

e^+e^- 反应中共振截面的辐射修正

陈凤至* 王平* 吴济民* 朱永生

(中国科学院高能物理研究所, 北京)

摘 要

本文导出了 e^+e^- 对撞实验中产生的共振态的辐射修正截面的近似解析公式。对于 Z^0 粒子和 $J/\psi, \Upsilon$ 家族的粒子, 在确定这些共振态参数的实验扫描能量范围内, 该解析近似的精度达到 0.1% 量级。利用解析近似公式与对撞束能量分辨函数的卷积拟合实验观测到的共振截面数据, 可得到比当前普遍采用的 Jackson, Scharre 方法更准确的共振参数值。

一、引 言

许多重要的粒子如 $Z^0, J/\psi, \Upsilon$ 家族粒子都可在 e^+e^- 对撞束中产生。为了精确地测定它们的共振参数如质量、衰变宽度等, 必须精确地处理初态 e^+e^- 的光子辐射对共振截面的修正效应。E. Kuraev 和 V. Fadin 提出的结构函数方法^[1,2]可正确地处理这类辐射修正问题, 其精度好于 0.1%。依据他们的方法, 辐射修正截面可表述为

$$\sigma(s) = \int dx \sigma_B(s(1-x)) F(x, s) \quad (1)$$

式中 \sqrt{s} 是 e^+e^- 对撞束的质心系总能量, $\sigma_B(s)$ 是截面的玻恩近似形式, 而

$$F(x, s) = \beta x^{\beta-1} \left[1 + \frac{3}{4} \beta - \frac{\beta^2}{24} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_c^2} + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] \cdot (k \text{ 因子}) \\ - \beta \left(1 - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{8} \beta^2 \left[4(2-x) \ln \frac{1}{x} - \frac{1+3(1-x)^2}{x} \right. \\ \left. \times \ln(1-x) - 6 + x \right] \quad (2)$$

其中

$$\beta = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{s}{m_c^2} - 1 \right).$$

对于矢量耦合和轴矢量耦合如 $J/\psi, \psi', \Upsilon, Z^0$, $(k \text{ 因子}) = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right)$, 对应于 $\sin^2 \theta_W = 0.25$.

本文 1989 年 12 月 5 日收到。

* CCAST 成员。

式(2)给出的 $F(x, s)$ 中, 第一项为软光子的贡献, 第二、三两项是硬光子的贡献, 后者只计算到 β^2 项.

本文讨论共振截面, 故 $\sigma_B(s)$ 为 Breit-Wigner 函数

$$\sigma_B(s) = \frac{12\pi\Gamma_{ee}\Gamma_f}{(s-M^2)^2 + \Gamma^2 M^2}, \quad (3)$$

式中 M 和 Γ 为共振的质量和总宽度, Γ_{ee} 和 Γ_f 是共振衰变到 e^+e^- 道和 f 道末态的部分宽度. 如果共振是 e^+e^- 通过光子耦合产生的, 如 J/ψ 和 Y 粒子, 则 Γ_{ee} 定义为它的实验观测值 $(\Gamma_{ee})_{exp}$, 以将真空极化的贡献包含在内^[3].

将(2)(3)两式代入(1)作积分, $F(x, s)$ 中的头两项解析可积^[4,5]而第三项的积分得不到解析表式. 因第三项包含奇点函数 $\ln \frac{1}{x}$, 它的积分值与第二项积分值的大小可以相比拟, 故不能略去.

本文给出辐射修正共振截面的解析近似. 对 e^+e^- 对撞实验, 在确定如 $J/\psi, Y, Z^0$ 这些粒子的共振参数所要求的适当扫描能量范围内, 该解析近似的精度达到 0.1% 量级. 与目前普遍使用的 Jackson, Scharre 方法^[6]对比, 我们的公式更为精确.

二、 $F(x, s)$ 的推导

我们从结构函数的途径重新推导 $F(x, s)$, 与文献[1]的推导相比, 差异仅在于数学技巧不同.

e^+e^- 湮没的截面为

$$\sigma(s) = \iint dx_1 dx_2 D_{e^-}(x_1, s) D_{e^+}(x_2, s) \sigma_B(x_1 x_2 s) \cdot (k \text{ 因子}) \quad (4)$$

其中 $D_{e^- (+)}(x, s)$ 是分布函数, 它满足 Lipatov 方程^[7]

$$D_{e^- (+)}(x, s) = \delta(1-x) + \int_{m_c^2}^s \frac{ds'}{s'} \frac{\alpha(s')}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P(z) D_{e^- (+)}\left(\frac{x}{z}, s'\right)$$

