

# 顶角修正和有限温度下的单 $\sigma$ 交换势\*

郑 国 桐

(杭州师范学院物理系, 310012)

苏 汝 铿

(复旦大学物理系, 上海 200433)

## 摘 要

利用温度场论中的虚时格林函数方法, 本文计算了三线顶角修正对有限温度下单  $\sigma$  介子交换势的影响。我们发现,  $\sigma$  介子和核子的耦合常数随温度而变小, 且在温度为 210 MeV 时下降为零。这一结果和在夸克水平上由 Nambu-Jona-Lasinia 模型给出的耦合常数随温度的变化十分类似。

## 一、引 言

为讨论核物质在不同温度不同密度区中的超导相变、汽液相变, 强子气体相变、手征相变及夸克-胶子去禁闭相变, 研究核子-核子相互作用势在高温高密度区的性质是非常重要的<sup>[1]</sup>。我们曾证明: 在核理论中应用十分广泛的唯象势, 如 Skyrme 势, SGII 势, Gogny 势等, 不能推广到高温高密度情况, 否则将出现核物质在绝热过程中的声速超过光速, 破坏因果性的困难<sup>[2-5]</sup>。

为讨论核力随温度的变化, 我们在以前的一系列论文中<sup>[6-8]</sup>, 通过类似于零温时计算真空极化的方法, 对泡泡图求和, 然后再用温度场论中的松原虚时格林函数, 求出  $\pi$  介子,  $\sigma$  介子有效质量随温度的变化, 研究了单  $\pi$  交换势 (OPEP) 和单  $\sigma$  交换势 (OSEP) 随温度的变化。但在所有这些工作中, 均未考虑温度对耦合常数的影响。

本文目的在于研究温度对耦合常数的影响, 并据此讨论单  $\sigma$  交换势随温度的变化。用在零温时算反常磁矩, Lamb 移动类似的方法, 通过计算核子-核子二阶散射振幅的三线顶角修正, 用虚时格林函数找出耦合常数随温度的变化, 并进而讨论温度对单  $\sigma$  交换势的影响。我们将证明, 当  $k_B T = 210 \text{ MeV}$ ,  $k_B$  为玻耳兹曼常数时,  $NN\sigma$  的耦合常数将趋于零。这个结果和 Bernard 等人<sup>[9]</sup>, Hatsuda 等人<sup>[10]</sup>用 Nambu-Jona-Lasinia (NJL) 模型计算夸克和夸克凝聚态之间耦合常数随温度的变化, 发现当  $k_B T = 215 \text{ MeV}$  时, 它变为零的结果很类似。但我们是在核子和介子的水平上讨论问题, 不涉及夸克。

## 二、三线顶角函数

记  $\sigma$  介子与核子相互作用的拉氏密度为

本文 1990 年 12 月 15 日收到。

\* 国家自然科学基金及国家教委博士点基金资助课题。

$$\mathcal{L}_I = g_i \bar{\psi}(x) \phi(x) \psi(x). \quad (1)$$

则在零温时,核子-核子二阶散射振幅的顶角修正是(图1):

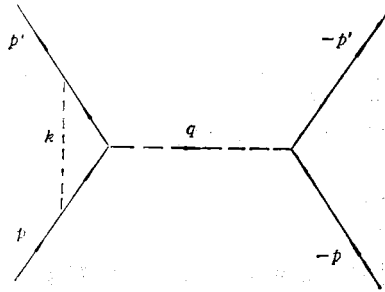


图1 交换 $\sigma$ 介子的左三线顶角修正图

$$V'_i(p', p) = -\bar{u}(p') i g_i \Lambda u(p) \frac{i}{q^2 - m_\sigma^2} \times \bar{u}(-p') i g_i u(-p), \quad (2)$$

其中

$$i g_i \Lambda = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_\sigma^2} i g_i \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m} \times i g_i \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} i g_i, \quad (3)$$

为左三线顶角函数。下面用文献[6—8]的虚时格林函数方法将上述结果推广到有限温度。在有限温度下,(3)式化为

$$i g_i \Lambda = \frac{-i g_i^3}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p}' - \not{k} + m)(\not{p} - \not{k} + m)}{(k^2 - m_\sigma^2)[(\not{p}' - \not{k})^2 - m^2][(\not{p} - \not{k})^2 - m^2]}. \quad (4)$$

(4)式中, $k$ 是 $\sigma$ 介子的四维动量, $k^0 = i\omega_n = i2n\pi/\beta$ , $\beta = (k_B T)^{-1}$ , $n = 1, 2, 3, \dots$ . 利用恒等式

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda du \frac{2}{[a + (b-a)\lambda + (c-b)u]^3}, \quad (5)$$

