第15卷 第12期　　高能物理与核物理　　Vol. 15, No. 12
1991年12月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Dec., 1991

随机组合模型中夸克动量分数的随机抽样问题*

赖晓平
(山东大学威海分校控制工程系，山东威海 264200)

方海平
(燕山大学基础部，秦皇岛市 066004)

谢去病
(山东大学物理系，济南 250100)

摘　要

本文简要介绍了 e^+e^- 湮没成强子喷注的物理图象，引入了随机夸克组合模型中夸克动量分数的分布，重点从数学上严格推导了这一分布的抽样方法.

一、问题的提出

高能 e^+e^- 湮没成强子的过程可分为四个阶段. 第一阶段，e^+e^- 湮没成虚 γ/Z^0，γ/Z^0 再激发产生一对夸克反夸克 $q_0\bar{q}_0$；第二阶段，初始产生的 $q_0\bar{q}_0$ 可能辐射一些硬胶子而形成多强子喷注；第三阶段，带色的部分子(夸克及胶子)碎裂成无色的强子，即强子化；第四阶段，不稳定的强子衰变成观测到的末态强子. 在第四个阶段中，第一阶段中初始夸克反夸克 $q_0\bar{q}_0$ 的产生可用电弱理论 QFD 来计算，第二阶段则可用微扰 QCD 来描述，第四阶段主要用实验确定的衰变分支比来计算. 只有第三阶段，虽然普遍认为由强相互作用决定，但由于微扰 QCD 不再适应，只能借助各种唯象强子化模型来描述. 这些模型主要有，独立碎裂 (IF) 模型、弦碎裂 (SF) 模型、QCD 集团碎裂 (CF) 模型及随机夸克组合模型等.

为把各种强子化模型与实验数据直接比较，更清楚地认识强子化机制，必须给出模型的 Monte Carlo 事例产生器，进而计算各种谱. 在现有的各种模型中，只有 Lund 模型及 Webber 模型有完整的事例产生器，即 JETSET 和 HERWIG，但其中的自由参数太多. 上述两大模型与实验的 Global Spectrum 比较取得了广泛的成功，但与重子产生的一系列性质却暴露出愈来愈多的矛盾，这些矛盾都能用随机夸克组合模型自然解释[1]. 这类随机夸克组合模型，最近已证明可广泛解释粒子产额[2]. 但早期 Černý 等[3]从这类模

本文1991年2月2日收到.
* 国家自然科学基金项目及中科院理论物理所开放课题.

型出发，用 Monte Carlo 预言的谱分布与后来的数据严重不符，这是这类模型失去竞争力的主要原因。在文献[4]中我们已经指出 Černý 等把能量守恒加在夸克系统上不对，另外它们在权的计算及抽样随机性上也存在问题。

随机夸克组合模型的主要思想是：e^+e^- 湮没产生 N 对夸克反夸克 $q\bar{q}$，这 N 对 $q\bar{q}$ 随机组合成各种强子。一般认为，强子的动量等于组成这一强子的夸克和反夸克动量之和[3-5]，因此所有谱分布的计算必须以 $2N$ 个夸克反夸克动量的随机抽样为基础，本文就重点研究此问题。

经过最近的研究，我们认为 $2N$ 个夸克反夸克的纵动量分数服从以下近似的纵动量相空间均匀分布：

$$dP(x_1,x_2,\cdots,x_{2N})=A\left(\prod_{i=1}^{2N}\frac{dx_i}{\sqrt{x_i^2+b^2}}\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{2N}|x_i|-2\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{2N}x_i\right). \tag{1.1}$$

上式中，A 是归一化常数，$dP(x_1,x_2,\cdots,x_{2N})$ 表示 $2N$ 个夸克反夸克的纵动量分数分别在 x_1—x_1+dx_1，x_2—x_2+dx_2，$\cdots$，x_{2N}—$x_{2N}+dx_{2N}$ 的几率，几率密度函数中的 b 是一个自由参数。