式中

$$\alpha(s') = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{s'}{m_c^2}}$$

$$P(z) = \frac{1+z^2}{1-z} - \delta(1-z) \int_0^1 \frac{1+x^2}{1-x} dx.$$

求解该方程需通过 Mellin 变换. 作逆变换后, 有

$$D_{e^- (+)}(x, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} dn x^{-n} \cdot \exp \left\{ 2\eta \left[\frac{3}{4} - C - \ln n - \frac{1}{2(n+1)} \right] + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l}}{2l} \left(\frac{1}{n} \right)^{2l} \right\}$$

式中 C 是 Euler 常数, B_{2l} 是伯努利数, 而

$$\eta = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_c^2}$$

根据公式

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{x^{-n}}{n^j} dn = \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{j-1}}{\Gamma(j)}$$

可导出

$$\begin{aligned} D_{e^{-(+)}}(x, s) = e^{2\eta \left(\frac{3}{4}-C\right)} & \left\{ \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{2\eta-1}}{\Gamma(2\eta)} + \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{2\eta}}{\Gamma(2\eta+1)} \cdot (-\eta) \right. \\ & + \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{2\eta+1}}{\Gamma(2\eta+2)} \left[\eta(1+B_2) + \frac{\eta^2}{2} \right] + \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{2\eta+2}}{\Gamma(2\eta+3)} \\ & \left. \times \left[-\eta - \eta^2(1+B_2) - \frac{\eta^3}{6} \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

然后将 $\left(\ln \frac{1}{x}\right)^a$ 作级数展开

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^a & = \left[(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{3}(1-x)^3 + \dots \right]^a \\ & = (1-x)^a \cdot \left\{ 1 + \frac{a}{2}(1-x) + \left(\frac{5a}{24} + \frac{a^2}{8}\right)(1-x)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{a}{8} + \frac{5a^2}{48} + \frac{a^3}{48}\right)(1-x)^3 + \dots \right\} \end{aligned}$$

采用文献[1]中的下述代换:

$$\eta = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{s}{m_c^2} \rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln \frac{s}{m_c^2} - 1 \right) = \frac{\beta}{4}$$

在 $D_{e^{-(+)}}(x, s)$ 中加入虚 e^+e^- 对的贡献

$$\frac{\beta}{2} (1-x)^{\frac{\beta}{2}-1} \left[-\frac{\beta^2}{288} \left(2 \ln \frac{s}{m_c^2} - 15 \right) \right]$$

并将伯努利数 B_2 的值代入求出函数 $D_{e^{-(+)}}(x, s)$:

$$\begin{aligned} D_{e^{-(+)}}(x, s) & = \frac{\exp\left(-\frac{\beta c}{2} + \frac{3\beta}{8}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)} \left\{ \frac{\beta}{2} (1-x)^{\frac{\beta}{2}-1} \left[1 - \frac{\beta^2}{288} \left(2 \ln \frac{s}{m_c^2} - 15 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + (1-x)^{\frac{\beta}{2}} \left(-\frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{8} \right) + (1-x)^{\frac{\beta}{2}+1} \right\} \end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{\beta}{4} - \frac{3\beta^2}{16} \right) + \dots \}.$$

把 $D_{e^{-(+)}}(x, s)$ 的表式代入(4)并与(1)式对照,求得 $F(x, s)$ 的 x 展开式表述

$$F(x, s) = x^{\beta-1} \cdot \beta \left[1 + \frac{3}{4} \beta - \frac{\beta^2}{24} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_e^2} + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] \cdot (k \text{ 因子}) \\ + x^\beta \left(-\beta - \frac{\beta^2}{4} \right) + x^{\beta+1} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{3}{8} \beta^2 \right) + O(x^{\beta+2}\beta^2) \quad (5)$$

值得注意的是,省略的项都高于 $x^{\beta+2} \cdot \beta^2$, 保留的项则系数中都含有 β , 由于 $x < 1, \beta < 1$, 故省略的是高阶小量. 保留的三项中,第一项与(2)中的软光子项相同, (2)中的硬光子项与 x 很小时我们的表达式(5)的第二、三两项等价. 注意到 $x^\beta = 1 + \beta \ln x$, $x^{\beta+1} = x + \beta x \ln x$ 以及 $\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots\right)$, 立即可证明这一点. 当(1)式中 $\sigma_B(s(1-x))$ 取为(3)式描述的 Breit-Wigner 截面, 它的峰值位于 $x_{\text{imp}} = 1 - M^2/s$. 在实验中总是在共振质量附近的能区作扫描, 故 x_{imp} 总是一个小量. 我们关于 $F(x, s)$ 的表式(5)在这种情形下非常有利于对共振作辐射修正处理.

