第14卷 第9期 1990年9月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol. 14, No. 9 Sept., 1990

么正最小模型的聚合与辫子矩阵的明显表示

侯伯宇　石康杰　岳瑞宏
(西北大学现代物理所，西安)

摘　要

本文利用 Feigin-Fuch 积分法明显地导出了么正最小模型的聚合和辫子矩阵，证明了 D-F 超方程的解是存在的.

共形不变的二维量子场论与二维统计的临界现象描述，超弦场论有着密切的联系，这方面的研究取得了许多有益的进展[1-4]. 在有理共形场论中，一个重要的问题是理论的分类，讨论分类的方法有二：一是 Witten 提出的几何法[5,6]. 出发点是 Chern-Simons 理论与有理共形场论的联系. 另一是 Ms 和 GG[7,8] 提出的代数法，通过讨论有理共形场的对偶性，运用 Fusion 规则和 Polynomial 方程完成对有理场的分类，对于任意一个有理共形场论，总可以联系到一个新的量子对称性这种对称性自然地含有 Fusion 规则和 Polynomial 方程.

对于任一 Kac-Moody 代数 g，人们总可以通过 Sugawara 构造联系到一个 Virasoro 代数 L_n^g，具有中心项 C_g. 给定一个代数 g 和一个子代数 h，GKO[9]指出算子 $K_n = L_n^g - L_n^h$ 生成了一个新的 Virasoro 代数并具有中心项 $C = C_g - C_h$. 最小模型是一个最简单的陪集模型：$SU_K(2)\otimes SU_1(2)/SU_{K+1}(2)$. 但这仅是在中心项和共形谱的水平上，本文利用 Feigin-Fuck 积分法明显地计算最小模型的 Fusion 矩阵与 Braid 矩阵，从而在量子群的水平上得陪集 $SU_K(2)\otimes SU_1(2)/SU_{K+1}(2)$ 与 $SU(2)$ 的关系，指出最小模型的 Braid 和 Fusion 矩阵可以分解成三个因子的积，并且证明 D-F[10]文章中超方程的解的存在性.

一、Feigin-Fuck 表示

在最小模型中，为了排除零模态要求物理的关联函数满足一个线性微分方程，因此关联函数可以用该线性方程的独立的解来构成. 但是要找一个线性方程以及求解这样的方程是相当困难的，D-F[10] 发现：最小模型的关联函数可用库仑气体型理论描述，方程的解可用 Feigin-Fuck 积分表示. 最小模型的初场 $\phi(z,\bar{z})$ 可用一个自由 Boson 场 $\varphi(z,\bar{z})$

本文1990年1月11日收到.

来描述．即：

$$\phi_\alpha(z,\bar{z}) \sim V_\alpha(z,\bar{z}) = \exp\{i\alpha\varphi(z,\bar{z})\} \tag{1}$$

在共形场论中，物理的关联函数都可以分解分别为 z, $\bar{z}$ 的函数积的线性组合．故以下我们仅讨论含 z 的部分，对自由 Boson 场 $\varphi(z)$，它的能动量张量：

$$T(z) = -\frac{1}{4}:\partial_z\varphi(z)\partial_z\varphi(z): + i\alpha_0\partial_z^2\varphi(z) \tag{2}$$

满足条件：

$$\langle\varphi(z)\varphi(w)\rangle = 2\ln R/z - w \tag{3}$$

我们取 $\alpha_0^2 = \dfrac{1}{4(M+1)M}$，可以证明：该 Boson 场描写的 Virasoro 代数的中心项是 $C = 1 - 24\alpha_0^2 = 1 - \dfrac{6}{M(M+1)}$,

取

$$\alpha = \alpha_{p,q} = \frac{1}{2}\left[(1-p)\alpha_+ + (1-q)\alpha_-\right] \tag{4}$$

其中 $\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{1+\alpha_0^2}$，则 $V_{\alpha_{p,q}}$ 的共形谱是：

$$\Delta_{p,q} = \frac{(p\alpha_+ + q\alpha_-)^2 - (\alpha_+ + \alpha_-)^2}{4} \tag{5}$$