可将(4)式写成

$$i g_i \Lambda = \frac{-2i}{\beta} g_i^3 \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda du \times \frac{(\not{p}' - \not{k} + m)(\not{p} - \not{k} + m)}{[k^2 - 2k\bar{p} + (p'^2 - m^2)\lambda + (p^2 - p'^2)u - (1-\lambda)m_\sigma^2]^3},$$

式中 $\bar{p} = \lambda p' + uq = \lambda p' - u(p' - p)$ ,经过一些运算后,可将上式写成

$$i g_i \Lambda = \frac{-2i}{\beta} g_i^3 \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda du \frac{(i\omega_n)^2 + \xi}{[(i\omega_n)^2 - W^2]^3}. \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} \xi = -\vec{k}^2 + (uq + \lambda m)[(\lambda - 2)m - uq] + 2uq \cdot \bar{p} - uq(\not{p} + m) \\ \quad - (\lambda - 2)m(\not{p} + m), \\ W^2 = \vec{k}^2 + \bar{p}^2 - (p'^2 - m^2)\lambda. \end{cases} \quad (7)$$

用复平面中回路积分的方法<sup>[11]</sup>,可以完成(6)式中对 $n$ 的无穷级数求和,其结果是

$$i g_i \Lambda = i g_i^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda du \left\{ -\frac{1}{8W^3} + \frac{3\xi}{8W^5} - \frac{1}{4W^3(e^{\beta W} - 1)} - \frac{\beta e^{\beta W}}{4W^2(e^{\beta W} - 1)^2} + \frac{\beta^2 e^{\beta W}}{4W(e^{\beta W} - 1)^2} + \xi \left[ \frac{\beta^2 e^{\beta W}}{4W^3(e^{\beta W} - 1)^2} + \frac{3\beta e^{\beta W}}{4W^4(e^{\beta W} - 1)^2} + \frac{3}{4W^5(e^{\beta W} - 1)} \right] \right\}. \quad (8)$$

在非相对论极限下 $\vec{q} \rightarrow 0$ , $q^0 \rightarrow 0$ ,完成(8)式中对 $u$ 和 $\lambda$ 的积分后,经过一些运算,我们最后得到

$$\begin{aligned}
ig_s \Lambda = ig_s^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} & \left\{ -\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2W^3} + \frac{3\alpha_1^2}{2W^5} \right) - \frac{3}{8} \bar{k}^2 \left( \frac{1}{2W^3} + \frac{5\alpha_1^2}{2W^7} \right) \right. \\
& + \frac{3}{8} m^2 \left( \frac{1}{4W^5} + \frac{5\alpha_2^2}{2W^7} \right) + \frac{3}{8} \left[ \left( \frac{2}{3W^5} + \frac{5\alpha_3^2}{2W^7} \right) m^2 \gamma^0 \right. \\
& - 3m_q \left( \frac{1}{24W^5} + \frac{5\alpha_4^2}{2W^7} \right) - \left. \left. \left[ \frac{1}{4(e^{\beta W} - 1)} + \frac{\bar{k}^2 \beta^2 e^{\beta W}}{4(e^{\beta W} - 1)^2} \right] \right. \right. \\
& \times \left( \frac{1}{2W^3} + \frac{3\alpha_1^2}{2W^5} \right) - \frac{\beta e^{\beta W}}{4(e^{\beta W} - 1)^2} \left( \frac{1}{2W^2} + \frac{\alpha_1^2}{W^4} \right) \\
& + \frac{\beta^2 e^{\beta W}}{4(e^{\beta W} - 1)^2} \left( \frac{1}{2W} + \frac{\alpha_1^2}{2W^3} \right) - \frac{3\bar{k}^2 \beta e^{\beta W}}{4(e^{\beta W} - 1)^2} \left( \frac{1}{2W^4} + \frac{2\alpha_1^2}{W^6} \right) \\
& - \frac{3\bar{k}^2}{4(e^{\beta W} - 1)} \left( \frac{1}{2W^3} + \frac{5\alpha_1^2}{2W^7} \right) + \frac{\beta^2 e^{\beta W}}{4(e^{\beta W} - 1)^2} \left[ m^2 \left( \frac{1}{4W^3} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{3\alpha_2^2}{2W^5} \right) + m^2 \gamma^0 \left( \frac{2}{3W^3} + \frac{3\alpha_3^2}{2W^5} \right) - 3m_q \left( \frac{1}{24W^3} + \frac{3\alpha_4^2}{2W^5} \right) \right] \\
& + \frac{3\beta e^{\beta W}}{4(e^{\beta W} - 1)^2} \left[ m^2 \left( \frac{1}{4W^4} + \frac{2\alpha_2^2}{W^6} \right) + m^2 \gamma^0 \left( \frac{2}{3W^4} + \frac{2\alpha_3^2}{W^6} \right) \right. \\
& - \left. \left. 3m_q \left( \frac{1}{24W^4} + \frac{2\alpha_4^2}{W^6} \right) \right] + \frac{3}{4(e^{\beta W} - 1)} \left[ m^2 \left( \frac{1}{4W^5} + \frac{5\alpha_2^2}{2W^7} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + m^2 \gamma^0 \left( \frac{2}{3W^5} + \frac{5\alpha_3^2}{2W^7} \right) - 3m_q \left( \frac{1}{24W^5} + \frac{5\alpha_4^2}{2W^7} \right) \right] \right\}. \quad (9)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 &= \frac{m^2}{4} - \frac{m_\sigma^2}{6}, & \alpha_2^2 &= \frac{11}{60} m^2 - \frac{2}{15} m_\sigma^2, \\
\alpha_3^2 &= \frac{11}{30} m^2 - \frac{m_\sigma^2}{4}, & \alpha_4^2 &= \frac{m^2}{40} - \frac{m_\sigma^2}{60}.
\end{aligned} \quad (10)$$