三、辐射修正截面的解析近似

利用式(5),共振态的辐射修正截面表述为

$$\sigma(s) = \int_0^1 \frac{12 \pi \Gamma_{ee} \Gamma_f}{[s(1-x) - M^2]^2 + M^2 \Gamma^2} dx \cdot \\ \times \left\{ x^{\beta-1} \beta \left[1 + \frac{3}{4} \beta - \frac{\beta^2}{24} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_e^2} + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] \cdot (k \text{ 因子}) \right. \\ \left. + x^\beta \left(-\beta - \frac{\beta^2}{4} \right) + x^{\beta+1} \left(\frac{\beta}{2} - \frac{3}{8} \beta^2 \right) + \dots \right\} \quad (6)$$

积分上限 1 对应于正(或负)电子的全部能量转化为辐射光子的能量. 如文献[4]所阐明的, 该积分中的第一项 ($x^{\beta-1}$ 项) 解析可积. 为此只需利用关系式(当 $\nu < 2$)

$$\nu \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{x^2 + 2ax \cos \theta + a^2} dx = a^{\nu-2} \frac{\pi \nu \sin[(1-\nu)\theta]}{\sin \theta \sin \pi \nu}.$$

上式积分上限为 ∞ , 为了将此式用于(6)(积分上限 1), 必须将从 1 到 ∞ 的这部分积分值扣除:

$$\int_0^1 \frac{\beta x^{\beta-1}}{[s(1-x) - M^2]^2 + M^2 \Gamma^2} dx = \frac{1}{s^2} a^{\beta-2} \phi(\cos \theta, \beta) \\ + \frac{\beta}{s^2} \left\{ \frac{1}{\beta-2} + \frac{2(s-M^2)}{(\beta-3)s} + \frac{3(s-M^2)^2 - M^2 \Gamma^2}{(\beta-4)s^2} \right\},$$

其中

$$a^2 = \left(1 - \frac{M^2}{s} \right)^2 + \frac{M^2 \Gamma^2}{s^2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{a} \left(\frac{M^2}{s} - 1 \right)$$

$$\phi(\cos \theta, y) = \frac{\pi y \sin [\theta(1-y)]}{\sin \theta \sin \pi y}. \quad (7)$$

类似地可求得(6)式中 x^β 项的积分:

$$\int_0^1 \frac{x^\beta}{[s(1-x) - M^2]^2 + M^2 \Gamma^2} dx = \frac{1}{(1+\beta)s^2} a^{\beta-1} \phi(\cos \theta, \beta+1) \\ + \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{1}{\beta-1} + \frac{2(s-M^2)}{(\beta-2)s} + \frac{3(s-M^2)^2 - M^2 \Gamma^2}{(\beta-3)s^2} \right\}.$$

为了对(6)式中 $x^{\beta+1}$ 项求积, 考虑到 $\beta \leq 0.11$ (对 Z^0 粒子), 作近似 $x^{\beta+1} \approx x$, 则

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta+1} dx}{[s(1-x) - M^2]^2 + M^2 \Gamma^2} \approx \frac{1}{s^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+2a \cos \theta + a^2}{a^2} \right. \\ \left. - \operatorname{ctg} \theta \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{1+a \cos \theta}{a \sin \theta} - \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right].$$

于是辐射修正截面式(6)变为

$$\sigma_{SE}(s) = \frac{12 \pi \Gamma_{ee} \Gamma_f}{s^2} \left\{ (1+\delta) \left[a^{\beta-2} \phi(\cos \theta, \beta) + \beta \left(\frac{1}{\beta-2} + \frac{2(s-M^2)}{(\beta-3)s} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{3(s-M^2)^2 - M^2 \Gamma^2}{(\beta-4)s^2} \right) \right] - \beta \left(1 + \frac{\beta}{4} \right) \left[\frac{1}{1+\beta} a^{\beta-1} \phi(\cos \theta, \beta+1) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\beta-1} + \frac{2(s-M^2)}{(\beta-2)s} + \frac{3(s-M^2)^2 - M^2 \Gamma^2}{(\beta-3)s^2} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{3}{8} \beta^2 \right) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+2a \cos \theta + a^2}{a^2} - \operatorname{ctg} \theta \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{1+a \cos \theta}{a \sin \theta} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] \right\} \quad (8)$$