我们主要考虑初场的四点关联函数它包含了理论的全部信息．四点函数

$$\langle\phi_{\alpha_1}(z_1)\phi_{\alpha_2}(z_2)\phi_{\alpha_3}(z_3)\phi_{\alpha_4}(z_4)\rangle$$

可用顶角算子 V_{α_i} 和屏蔽算子 $V_{\alpha_\pm}$ 来构成．

$$\left\langle\prod_{i=1}^{4}\phi_{\alpha_i}(z_i)\right\rangle \sim \Big\langle V_{\alpha_1}(z_1)V_{\alpha_2}(z_2)V_{\alpha_3}(z_3)V_{2\alpha_0-\alpha_4}(z_4)$$

$$\int\prod_{i=1}^{n-1}du_iV_{\alpha_+}(u_i)\int\prod_{i=1}^{m-1}dv_iV_{\alpha_-}(v_i)\Big\rangle \tag{6}$$

其中 $\alpha_i = \alpha_{n_i m_i}$，$n$, m 的值是由 α_i 决定的．如果 $|n_1-n_2| \leqslant |n_3-n_4|$，$n_1+n_2+n_3+n_4 \leqslant M$，$n_1+n_2 \leqslant n_3+n_4$，则有结论 $n = \dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{4}n_i - 2n_4\right)$ 对 m，可得相似的结果．因共形场论中关联函数具有投射不变性，不失一般性，可令 $z_1 = 0$, $z_2 = \eta$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$．四点函数按投射不变量写出：

$$I(\eta) \sim \int\prod_{i=1}^{n-1}du_i\int\prod_{j=1}^{m-1}dv_j\prod_{i=1}^{n-1}u_i^a(u_i-1)^b(u_i-\eta)^c\prod_{i<j=1}^{n-1}(u_i-u_j)^{2\rho}$$

$$\times\prod_{i=1}^{m-1}v_i^{a'}(v_i-1)^{b'}(v_i-\eta)^{c'}\prod_{i<j}^{m-1}(v_i-v_j)^{2\rho'}\prod_{i,j}^{n-1,\,m-1}(u_i-v_j)^{-2} \tag{7}$$

在(7)式中，积分上下限有三种不同的取法，它们分别对应于 $\eta = 0, 1, \infty$ 线性微分方程的正则解．我们给出如下：

$$I_{k_1k_2}\begin{pmatrix}a & b & c & \rho\\ a' & b' & c' & \rho'\end{pmatrix},\eta\Big) = \int_1^\infty\prod_{i=1}^{n-k_1}du_iu_i^a(u_i-1)^b(u_i-\eta)^c$$

$$\times\int_0^\eta\prod_{i=n-k_1+1}^{n-1}du_iu_i^a(1-u_i)^b(\eta-u_i)^c\times\prod_{i<j}^{n-1}(u_i-u_j)^{2\rho}$$

$$\times \int_1^\infty \prod_{i=1}^{m-k_2} dv_i v_i^{a'}(v_i-1)^{b'}(u_i-\eta)^{c'} \int_0^\eta \prod_{i=m-k_2+1}^{m-1} dv_i v_i^{a'}(1-v_i)^{b'}(\eta-v_i)^{c'}$$

$$\times \prod_{i<j}^{m-1} (v_i-v_j)^{2\rho'} \prod_{i,j}^{n-1,\, m-1} (u_i-v_j)^{-2} \tag{8a}$$

$$\hat{I}_{k_1k_2}\begin{pmatrix} a & b & c & \rho \\ a' & b' & c' & \rho' \end{pmatrix}, \eta\Big) = \int_\eta^1 \prod_{i=1}^{k_1-1} du_i u_i^a(1-u_i)^b(u_i-\eta)^c$$

$$\times \int_{-\infty}^0 \prod_{i=k_1}^{n-1} du_i(-u_i)^a(1-u_i)^b(\eta-u_i)^c \times \prod_{i<j}^{n-1}(u_i-u_j)^{2\rho}$$

$$\times \int_\eta^1 \prod_{j=1}^{k_2-1} dv_j v_j^{a'}(1-v_j)^{b'}(v_j-\eta)^{c'}$$