在弦碎裂模型中，计算强子的动量、能量谱是由碎裂函数

$$f(z)\propto z^{-1}(1-z)^a\exp(-bm_t^2/z)$$

出发的，其中有两个自由参数 a 与 b。我们是从近似纵动量相空间均匀分布出发，其中只有一个自由参数 b。

在我们的 Monte Carlo 计算中，首先要根据分布(1.1)对 $2N$ 个夸克反夸克的纵动量分数进行随机抽样，因此正确的抽样方法是各种谱计算的起点，也是 $2N$ 个夸克反夸克具有同样随机性的保证。由于分布(1.1)中有两个 δ 函数，它的抽样方法非同一般。本文根据一些物理思想，经过数学推导，将分布(1.1)化成一个计算机上容易实现的分布，进一步得到分布(1.1)的抽样方法。这一方法，已用于轻夸克喷注及平均夸克喷注中各种谱的计算，如快度谱、能量谱、前后关联及间隙行为等，并得到好的结果，它们将随后另发。

在第二节中，我们通过两个引理和一个定理，把分布变成一个完全等价的容易实现的分布，最后得到分布的抽样方法。第三节是本文的结论。

二、夸克动量分数的随机抽样方法

为了得到夸克动量分数分布(1.1)的抽样方法，我们先来证明两个引理。

引理 1:

记：

$$f(x_i)=\frac{1}{\sqrt{x_i^2+b^2}}. \tag{2.1}$$

则：

$$dP(x_1,x_2,\cdots,x_{2N})=A\sum_{n=1}^{2N-1}C_{2N}^n\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i)l(x_i)\,dx_i\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-1\right)\right\}$$
$$\times\left\{\left(\prod_{i=n+1}^{2N}f(x_i)l(-x_i)dx_i\right)\delta\left(\sum_{i=n+1}^{2n}x_i+1\right)\right\}. \tag{2.2}$$

上式中 $l(x_i)$ 是单位阶跃函数，$C_{2N}^n=\dfrac{(2N)!}{n!\,(2N-n)!}$。

引理 1 的证明：

注意到：
$$l(x_i)+l(-x_i)=\begin{cases}2 & x_i=0\ \text{时}\\ 1 & x_i=\text{其它时}\end{cases}$$

因此将 $f(x_i)$ 写成

$$f(x_i)[l(x_i)+l(-x_i)] \tag{2.3}$$

的形式只改变了 $x_i=0$ 这一点的函数值，并不改变 x_i 的分布，故有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}P(x_1,x_2,\cdots,x_{2N})\\
&=A\left\{\prod_{i=1}^{2N}f(x_i)[l(x_i)+l(-x_i)]\mathrm{d}x_i\right\}\delta\left(\sum_{i=1}^{2N}|x_i|-2\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{2N}x_i\right)\\
&=A\left(\prod_{i=1}^{2N}f(x_i)\mathrm{d}x_i\right)\left\{\prod_{i=1}^{2N}[l(x_i)+l(-x_i)]\right\}\delta\left(\sum_{i=1}^{2N}|x_i|-2\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{2N}x_i\right).
\end{aligned}$$

我们知道，在动量分数取样时，$2N$ 个夸克反夸克应具有同样的随机性，即在 $2N$ 个 x_i 中，任一个 x_i 所处的地位都是一样的，任意交换它们的次序并不改变分布(1.1)，因此，例如，$N=2$ 时，$\prod_{i=1}^{4}f(x_i)l(-x_1)l(-x_2)l(x_3)l(x_4)\xrightarrow{(1,3)、(2,4)\text{交换}}\prod_{i=1}^{4}f(x_i)l(-x_3)l(-x_4)l(x_1)l(x_2)=\prod_{i=1}^{4}f(x_i)l(x_1)l(x_2)l(-x_3)l(-x_4)$，等等。从而有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}P(x_1,x_2,\cdots,x_{2N})\\
&=A\left(\prod_{i=1}^{2N}f(x_i)\mathrm{d}x_i\right)\left\{\sum_{n=0}^{2N}C_{2N}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}l(x_i)\right)\left(\prod_{i=n+}^{2N}l(-x_i)\right)\right\}\\
&\quad\times\delta\left(\sum_{i=1}^{2N}|x_i|-2\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{2N}x_i\right)\\
&=A\sum_{n=0}^{2N}C_{2N}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i)l(x_i)\mathrm{d}x_i\right)\left(\prod_{i=n+1}^{2N}f(x_i)\mathrm{d}x_il(-x_i)\right)\\
&\quad\times\delta\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\sum_{i=n+1}^{2N}|x_i|-2\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=n+1}^{2N}x_i\right)\\
&=A\sum_{n=1}^{2N-1}C_{2N}^{n}\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i)l(x_i)\mathrm{d}x_i\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-1\right)\right\}\\
&\quad\times\left\{\left(\prod_{i=n+1}^{2N}f(x_i)l(-x_i)\mathrm{d}x_i\right)\delta\left(\sum_{i=n+1}^{2N}x_i+1\right)\right\}.
\end{aligned}$$