其中

$$(1+\delta) = (k \text{ 因子}) + \frac{3}{4} \beta - \frac{\beta^2}{24} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_e^2} + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right). \quad (9)$$

$\sigma_{SE}(s)$ 即为辐射修正共振截面的解析近似式。为了检验它的精度, 我们将它与严格截面 $\sigma_{KF}(s)$ 比较, 后者由式(2)的 $F(x, s)$ 和式(3)的 Breit-Wigner 截面代入方程(1)求出,

$$\sigma_{KF}(s) = \int_0^1 \frac{12 \pi \Gamma_{ee} \Gamma_f dx}{[s(1-x) - M^2]^2 + M^2 \Gamma^2} \\ \cdot \left\{ \beta x^{\beta-1} \left[1 + \frac{3}{4} \beta - \frac{\beta^2}{24} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_e^2} + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] \cdot (k \text{ 因子}) \right. \\ \left. - \beta \left(1 - \frac{x}{2} \right) + \frac{\beta^2}{8} \left[4(2-x) \ln \frac{1}{x} + \frac{1+3(1-x)^2}{x} \right] \right\}$$

$$\times \ln \frac{1}{1-x} - 6 + x \Big\} \quad (10)$$

(10)式用 CERN 程序库子程序 DGAUSS 数值求积。对于大括号中的第一项,在用高斯法求积之前,为消除 $x^{\beta-1}$ 在 $x=0$ 处的奇点,必须先做分部积分。作为比较,我们给出辐射修正共振截面的其它三种近似表述。其一是 J/ψ 和 Υ 共振实验数据分析中普遍采用的软光子近似

$$\sigma_{\text{soft}} = \int \frac{12 \pi \Gamma_{ee} \Gamma_f dx}{[s(1-x) - M^2]^2 + M^2 \Gamma^2} \cdot \left\{ \beta x^{\beta-1} \left[1 + \frac{3}{4} \beta - \frac{\beta^2}{24} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_c^2} + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] \cdot (k \text{ 因子}) \right\} \quad (11)$$

与(10)式比较,它只保留了积分核中的第一项。第二种近似是 Cahn 建议的^[4]

$$\sigma_{\text{Cahn}} = \int_0^1 \frac{12 \pi \Gamma_{ee} \Gamma_f dx}{[s(1-x) - M^2]^2 + M^2 \Gamma^2} \cdot \left\{ \beta x^{\beta-1} \left[1 + \frac{3}{4} \beta - \frac{\beta^2}{24} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{s}{m_c^2} + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] \cdot (k \text{ 因子}) - \beta \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right\} \quad (12)$$

该近似略去了(10)式积分核硬光子部分中的 β^2 项,剩余的项在 $(0, \infty)$ 解析可积, Cahn^[4] 给出了相应的解析表达式。为了精确起见,(12)式中我们扣除了 $(1, \infty)$ 那部分积分,仍利用 DGAUSS 作数值积分。第三种近似是解析近似(8)式的简化形式:

$$\sigma_{\text{sim}} = \frac{12 \pi \Gamma_{ee} \Gamma_f}{s^2} \left\{ (1 + \delta) a^{\beta-2} \phi(\cos\theta, \beta) + \left(-\beta + \frac{3}{4} \beta^2 \right) a^{\beta-1} \phi(\cos\theta, \beta + 1) \right\} \quad (13)$$

对于 $J/\psi, \Upsilon$ 这类窄共振, σ_{sim} 已经达到相当好的精度。

辐射修正共振截面的近似表式 $\sigma_{\text{soft}}, \sigma_{\text{Cahn}}, \sigma_{\text{sim}}, \sigma_{\text{SE}}$ 对于严格表式 σ_{KF} 的误差用下式表示

$$\begin{aligned} E_1 &= 1 - \frac{\sigma_{\text{soft}}}{\sigma_{\text{KF}}} & E_2 &= 1 - \frac{\sigma_{\text{Cahn}}}{\sigma_{\text{KF}}} \\ E_3 &= 1 - \frac{\sigma_{\text{sim}}}{\sigma_{\text{KF}}} & E_4 &= 1 - \frac{\sigma_{\text{SE}}}{\sigma_{\text{KF}}} \end{aligned} \quad (14)$$