$$\times \int_{-\infty}^1 \prod_{j=k_2}^{m-1} dv_j(-v_j)^{a'}(1-v_j)^{b'}(\eta-v_j)^{c'}$$

$$\times \prod_{i<j}^{m-1} (v_i-v_j)^{2\rho'} \prod_{i,j}^{n-1,\, m-1} (u_i-v_j)^{-2} \tag{8b}$$

$$\hat{\hat{I}}_{k_1k_2}\begin{pmatrix} a & b & c & \rho \\ a' & b' & c' & \rho' \end{pmatrix}, \eta\Big) = \int_\eta^\infty \prod_{i=1}^{k_1-1} du_i u_i^a(u_i-1)^b(u_i-\eta)^c$$

$$\times \int_0^1 \prod_{i=k_1}^{n-1} du_i u_i^a(1-u_i)^b(\eta-u_i)^c \prod_{i<j}^{n-1}(u_i-u_j)^{2\rho}$$

$$\times \int_\eta^\infty \prod_{i=1}^{k_2-1} dv_i v_i^{a'}(v_i-1)^{b'}(v_i-\eta)^{c'} \int_0^1 \prod_{i=k_2}^{m-1} dv_i v_i^{a'}(1-v_i)^{b'}(\eta-v_i)^{c'}$$

$$\times \prod_{i<j}^{m-1} (v_i-v_j)^{2\rho'} \times \prod_{i,j}^{n-1,\, m-1} (u_i-v_j)^{-2} \tag{8c}$$

在(7)与(8)中，参数 a, b, c, ρ 与 $a'b'c'\rho'$ 由下式定义：$a = 2\alpha_+\alpha_1$ $b = 2\alpha_+\alpha_3$ $c = 2\alpha_+\alpha_2$ $a' = 2\alpha_-\alpha_1$ $b' = 2\alpha_-\alpha_3$ $c' = 2\alpha_-\alpha_2$ $\rho = \alpha_+^2$ $\rho' = \alpha_-^2 = \rho^{-1}$. (9)

二、Fusion 矩阵和 Braid 矩阵

上节我们给出了在 $\eta = 0, 1, \infty$ 正则的三组函数，它们彼此是可以作线性变换的，$\eta = 0, 1$ 两组正则解之间的变换定义为 Fusion 矩阵：

$$I_{k_1k_2}\begin{pmatrix} a & b & c & \rho \\ a' & b' & c' & \rho' \end{pmatrix}, \eta\Big) = \sum_{k_1'k_2'} F_{k_1k_2k_1'k_2'}\begin{pmatrix} a & b & c & \rho \\ a' & b' & c' & \rho' \end{pmatrix} \hat{I}_{k_1'k_2'}\begin{pmatrix} a & b & c & \rho \\ a' & b' & c' & \rho' \end{pmatrix}, \eta\Big) \tag{10}$$

从 $I_{k_1k_2}$ 与 $\hat{I}_{k_1k_2}$ 的表达式可看出 a, b, c, ρ 与 a', b', c', ρ' 是成比例的，而 $(u_i - v_j)$ 项的指数是 -2，故 $F_{k_1k_2k_1'k_2'}\begin{pmatrix} a & b & c & \rho \\ a' & b' & c' & \rho' \end{pmatrix}$ 是可以因子化成两个独立的部分，记为 $\alpha^n_{k_1k_1'}(a, b, c, \rho)\alpha^m_{k_2k_2'}(a'b'c'\rho')$（详细的讨论见[10]）. 为了计算 $\alpha^n_{k_1k_1'}(a, bc\rho)$ 的值. 我们引入一个积分，其围道如图 1. 记为 $A(\mu, \nu, \lambda, \sigma)$ 借助于围道积分的知识，我们可以使在 $(0, \eta)$ 区间

