $O(3)$   $\sigma$  模型。在此模型中, 存在着(或者说隐含着)某种“规范”自由度, 这种“规范”特性可能对低温下  $O(3)$  非线性  $\sigma$  模型的性质有着重要的影响。我们对此进行了初步研究, 发现其行为比较复杂, 需要进行更深入的讨论。由于本文篇幅所限, 对上述研究我们将在另文中给出。

作者感谢葛墨林教授的热情指导。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1153.
- [ 2 ] I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 408.
- [ 3 ] M. L. Ge and Y. Niu, *Kexuetongbao*, **34**(1989), 1131; *J. Phys. A*, to be published.
- [ 4 ] 高孝纯等, *高能物理与核物理*, **13**(1989), 526.
- [ 5 ] E. Manousakis et al., *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 1310.

## THE CANONICAL TRANSFORMATION AND THE SPIN WAVE IN TWO DIMENSIONAL HEISENBERG ANTIFER- ROMAGNETIC SYSTEM

SU GANG NIU YUN

(Department of Physics, Lanzhou University)

### ABSTRACT

The canonical transformation in two dimensional Heisenberg antiferromagnetic system is given in this paper. It is found that under this transformation the 2D Heisenberg antiferromagnetic model is the nonlinear  $O(3)$   $\sigma$  model with a topological term in the continuum limit. Since there exists a large uncertainty when one chooses the canonical variables, it is not completely concluded that whether the topological term really occurs in this system. Finally, the physical meaning of the canonical transformation is also investigated, and it is found that it corresponds to the collective excitations of system spins, i.e., a kind of spin waves exists in this case.