(9) 式的积分中将出现发散项, 例如

$$\int_0^\eta d|\bar{k}| \frac{|\bar{k}|^2}{W^3} = \ln \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + m^2}}{m} - 1.$$

当  $\eta \rightarrow \infty$  时, 是对数发散的, 另外还有平方发散项等。因此必须进行顶角重整化。我们按照下述原则进行重整化点的选择: 一是当  $T \rightarrow 0$  时, 要求 (9) 式给出的单  $\sigma$  交换势能回到通常核理论中计及顶角修正后的单  $\sigma$  交换势; 二是重整化后留下的收敛项, 在温度  $T$  上升时, 对单  $\sigma$  交换势中的中心势和自旋轨道耦合势产生同等程度的影响。根据这些原则, (10) 式对  $\bar{k}$  积分的结果是

$$ig_s \Lambda = ig_s (z_1^{-1} - 1) + ig_s \Lambda^\beta, \quad (11)$$

其中  $(z_1^{-1} - 1)$  是一个与温度有关的发散因子, 在重整化后被重整化耦合常数所吸收。  $\Lambda^\beta$  满足

$$\begin{aligned}
\Lambda^\beta &= -\frac{1}{8\pi^2} g_s^2 \left\{ \frac{I_1}{2} + \frac{3}{2} (I_5 + I_6) + 27I_2 \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_1^2 \beta^2}{2} [3(I_4 + I_7) + 3I_8 + 18I_9 + 15I_9] \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^\infty dx \frac{x^2}{(\beta W)^3 (e^{\beta W} - 1)}, & I_2 &= \int_0^\infty dx \frac{x^2 e^{\beta W}}{(\beta W)^2 (e^{\beta W} - 1)^2}, \\
 I_3 &= \int_0^\infty dx \frac{x^2 e^{2\beta W}}{(\beta W)^4 (e^{\beta W} - 1)^2}, & I_4 &= \int_0^\infty dx \frac{x^2}{(\beta W)^5 (e^{\beta W} - 1)}, \\
 I_5 &= \int_0^\infty dx \frac{x^4 e^{\beta W}}{(\beta W)^4 (e^{\beta W} - 1)^2}, & I_6 &= \int_0^\infty dx \frac{x^4}{(\beta W)^5 (e^{\beta W} - 1)}, \\
 I_7 &= \int_0^\infty dx \frac{x^2 e^{2\beta W}}{(\beta W)^5 (e^{\beta W} - 1)^2}, & I_8 &= \int_0^\infty dx \frac{x^4 e^{\beta W}}{(\beta W)^6 (e^{\beta W} - 1)^2}, \\
 I_9 &= \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(\beta W)^7 (e^{\beta W} - 1)}, & \beta W &= \sqrt{x^2 + \beta^2 m^2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

### 三、单 $\sigma$ 交换势

现在讨论计及顶角修正及泡泡图修正后的单  $\sigma$  交换势。在文献 [6—8] 中我们曾证实, 泡泡图的贡献相当于质量重正化, 自由  $\sigma$  介子的传播子  $\frac{i}{q^2 - m_\sigma^2}$  将被严格的  $\sigma$  介子的传播子  $\frac{i}{q^2 - m_\sigma^2 - i\pi(q^2)}$  代替, 其中  $\pi(q^2)$  是计及泡泡图贡献后, 二阶  $\sigma$  介子的自能。于是, 再计及左、右两顶角的三线顶角修正后, 我们得出有限温度下的单  $\sigma$  交换势是

$$V_i^\beta(p', p) = g_i^2(\beta) \bar{u}(p') u(p) \frac{1}{q^2 - m_\sigma^2 - i\pi(q^2)} \bar{u}(-p') u(p), \tag{14}$$