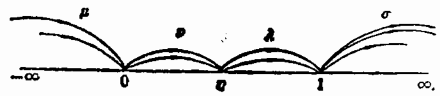

图 1　$A(\mu,\nu,\lambda,\sigma)$的积分围道

的积分重数减少 1，而保持$(1,\infty)$上的积分重数不变．可得如下的公式[11]：

$$A(\mu,\nu,\lambda,\sigma)=\frac{(-1)\mathscr{S}[b+c+a+\rho(2\nu+\mu+\sigma+2\lambda-2)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(2\lambda+\sigma+\nu-1)]}$$
$$\times A(\mu+1,\nu-1,\lambda,\sigma)$$
$$+\frac{(-1)\mathscr{S}[b+\rho(\lambda+\sigma)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(2\lambda+\sigma+\nu-1)]}$$
$$A(\mu,\nu-1,\lambda+1,\sigma) \tag{11}$$

其中 $\mathscr{S}(x)=\sin(\pi x)$，类似的减少 $(1,\infty)$ 区间积分重数而保持 $(0,\eta)$ 区间积分重数不变可得：

$$A(\mu,\nu,\lambda,\sigma)=\frac{(-)\mathscr{S}[c+\rho(\nu+\lambda)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(\sigma+2\lambda+\nu-1)]}A(\mu,\nu,\lambda+1,\sigma-1)$$
$$+\frac{\mathscr{S}[a+\rho(\mu+\nu)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(\sigma+2\lambda+\nu-1)]}A(\mu+1,\nu,\lambda,\sigma-1) \tag{12}$$

通过直接计算[见附录 A]可得：

$$A(0,k_1-1,0\quad n-k_1)=\sum_{k_1}\alpha^n_{k_1k_1'}(abc\rho)A(n-k_1'0,\ k_1'-1,\ 0)$$

$$\alpha^n_{k_1k_1'}(a,\ b,\ c\rho)=\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu+\nu=k_1'+1}}^{k_1}\ \sum_{\nu=1}^{n-k_1+1}\ \prod_{i=0}^{k_1-\mu-1}$$
$$\times\frac{\mathscr{S}[1+a+b+c+2\rho(k_1-2)+\rho'(n-k_1-i)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(n+\mu-3-i)]}$$
$$\times\prod_{i=0}^{\mu-2}\frac{\mathscr{S}[2+a+\rho(-k_1+n+i)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(\mu+n-k_1-2+i)]}$$
$$\times\prod_{i=0}^{n-k_1-\nu}\frac{\mathscr{S}[2+a+\rho(k_1-\mu+i)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(n-k_1+2\mu+\nu-4-i)]}$$
$$\times\prod_{i=0}^{\nu-2}\frac{\mathscr{S}[1+c+\rho(\mu-1+i)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(2\mu+\nu-4+i)]}$$
$$\times\frac{\prod_{i=1}^{n-k_1}\mathscr{S}(i\rho)\ \prod_{i=1}^{k_1-1}\mathscr{S}(i\rho)}{\prod_{i=1}^{k_1-\mu}\mathscr{S}(i\rho)\ \prod_{i=1}^{n-k_1-\nu+1}\mathscr{S}(i\rho)\ \prod_{i=1}^{\nu-1}\mathscr{S}(i\rho)\ \prod_{i=1}^{\mu-1}\mathscr{S}(i\rho)} \tag{13}$$

对于 $\eta=0,\infty$ 解析的二组函数，其变换矩阵定义为 Braid 矩阵记为 B 即：

$$I_{k_1k_2}\begin{pmatrix}a & b & c & \rho\\ a' & b' & c' & \rho'\end{pmatrix}\eta)=\sum_{k_1'k_2'}B^{n,m}_{k_1k_2k_1'k_2'}\begin{pmatrix}a & b & c & \rho\\ a' & b' & c' & \rho'\end{pmatrix}\hat{I}_{k_1'k_2'}\begin{pmatrix}a & b & c & \rho\\ a' & b' & c' & \rho'\end{pmatrix}\eta) \tag{14}$$

基于同样的讨论可知 B 也是可以因子化的.

$$B^{nm}_{k_1k_2k_1'k_2'}\begin{pmatrix} a & b & c & \rho \\ a' & b' & c' & \rho' \end{pmatrix} = \beta^{n}_{k_1k_1'}(abc\rho)\beta^{m}_{k_2k_2'}(a'b'c'\rho') \tag{15}$$