误差的计算结果见图1。从图1(a)到图1(d),四条曲线在共振质量处都出现极小。这是由于在共振质量附近,软光子项对截面的贡献占主要地位,而硬光子辐射的贡献可以忽略。 σ_{soft} 和 σ_{Cahn} 与严格截面 σ_{KF} 有相同的软光子项,而在 $\sigma_{\text{SE}}, \sigma_{\text{sim}}$ 中,软光子项的积分的解析近似达到了很高的精度。共振峰越窄,在共振能量附近软光子项的贡献越大。故对很窄的峰如 J/ψ 和 Υ , 极小值是下降很深的谷;而对宽共振如 Z^0 和 ϕ' , 极小值附近变化相对地比较平缓。图1(a)中曲线 $|E_1|$ 在高于共振质量的某一能量处出现误差值达到零的深谷,这是由于 E_1 在该能量处改变符号。

由图可见, 我们的解析近似表式 σ_{SE} 有最好的精度; 即使它的简化形式 σ_{sim} , 与 σ_{KF} 的一致性也比 σ_{soft} 、 σ_{cahn} 为好. 对宽共振 Z^0 , ϕ'' 粒子, 在扫描能区 ($M-4\Gamma$, $M+4\Gamma$) 内, σ_{SE} 的误差小于 0.1%. 对窄共振如 J/ψ , Υ , 实验扫描能区一般不大于 $(M-10\Delta, M+20\Delta)$, Δ 是对撞束质心系总能量能散度标准偏差. 图 1 (b) (c) 中, 对 J/ψ , $\Delta = 0.88$ MeV 相应于北京正负电子对撞机的数值; 对 Υ , $\Delta = 8$ MeV 取自于 DESY DORIS. 在这样的扫描范围内 σ_{SE} 的误差 $< 0.1\%$ (J/ψ) 和 $< 0.13\%$ (Υ).

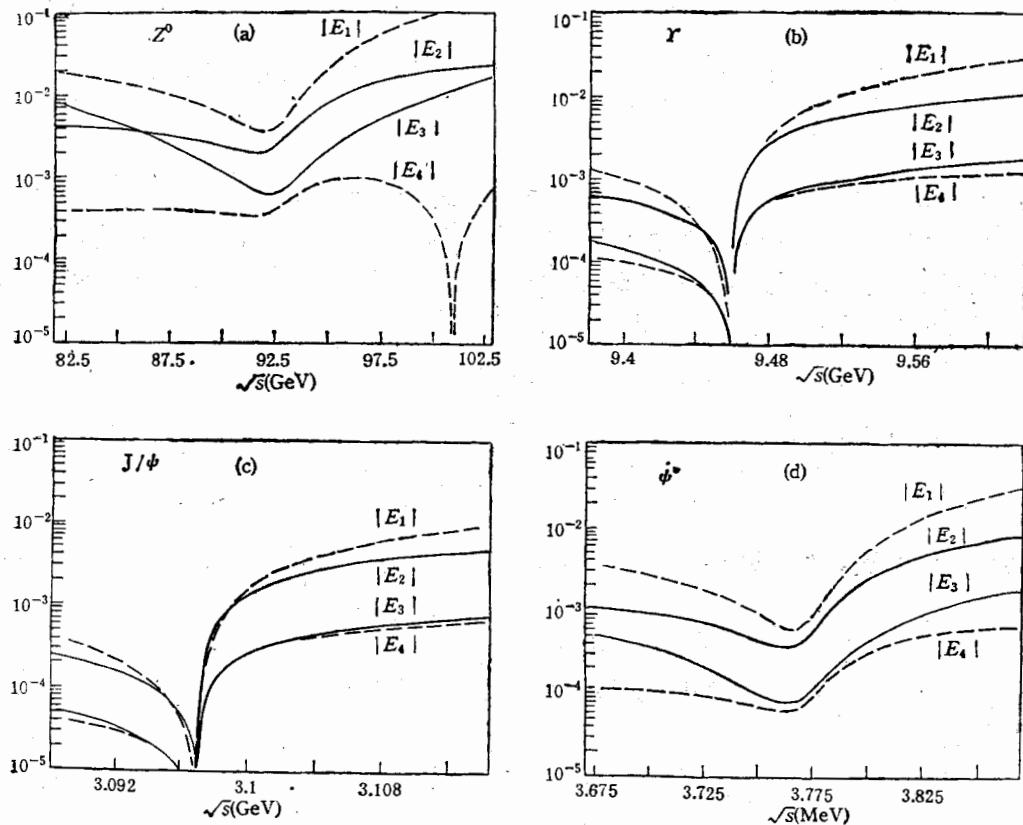


图 1 辐射修正共振截面 σ_{soft} , σ_{cahn} , σ_{sim} 和 σ_{SE} 的误差绝对值 $|E_1|$, $|E_2|$, $|E_3|$, $|E_4|$. 定义见式(14).