引理一得证。

引理 2:

$$\left(\prod_{i=1}^{n}f(x_i)l(x_i)\mathrm{d}x_i\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-1\right)$$
$$=\frac{1}{C}\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\xi_i\right)\Big/D_f(n,\xi). \tag{2.4a}$$

$$\left(\prod_{i=n+1}^{2N} f(x_i)l(-x_i)\mathrm{d}x_i\right)\delta\left(\sum_{i=n+1}^{2N} x_i - 1\right)$$

$$= \frac{1}{C}\left(\prod_{j=1}^{2N-n} \mathrm{d}\eta_j\right)/D_b(2N-n,\eta). \tag{2.4b}$$

其中 C 是常数，$0<\xi_i<1(i=1,2,\cdots,n)$；$-1<\eta_j<0(j=1,2,\cdots,2N-n)$，

$$x_i = b\mathrm{sh}(Y_1\cdot\xi_i) \qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{2.5a}$$

$$x_{n+j} = b\mathrm{sh}(Y_2\cdot\eta_j) \qquad (j=1,2,\cdots,2N-n). \tag{2.5b}$$

$$D_f(n,\xi) = Y_1\left|\sum_{i=1}^{n} b\xi_i\mathrm{ch}(Y_1\xi_i)\right|. \tag{2.6a}$$

$$D_b(2N-n,\eta) = Y_2\left|\sum_{j=1}^{2N-n} b\eta_j\mathrm{ch}(Y_2\eta_j)\right|. \tag{2.6b}$$

而 Y_1 及 Y_2 满足以下方程

$$\sum_{i=1}^{n} b\mathrm{sh}(Y_1\xi_i) = 1. \tag{2.7a}$$

$$\sum_{j=1}^{2N-n} b\mathrm{sh}(Y_2\eta_j) = -1. \tag{2.7b}$$

引理 2 的证明:

(2.4b)式的证明与(2.4a)式的证明完全类似，下面我们证明(2.4a)式.

令 $x_i = b\mathrm{sh}(y_i)$，注意到 $f(x_i)=\dfrac{1}{\sqrt{x_i^2+b^2}}$，我们有:

$$f(x_i)l(x_i)\mathrm{d}x_i = l(y_i)\mathrm{d}y_i.$$

记 $C = \int_{y_{\min}}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}Y}{Y^{n+1}}$ (*)，则

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i)l(x_i)\mathrm{d}x_i\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} l(y_i)\mathrm{d}y_i\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n} b\mathrm{sh}(y_i) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{C}\int_{y_{\min}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}Y}{Y^{n+1}}\left(\prod_{i=1}^{n} l(y_i)\mathrm{d}y_i\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n} b\mathrm{sh}(y_i) - 1\right). \tag{2.8}$$

作变换: $y_i = Y\cdot\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，且 $0<\xi_i<1$，这样就有

$$\mathrm{d}Y\left(\prod_{i=1}^{n} l(y_i)\mathrm{d}y_i\right) = Y^n\mathrm{d}Y\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\xi_i\right)$$

从而(2.8)式变为:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i)l(x_i)\mathrm{d}x_i\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$$

* $y_{\min}$ 可取为方程 $(2N-1)b\mathrm{sh}(Y)=1$ 的解.

$$= \frac{1}{C}\int_{y_{\min}}^{\infty}\frac{dY}{Y}\left(\prod_{i=1}^{n}d\xi_i\right)\delta\left(\sum_{i=1}^{n}b\,\mathrm{sh}(Y\xi_i)-1\right)$$

$$= \frac{1}{C}\left(\prod_{i=1}^{n}d\xi_i\right)\int_{y_{\min}}^{\infty}\frac{1}{Y}\delta\left(\sum_{i=1}^{n}b\,\mathrm{sh}(Y\xi_i)-1\right)dY$$

$$= \frac{1}{C}\left(\prod_{i=1}^{n}d\xi_i\right)\Big/\left[Y_1\left|\sum_{i=1}^{n}b\xi_i\mathrm{ch}(Y_1\xi_i)\right|\right]$$

$$= \frac{1}{C}\left(\prod_{i=1}^{n}d\xi_i\right)\Big/D_f(n,\xi).$$

(2.4a)式得证.