为计算 $\beta^{n}_{k_1k_1'}$，定义第二个积分 $\hat{A}(\mu,\nu,\lambda,\sigma)$的围道如

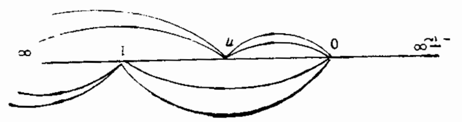

图 2 $\hat{A}(\mu,\nu,\lambda,\sigma)$ 的积分围道

在 $\hat{A}(\mu,\nu,\lambda,\sigma)$ 中被积函数要做解析延拓使得 μ 重积分中$(1,\infty)$段的相因子为 0， λ 重积分中 $(0,\eta)$ 段积分相因子为 0，同样地变换积分围道有公式:

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\mu,\nu,\lambda,\sigma) = {} & \frac{-\mathscr{S}[a+b+c+\rho(\mu+2\nu+2\lambda+\sigma-2)]}{\mathscr{S}[a+b+\rho(\nu+2\lambda+\sigma-1)]} \\
& \times e^{i\pi b}\hat{A}(\mu+1,\nu-1,\lambda,\sigma) \\
& + \frac{-\mathscr{S}[b+\rho(\lambda+\sigma)]}{\mathscr{S}[a+b+\rho(\nu+2\lambda+\sigma-1)]} \\
& \times e^{-i\pi(a+2\rho\lambda)}\hat{A}(\mu,\nu-1,\lambda+1,\sigma)
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\mu,\nu,\lambda,\sigma) = {} & \frac{-\mathscr{S}[a+\rho(\nu+\lambda)]}{\mathscr{S}[a+b+\rho(\nu+2\lambda+\sigma-1)]} \\
& \times e^{i\pi(c+2\rho\mu+2\rho\nu)}\hat{A}(\mu,\nu\lambda+1,\sigma-1) \\
& + \frac{\mathscr{S}[c+\rho(\mu+\nu)]}{\mathscr{S}[a+b+\rho(\nu+2\lambda+\sigma-1)]} \\
& \times e^{i\pi(a+b+c+(2\mu+2\nu+2\lambda)\rho)}\hat{A}(\mu+1,\nu,\lambda,\sigma-1)
\end{aligned} \tag{17}$$

经过直接计算[见附录 A]

$$B^{nm}_{k_1k_2k_1k_2'} = \beta^{n}_{k_1k_1'}(abc\rho)\beta^{m}_{k_2k_2'}(a'b'c'\rho') \tag{18}$$

$$\beta^{n}_{k_1k_1'}(abc\rho) = e^{i\pi\theta^{n}_{k_1k_1'}}(abc\rho)\alpha^{n}_{k_1k_1'}(b,a,c,\rho)$$

$$\begin{aligned}
\theta^{n}_{k_1k_1'}(a,b,c,\rho) = {} & [a(k_1'-k_1)+b(k_1'-1)+c(n-k_1)] \\
& + \rho[(n-k_1)(n+k_1-3)-(n-k_1')(n-k_1'-1)]
\end{aligned}$$

至此我们证明了 F，B 均可以因子化，而且 F，B 仅相差一个 $e^{i\pi\rho}$ 的幂因子.

三、局域性及 D-F 超方程解的存在性

物理的四点关联函数是 z 与 $\bar{z}$ 的函数，我们可以用前一节的 $I_{k_1k_2}(\eta)$ 来构成，并且注意到其它的因子可得:

$$\begin{aligned}
\langle\phi_{\alpha_1}(z_1\bar{z}_1)\phi_{\alpha_2}(z_2\bar{z}_2)\phi_{\alpha_3}(z_3\bar{z}_3)\phi_{\alpha_4}(z_4\bar{z}_4)\rangle = {} & \text{const}\cdot x\prod_{i<j}^{4}|z_i-z_j|^{-2\mu_{ij}} \\
& \times|\eta|^{2\mu_{12}+4\alpha_1\alpha_2}|1-\eta|^{2\mu_{23}+4\alpha_2\alpha_3}\sum_{k}X_kI_k(\eta)I_k(\bar{\eta})
\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\mu_{ij}=\Delta_i+\Delta_j-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4}\Delta_k$ $\Delta_i=\Delta_{\alpha i}=\Delta_{\alpha_{n_i m_i}}$ $\eta=\frac{(z_4-z_3)(z_2-z_1)}{(z_4-z_2)(z_3-z_1)}$ 物理的四点函数应具有 monodromy 不变性即：

$$\sum_k X_k I_k(\eta) I_k(\bar\eta)=\sum_s Y_s \hat I_s(\eta)\hat I_s(\bar\eta) \tag{20}$$