$$M_Z = 92.4 \text{ GeV}, M_\Upsilon = 9.4603 \text{ GeV}, M_{J/\psi} = 3.0969 \text{ GeV}, M_{\phi''} = 3.7699 \text{ GeV}$$

$$\Gamma_Z = 2.6 \text{ GeV}, \Gamma_\Upsilon = 0.052 \text{ MeV}, \Gamma_{J/\psi} = 0.068 \text{ MeV}, \Gamma_{\phi''} = 25 \text{ MeV}$$

四、实验共振截面

本节讨论窄共振 J/ψ , Υ 实验观测截面中的辐射修正的处理. 这类实验的特点是共振宽度 Γ 比 Δ 小得多. 实验测量到的共振截面等于截面(1)与能量分辨函数 $G(W, W')$ 的卷积

$$\sigma_{exp}(W) = \int_0^\infty G(W, W') \sigma(W') dW' \quad (15)$$

式中 W 为 e^+e^- 对撞束质心系总能量, $G(W, W')$ 一般取高斯函数

$$G(W, W') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp\left[-\frac{(W - W')^2}{2\Delta^2}\right]$$

σ_{exp} 称为实验共振截面.

将解析近似 σ_{SE} 代入(15)式中的 $\sigma(W')$, 求积分得到 $\sigma_{\text{exp}}(W)$. 实际上, 简化表式 σ_{sim} 的精度已达 0.1% (J/ψ) 和 0.2% (Y). 将 σ_{sim} 代入(15)中的 $\sigma(W')$ 导出

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{obs}}(W) = 12\pi\Gamma_{\text{ee}}\Gamma_f \int_0^\infty dW' \cdot G(W, W') \cdot \frac{1}{W'^4} \\ \cdot \left\{ (1 + \delta)a^{\beta-2}\phi(\cos\theta, \beta) + \left(\frac{3}{4}\beta^2 - \beta\right)a^{\beta-1}\phi(\cos\theta, \beta + 1) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

式中 a , $\cos\theta$ 和 $\phi(\cos\theta, x)$ 见式(7), δ 定义如式(9)而 $\sqrt{s} = W'$.

迄今为止 e^+e^- 实验观测到的窄共振截面大多用 Jackson 和 Scharre 提出的方法分析拟合^[6]. 他们的原文中对辐射修正的处理有误, 但可依据 Kuraev, Fadin 的工作加以改正, 结果实验共振截面可表示为

$$\sigma_{\text{JS}} = (1 + \delta) \int_{-\infty}^\infty dW' \sigma_B(W') G_R(W, W'), \quad (17)$$

其中 G_R 是辐射修正能量分辨函数

$$G_R(W, W') = \left(\frac{2\Delta}{W}\right)^\beta \frac{1}{\Delta} F\left(\frac{W - W'}{\Delta}, \beta\right).$$

当 $G(W, W')$ 取高斯函数时, $F(z, \beta)$ 有以下形式

$$F(z, \beta) = \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/4} D_{-\beta}(-z),$$

式中 $D_{-\nu}(x)$ 是 Weber 抛物柱面函数. 而且许多实验数据分析时对 Breit-Wigner 公式作 δ 函数近似

$$\sigma_B(W) \simeq \frac{12\pi^2\Gamma_{\text{ee}}\Gamma_f}{\Gamma M} \delta(W^2 - M^2),$$

于是实验共振截面进一步简化为

$$\sigma_\delta(W) = \frac{6\pi^2\Gamma_{\text{ee}}\Gamma_f}{\Gamma M^2} \left(\frac{2\Delta}{W}\right)^\beta \frac{1}{\Delta} F\left(\frac{W - M}{\Delta}, \beta\right) (1 + \delta). \quad (18)$$

为了清楚地显示 $\sigma_\delta, \sigma_{\text{JS}}$ 与 σ_{obs} 的差别, 定义误差

$$E_\delta = 1 - \frac{\sigma_\delta}{\sigma_{\text{obs}}}, \quad E_{\text{JS}} = 1 - \frac{\sigma_{\text{JS}}}{\sigma_{\text{obs}}}. \quad (19)$$

对 J/ψ 和 Y , 其误差绝对值 $|E_\delta|$ 和 $|E_{\text{JS}}|$ 的曲线见图 2. 由图可见, 低于共振质量的能区内, σ_δ 明显偏离 σ_{obs} ; 而 σ_{JS} 在 $(M - 10\Delta, M + 20\Delta)$ 范围内的最大误差为 4.2% (Y) 和 1.4% (J/ψ). 图中出现误差等于 0 的深谷对应于 E 符号的改变. 因此 Breit-Wigner 函数的 δ 函数近似导致了实验共振曲线形状的明显畸变.