引理二证毕.

有了以上两个引理后,我们就能很容易证明下面的定理.

定理:

$$dP(x_1,x_2,\cdots,x_{2N})\propto\sum_{n=1}^{2N-1}C_{2N}^{n}W(N,n,\xi,\eta)\left(\prod_{i=1}^{n}d\xi_i\right)\left(\prod_{j=1}^{2N-n}d\eta_j\right). \qquad (2.9)$$

其中 $0<\xi_i<1(i=1,2,\cdots,n)$; $-1<\eta_j<0(j=1,2,\cdots,2N-n)$,

$$W(N,n,\xi,\eta)=1/[D_f(n,\xi)D_b(2N-n,\eta)]. \qquad (2.10)$$

在附录中我们求出了以上定理中 $W(N,n,\xi,\eta)$ 的最大值,记为 $W_{\max}$. 这样,根据上面的定理,我们就很容易得到夸克动量分数分布(1.1)的抽样方法如下:

1.按二项式分布 C_{2N}^{n} 对前后半球夸克加反夸克数 n_f 及 n_b 取样

1.1) 取 $2N$ 个 0～1 之间均匀分布的随机数,则大于 0.5 的随机数的个数为 n_f, 小于 0.5 的个数为 n_b.

1.2) 若 $n_f=0$ 或 $n_b=0$,转入 1.1),否则,转入 2.

2.在 0～1 之间抽取 n_f 个均匀分布的随机数 $\{\xi_i, i=1,2,\cdots,n\}$, 解方程(2.7a)求得 Y_1,由(2.6a)式求 $D_f(n_f,\xi)$.

3.在－1～0 之间抽取 n_b 个均匀分布的随机数$(\eta_j,\ j=1,2,\cdots,n_b\}$,解方程(2.7b)求得 Y_2,由 (2.6b) 式求 $D_b(n_b,\eta)$.

4.按权重 $W(N,n,\xi,\eta)=1/[D_f(n_f,\xi)D_b(n_b,\eta)]$ 筛选

在 0～1 之间取一均匀分布的随机数,记为 R,若 $R\cdot W_{\max}\leqslant W(N,n,\xi,\eta)$ 则转入 5,否则,回到 1.

5.由(2.5a)及(2.5b)计算得到$\{x_i, i=1,2,\cdots,2N\}$, 结束.

以上抽样方法思路清楚,算法简单,经检验,这一抽样方法具有很高的效率.

三、结　论

在随机夸克组合模型中，我们认为组合前夸克服从近似的纵动量相空间均匀分布. 本文经过一些推导,得到了这一分布的抽样方法. 这种方法简单明了,容易实现，给我们以后各种谱的计算打下了良好的基础.

作者曾与山东大学物理系的陈鄂生、刘希明、王群等老师进行过多次讨论，在此表示衷心的感谢。

附录 $W(N,n,\xi,\eta)$ 的最大值

1. $D(n,\xi)$ 的关于 ξ_i 的最小值

由(2.6)式有：

$$\frac{\partial D_f(n,\xi)}{\partial \xi_i}=\frac{\partial D_f(n,\xi)}{\partial(Y_1\xi_i)}\cdot\frac{\partial(Y_1\xi_i)}{\partial \xi_i}$$

$$=[bY_1\xi_i\mathrm{sh}(Y_1\xi_i)+b\mathrm{ch}(Y_1\xi_i)]\cdot\left[Y_1+\xi_i\frac{\partial Y_1}{\partial \xi_i}\right]. \tag{A.1}$$

再由(2.7)式得到：

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \xi_i}=-bY_1\mathrm{ch}(Y_1\xi_i)/\sum_{j=1}^{n}b\xi_j\mathrm{ch}(Y_1\xi_j). \tag{A.2}$$