这等价于 $\sum_k X_k\alpha_{kl}\alpha_{ks}=y_l\delta_{ls}$ 的解是存在的[10]. 为了证明这一点，我们必须用到 α_{kl} 的量一表达式（见[12]）：

$$\begin{aligned}\alpha_{js}(a,d,c,f)=&\begin{Bmatrix}a & f & c+d-j\\ d & c & f+d-s\end{Bmatrix}\\ &\cdot\sqrt{[2c+2d-2j+1][2f+2d-2s+1]}\\ &\times(-1)^{-(a+f+c-d)+s}T_s^{-1}(a,d,f,c)T_j(a,d,c,f)\end{aligned} \tag{21}$$

其中：

$$a=\frac{1}{4}(n_1+n_4+n_3-n_2)-1/2,\quad f=\frac{1}{4}(n_2+n_4+n_3-n_2)-1/2,$$

$$d=\frac{1}{2}(n-1)\quad c=\frac{1}{4}(n_1+n_2+n_4-n_3)-1/2,$$

$$\begin{aligned}T_s^{-1}(a,d,fc)=&\{[2f+2d-2s+1][2f-s]![a+f+c+d+1]!\}/\\ &\{[s]![2d-s]![a+c-f-d+s]![f+d+c-a-s]![a+f+d\\ &-c-s]![2f+2d+1-s]!\}^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{其中 }&[x]=(e^{i\pi\rho x}-e^{-i\pi\rho x})/(e^{i\pi\rho}-e^{-i\pi\rho}),\\ &[x]!=[x][x-1]\cdots[1],\ (x\text{ 整数})\end{aligned} \tag{22}$$

以下计算 $\alpha_{2dj}(\alpha^{-1})_{js}/\alpha_{sj}(\alpha^{-1})_{j2d}$，从积分表达式可知 $\alpha_{js}^{-1}(a,d,f,c)=\alpha_{js}(a,d,c,f)\times(-1)^{j+s}$，

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{2dj}\alpha_{js}^{-1}}{\alpha_{sj}\alpha_{j2d}^{-1}}&=\frac{\alpha_{2dj}(a,d,c,f)\alpha_{js}(a,d,f,c)(-1)^{j+s}}{\alpha_{sj}(\alpha,d,c,f)\alpha_{j2d}(a,d,f,c)(-1)^{j+2d}}\\ &=\frac{T_{2d}^2(a,d,c,f)}{T_s^2(a,d,c,f)}\end{aligned} \tag{23}$$

因为（23）式与 j 无关且 $T_s(a,d,c,f)$ $(s=1\cdots 2d)$ 都是不为零的. 因此我们可取 $X_s=T_s^{-2}(a,d,c,f)$ 从而经过直接计算证明了 D-F 超方程解是存在的. 如果我们重新定义 $J_k(\eta)=\sqrt{X_k}\,I_k(\eta)$. 则可证明：$J_k(\eta)$ 所遵循的 Fusion 矩阵是 $q=e^{i\pi\rho}$ 型 $6j$ 系数矩阵与 $q'=e^{i\pi\rho'}$ 型的 $6j$ 系数以及一个平庸因子的直积. 利用 $J_k(\eta)$ 的主要项系数可方便地求出结构常数.