为了将辐射修正导致的实验共振截面的系统不确定性减少到 0.2% 以下, 应当用式

(16) σ_{obs} 来拟合实验数据;将辐射修正截面 σ_{SE} 代入(15)计算出 σ_{exp} 的值,不确定性可进一步减少到 0.1% 左右. 一维积分在高速电子计算机上用现成的数值积分程序计算只占用很少的 CPU 时间. 利用 σ_{obs} 的另一个好处是该公式对任意值的 Γ, Δ 都适用,而 σ_{δ} 只能用于 $\Gamma \ll \Delta$ 的情形. 此外,当共振峰的扫描点数足够多,分布比较合理,且数据有足够好的统计性,利用 σ_{obs} 可同时得到 Γ_{ee}, Γ 的拟合值;而利用 σ_{δ} 拟合实验数据只能给出乘积 $\Gamma_{ee}\Gamma_f/\Gamma$.

作为一个例子,利用 LENA 组测定的 $e^+e^- \rightarrow Y \rightarrow$ 强子的共振截面数据^[8],给出不同的实验共振截面公式的拟合结果. LENA 组利用 Greco 的实验共振截面公式^[9]

$$\sigma_G(W) = \frac{6\pi^2\Gamma_{ee}\Gamma_f}{\Gamma M^2} \left(\frac{2\Delta}{W}\right)^\beta \frac{1}{\Delta} F\left(\frac{W-M}{\Delta}, \beta\right)(1+\varepsilon), \quad (20)$$

$$\varepsilon \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{17}{36}\right) + \frac{13}{12}\beta.$$

上式与 $\sigma_{\delta}(W)$ 只差一个常数乘因子. 用 σ_G 拟合实验数据求得 $\Gamma_{ee}\Gamma_h/\Gamma$, 再由 $Y \rightarrow \mu\mu$ 和 $Y \rightarrow$ 强子的事例数之比求得 $B_{\mu\mu} = \Gamma_{\mu\mu}/\Gamma$. 这里已假定了 e, μ, τ 的普适性,即 $\Gamma_{ee} = \Gamma_{\mu\mu} = \Gamma_{\tau\tau}$, 并且 $\Gamma_{ee}\Gamma_h/\Gamma = \Gamma_{ee}(1 - 3B_{\mu\mu})$. 故可立即求出 Γ_{ee} 的拟合值. LENA 组报道的 Y 共振参数 $\Gamma_{ee}, B_{\mu\mu}$, 列于表 1 的第一行. 我们用相同的方法拟合数据并重复了他们的结果. 表 1 其余各行列出了我们用 $\sigma_{\delta}, \sigma_{\delta}^{orig}, \sigma_{JS}, \sigma_{obs}$ 截面公式拟合同一组数据得到的共振参数值. 其中利用 $\sigma_{\delta}, \sigma_{\delta}^{orig}$ 的 $\Gamma_{ee}\Gamma_h/\Gamma$ 拟合值并代入 LENA 测定的 $B_{\mu\mu}(=3.5\%)$ 算出 Γ_{ee} 的数据;而利用 σ_{JS} 和 σ_{obs} 则同时拟合出了 Γ_{ee} 和 $B_{\mu\mu}$. 这里 σ_{δ}^{orig} 是 Jackson、Scharre 原文^[6]中采用的早先曾普遍使用的实验共振截面公式.

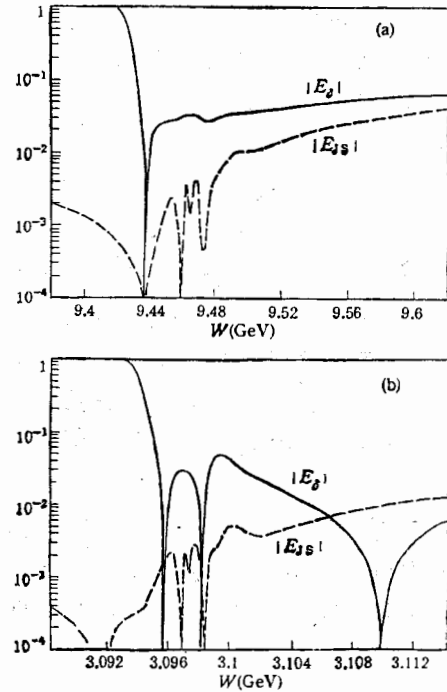


图 2 实验共振截面 $\sigma_{\delta}, \sigma_{JS}$ 的误差 E_{δ}, E_{JS} 的绝对值
(a) 对应于 Y , (b) 对应于 J/ψ . 共振参数与图 1 相同
 $\Delta_{J/\psi} = 0.88 \text{ MeV}, \Delta_r = 8 \text{ MeV}$, 扫描能量范围 $(M - 10\Delta, M + 20\Delta)$