将(A.2)式代入(A.1)式得：

$$\frac{\partial D_f(n,\xi)}{\partial \xi_i}=[bY_1\xi_i\mathrm{sh}(Y_1\xi_i)+b\mathrm{ch}(Y_1\xi_i)]$$

$$\times\sum_{j=1}^{n}[bY_1\xi_j\mathrm{ch}(y_1\xi_j)-bY_1\xi_j\mathrm{ch}(Y_1\xi_i)]/\sum_{j=1}^{n}b\xi_j\mathrm{ch}(Y_1\xi_j). \tag{A.3}$$

从(2.7)式可看出，$Y_1>0$，故当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\frac{\partial D_f(n,\xi)}{\partial \xi_i}>0 \qquad \text{在非边界点上} \tag{A.4}$$

因此 $D_f(n,\xi)$ 的最大值只能在边界上取值．我们考虑三种边界：

i) $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=\varepsilon$，$\varepsilon$ 是一趋于零的正数，这时可求得

$$D_f(n,\xi)=nb\sqrt{1+(1/nb)^2}\ln[1/nb+\sqrt{1+(1/nb)^2}]. \tag{A.5a}$$

ii) $\xi_1=1$，$\xi_2=\cdots=\xi_n=0$ 时

$$D_f(n,\xi)=b\sqrt{1+(1/b)^2}\ln[1/b+\sqrt{1+(1/b)^2}]. \tag{A.5b}$$

iii) $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=1$ 时

$$D_f(n,\xi)=nb\sqrt{1+(1/nb)^2}\ln[1/nb+\sqrt{1+(1/nb)^2}]. \tag{A.5c}$$

第一种边界和第三种边界上的值相同．可以验证，$D_f(n,\xi)$在其它边界上的值界于 ii)和 iii)之间．因此，$D_f(n,\xi)$ 的最小值 $D_f(n,\xi)^{\min}$ 为：

$$D_f(n,\xi)^{\min}=nb\sqrt{1+(1/nb)^2}\ln[1/nb+\sqrt{1+(1/nb)^2}]. \tag{A.6}$$

上面求得的 $D_f(n,\xi)^{\min}$ 是对 $n\geqslant 2$ 得到的，但对 $n=1$ 的情况仍然适应，因为 $n=1$ 时，$\frac{\partial D_f(n,\xi)}{\partial \xi_i}=0$，即 $D_f(n,\xi)$ 是个常数．

同理可求得：

$$D_b(n,\eta)^{\min}=nb\sqrt{1+(1/nb)^2}\ln[1/nb+\sqrt{1+(1/nb)^2}]. \tag{A.7}$$

2. $W(N,n,\xi,\eta)$ 的最大值

记 $W(N,n,\xi,\eta)$ 的最大值为 $W_{\max}$，则

$$W_{\max}=\max_n\{1/[D(n,\xi)^{\min}\cdot D(2N-n,\eta)^{\min}],\ n=1,2,\cdots,2N-1\}. \tag{A.8}$$

可以验证，当 $n=N$ 时，$W(N,n,\xi,\eta)$ 有最大值，即：

$$V_{\max}=1/[Nb\sqrt{1+(1/Nb)^2}\ln(1/Nb+\sqrt{1+(1/Nb)^2})]^2. \tag{A.9}$$

参　考　文　献

[1] Liang Zuo-tang and Xie Qu-bing, "Baryon-antibaryon Flavor Correlation in e^+e^- Annihlation", 即将在 *Phys. Rev.*, D 发表，并参看其中所引有关文献.
[2] Qu-bing Xie and Xi-ming Liu, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 2169.
[3] V. Černý et al., *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 2822.
[4] 赖晓平、谢去病，方海平，高能物理与核物理，**14**(1990)，24.
[5] 方海平、谢去病，赖晓平，高能物理与核物理，**13**(1989)，518.

Generation of Random Samples of Momentum Fractions of Quarks in the Stochastic Combination Model

LAI XIAOPING
(*Control Enginnering Department, Shandong University at Weihai, Weihai* 264200)

FANG HAIPING
(*Basic Courses Department, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004)

XIE QUBING
(*Department, of Physics Shandong University, Jinan* 250100)

ABSTRACT

This paper simply describes the picture of e^+e^- annihilation into hadrons and introduce the distribution of momentum fractions of quarks in the stochastic combination model. The method of sampling from this distribution is mathematically derived.