四、讨　　论

在[12]中，我们给出了 $SU_k(2)$ WZW 模型的 Fusion 和 Braid 矩阵，都是与量子 $q=e^{i\pi/k+2}$ 的 $6j$ 系数相联系，对最小模型我们证明了是两个不同的 $6j$ 系数与一个平庸因子的直积，从陪集来讲，这两个 $6j$ 系数分别对应于 $SU_k(2)$ 与 $SU_{k+1}(2)$，而平庸因子则

对应于 $SU_1(2)$. 但在一般的陪集模型中,类似以上的结论还没有证明，这是我们下一步的工作. 此外还要说明尽管 Fusion 和 Braid 都可以因子化,但归一化系 $N_{k_1k_2}=I_{k_1k_2}$ ($\eta=0$) 是不因子化的,因而算子积是不能因子化的[10]. 因此对最简单陪集模型,在量子群的水平上,我们建立起了它与 $SU(2)$ WZW 的联系.

本文作者感谢王珮教授的有益讨论.

附录 A

公式(11)和(12)可用图示的方法表示出来即图 A1:

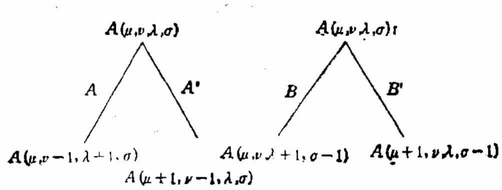

图 A1 $A(\mu,\nu,\lambda,\sigma)$ 的二种不同围道变换示意图

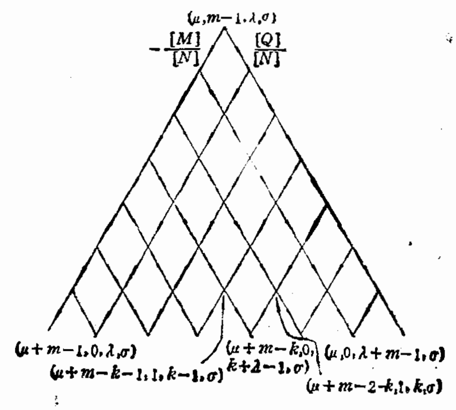

图 A2 $A(\mu,m-1,\lambda,\sigma)$展开成 $A(\mu+m-k,0,k+\lambda-1,\sigma)$ 的示意图

$$
\begin{aligned}
A' &= \frac{-\mathscr{S}[a+b+c+\rho(2\nu-2+2\lambda+\sigma+\mu)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(2\lambda+\sigma+\nu-1)]}=\frac{-[M-\mu]}{[N+\lambda-\mu]} \\
A &= -\frac{\mathscr{S}[b+\rho(\lambda+\sigma)]}{\mathscr{S}[b+c+\rho(2\lambda+\sigma+\nu-1)]}=\frac{-[Q+\lambda]}{[N+\lambda-\mu]}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

在图 A2 中用交叉点代表围道积分，每一条线代表其变换系数，同一水平线上的点具有相同的 $(0,\eta)$ 积分重数则 $(\mu m-1,\lambda,\sigma)$ 展开成 $(\mu+m-k,0,\lambda+k-1,\sigma)$ 的系数变成了从该点沿箭号方向到达 $(\mu+m-k,0,\lambda+k-1,\sigma)$ 点的所有可能的路径和,从图中可看出

$$
\begin{aligned}
\varphi(m,k) &= \varphi(m-1,k-1)\frac{[Q+k-2]}{[N+2k-m-2]} \\
&\quad + \varphi(m-1,k)\frac{[M+k-m+1]}{[N+2k-m]}
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

其中 $\varphi(m,k)$ 表示从 $(\mu,m-1,\lambda,\sigma)$ 到 $(\mu+m-k,0,\lambda+k-1,\sigma)$ 的路径和, $\varphi(m-1,k)$, $\varphi(m-1,k-1)$ 分别表示从 $(\mu,m-1,\lambda,\sigma)$ 到 $(\mu+m-k,1,k+\lambda-2,\sigma)$和 $(\mu+m-k-1,1,\lambda+k-1,\sigma)$ 的路径和.