表 1 LENA $Y(1s)$ 数据用不同的实验共振截面公式拟合的共振参数值

截面公式	Γ_{ee} (keV)	$B_{\mu\mu}(\%)$
σ_G	1.23 ± 0.10	3.5 ± 1.4
σ_{δ}^{orig}	1.178 ± 0.090	3.5
σ_{δ}	1.283 ± 0.097	3.5
σ_{JS}	1.272 ± 0.050	3.22 ± 1.11
σ_{obs}	1.274 ± 0.054	3.23 ± 1.11

由表可知, σ_G 和 σ_s^{orig} 的 Γ_{ee} 拟合值与精确的 σ_{obs} 拟合值分别有 3.5% 和 7.5% 的偏差; 而改正后的公式 σ_s 的拟合值偏差要小得多. σ_{JS} 与 σ_{obs} 的拟合结果相一致, 而且有较小的拟合误差. 同时, σ_{JS} , σ_{obs} 拟合 $e^+e^- \rightarrow Y \rightarrow$ 强子共振截面得到的 $B_{\mu\mu}$ 值 (3.2 ± 1.1) 与 LENA 组结合 $e^+e^- \rightarrow Y \rightarrow$ 强子和 $e^+e^- \rightarrow Y \rightarrow \mu\mu$ 数据求出的 $B_{\mu\mu}$ 值 (3.5 ± 1.4) 合理地一致.

五、结 论

我们给出了辐射修正共振截面的解析近似表达式 σ_{SE} , 对于 $J/\psi, Y$ 粒子族和 Z^0 粒子, 在实验扫描所要求的适当能区内, 其精度为 0.1% 量级. 为拟合窄共振态的实验数据, 必须考虑束流能量分散, 建议以 σ_{obs} 或 σ_{exp} (σ_{SE} 代入其中的 $\sigma(w')$) 作为实验共振截面的理论模型. 这时辐射修正效应的精度达到 0.1% 量级, 且可由 $e^+e^- \rightarrow \text{Resonance} \rightarrow$ 强子的实验数据同时得到共振态质量、总宽度和部分宽度等参数.

在完成第二节里的公式推导中我们得到了 E. Kuraev 的热诚帮助; 作者之一(王平)应邀访问了 Novosibirsk Inst. of Nucl. Physics, 并在那里完成了第二节中的部分计算; 张家文在计算机程序工作方面给以协助, 在此一并致谢.

参 考 文 献

- [1] E. A. Kuraev and V. S. Fadin, *Sov. J. Nucl. Phys.*, 41(1985), 466.
- [2] G. Altarelli and G. Martinelli, Yellow Report CERN 86-02 (1986) 47; O. Nicosini and L. Trentadue, *Phys. Lett.*, **B196** (1987), 551.
- [3] T. S. Tsai, SLAC-PUB-3129 (1983).
- [4] R. N. Cahn, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 2666.
- [5] F. A. Berends et al., CERN-TH 5468 (1989).
- [6] J. D. Jackson and Scharre, *Nucl. Instrum. Methods*, **128** (1975), 13.
- [7] L. N. Lipatov *Yad. Fiz.*, **20**(1974), 181.
[*Sov. J. Nucl. Phys.*, **20**(1975), 94].
- [8] B. Niczyporuk et al., (LENA) *Phys. Rev. Lett.*, **46**(1981), 92; DESY 80/53 (1980).
- [9] M. Greco et al., *Phys. Lett.*, **56B** (1975), 367; *Nucl. Phys.*, **B101** (1975), 234.
W. Buchmuller and S. Cooper, MIT-LNS-159 (1987).

RADIATIVE CORRECTION OF THE RESONANT CROSS SECTION IN e^+e^- COLLISION

CHEN FENGZHI WANG PING WU JIMIN ZHU YONGSHENG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing*)

ABSTRACT

An approximate analytical expression for the radiatively corrected cross section of the resonances in e^+e^- collision has been derived with the accuracy to the order of 0.1% for the Z boson as well as the J/ψ and Υ family particles within the experimentally scanned energy range. It is recommended using this analytical expression to treat the resonances which have to be folded with the accelerator beam energy spread in the experimental data analysis. This provides an alternative to the previous method of Jackson and Scharre. It possesses much higher accuracy.