设展开系数是

$$
\Omega(m,k)=\prod_{i=0}^{m-k-1}\frac{[M-i]}{[N+k-1-i]}\prod_{i=0}^{k-2}\frac{[Q+i]}{[N-m+k+i]}\frac{\prod_{i=1}^{m-1}[i]}{\prod_{i=1}^{m-k}[i]\prod_{i=1}^{k-1}[i]}
\tag{A.3}
$$

则我们有，当 $m>k,\ k>1$ 时有

$$\Omega(m-1,k-1)=\Omega(m,k)\frac{[N+k-1][N+2k-m-2][k-1]}{[N+2k-m-1][Q+k-2][m-1]}$$

$$\Omega(m-1,k)=\Omega(m,k)\frac{[N+2k-m][N+k-m][m-k]}{[N+2k-m-1][M+k-m+1][m-1]}$$

$$\Omega(m-1,k-1)\frac{[Q+k-2]}{[N+2k-m-2]}+\Omega(m-1,k)\frac{[M+k-m+1]}{[N+2k-m]}$$

$$=\Omega(m,k)\frac{[N+k-1][k-1]+[N+k-m][m-k]}{[N+2k-m-1][m-1]} \tag{A.4}$$

$$=\Omega(m,k)\frac{(q^{N+k-1}-q^{1-N-k})(q^{k-1}-q^{-k+1})+(q^{N+k-m}-q^{m-N-k})(q^{m-k}-q^{k-m})}{(q^{N+2k-m-1}-q^{-(N+2k-m-1)})(q^{m-1}-q^{1-m})}$$

$$=\Omega(m,k) \tag{A.5}$$

现在我们已知 $\varphi(m,1)=\Omega(m,1)$，$\varphi(m,m)=\Omega(m,m)$ 且又满足相同的递推关系，$\therefore\varphi(m,k)=\Omega(m,k)$ 两次适用公式 A.3，即可求出(13)式。

令 $$A'(\mu,\nu,\lambda,\sigma)=\hat{\mathbf{A}}(\mu,\nu,\lambda,\sigma)\times e^{i\pi\rho\left[\mu\frac{a+b}{\rho}+\nu\frac{a}{\rho}+\sigma(\sigma+1)-\lambda(\lambda-1)-\sigma\left(\frac{c}{\rho}+2(\mu+\nu+\sigma+\lambda)\right)\right]} \tag{A.6}$$

则 $A'(\mu,\nu,\lambda,\sigma)$ 满足与 $A(\mu,\nu,\lambda,\sigma)$ 相似的关系式，故可直接应用(13)求(18)。

参　考　文　献

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B241**(1984), 333.
[2] A. Tsuchiya and Y. Kanie Adv., *Studies in Purc Math.* **16**(1988), 297; *Lett. Math. Phys.*, **13**(1987), 303.
[3] G. V. Kniznic and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B247**(1984), 83.
[4] P. Christ and R. Flume, *Nucl. Phys.*, **B282**(1987), 466.
[5] E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **121**(1989), 351; IASSNS-HEP89/11, 89/32.
[6] J. M. F. Labstida and A. V. Ramallo, CERN-TH5432/89; *Phys. Lett.*, **B227**(1989), 92.
[7] G. Moore and Seiberg, IASSNS-HEP-88/8; *Nucl. Phys.*, **B313**(1989), 16.
[8] L. Alvarez-Gaume, C. Gomez and G. Sierra, CERN-TH5129/88, *Phys. Lett.*, **B220**(1989), 142.
[9] Goddard, Kent and Olive, *Comm. Math. Phys.*, **103**(1987), 105.
[10] VI. S. Dotzenko and Fateev, *Nucl. Phys.*, **B240**(1984), 312; **B251**(1985), 691; *Phys. Lett.*, **B154**(1985), 291.
[11] B. Y. Hou, D. P. Li and R. H. Yue, *Phys. Lett.*, **B229**(1989), 45.
[12] B. Y. Hou, K. J. Shi, P. Wang, and R. H. Yue, NWU-IMP-89-1219.

EXPLICIT EXPRESSIONS OF FUSION AND BRAID MATRICES IN UNITARY MINIMAL MODEL

Hou Boyu　　Shi Kangjie　　Yue Ruihong

(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an)

Abstract

In this paper, we explicitly drive the expressions of Fusion and Braid matrices in the minimal model, and show the solvability of D-F equation