其中

$$g_i(\beta) = g_i(1 + \Lambda^\beta) \tag{15}$$

是有限温度下的耦合常数,  $\Lambda^\beta$  由 (12) 式给出,  $\pi(q^2)$  可在文献 [8] 中找出。由 (14)、(15) 式可算出单  $\sigma$  交换势<sup>[8]</sup>。

### 四、计算结果和讨论

为便于比较, 我们选择零温时的  $g_i$  及  $m_\sigma$  的值和文献 [8] 相同。利用 (12)、(13)、(14)、(15) 式, 可以计算耦合常数  $g_i(\beta)$  及单  $\sigma$  交换势随温度的变化。数值计算的结果总结在图 2 至图 4 上。

1. 有限温度下耦合常数  $g_i^2(\beta)/4\pi$  对温度  $k_B T$  的依赖关系如图 2 中的曲线 A 所示。在  $k_B T \leq 60$  MeV 的低温区, 它几乎是一条与温度轴平行的直线。随着温度上升,  $g_i^2(\beta)/4\pi$  迅速下降, 并在  $k_B T = 210$  MeV 时趋于零。  $g_i(\beta)$  的这种行为与用 NJL 算得的夸克与介子  $\langle \bar{q}q \rangle$  相互作用耦合常数对温度的依赖关系非常相似, 后者在  $k_B T = 215$  MeV 时趋于零<sup>[9,10]</sup>。关于我们模型和 NJL 模型比较, 我们已在文献 [6] 中作过阐述, 此处不赘。

第二节中的计算也可以用来讨论单  $\pi$  交换的汤川势, 其结果如图 2 中的曲线 B 所示。由图中可见, 无论是单  $\pi$  交换势还是单  $\sigma$  交换势, 其耦合常数在  $k_B T = 210$  MeV 时均趋

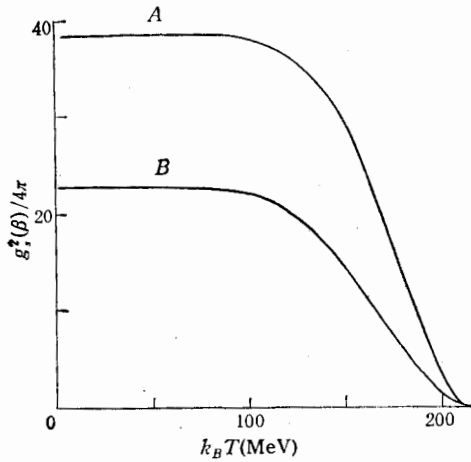


图 2 耦合常数随温度的变化: 曲线 A( $\sigma$  介子); 曲线 B( $\pi$  介子)

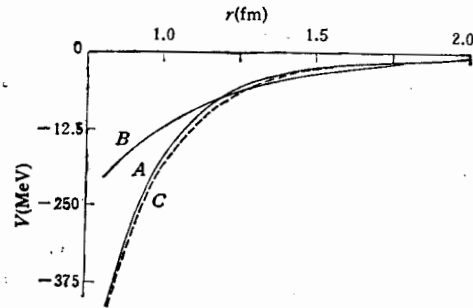


图 3 中程核力区中的单  $\sigma$  交换势  $V_\sigma$  (A:  $k_B T = 0$ ; B:  $k_B T = 200 \text{ MeV}$ ) 及零温时的  $V_{\sigma+\pi}$  (曲线 C)

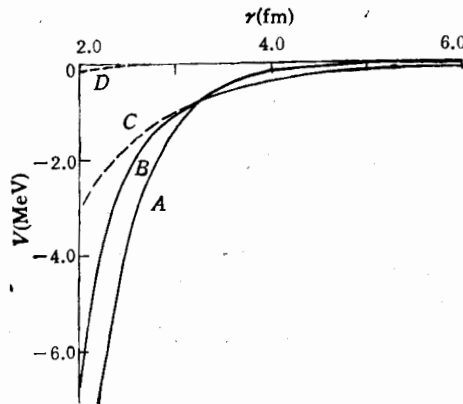


图 4 长程核力区中的  $V_{\sigma+\pi}$  (A:  $k_B T = 200 \text{ MeV}$ ; B:  $k_B T = 0$ ) 及  $V_\pi$  (C:  $k_B T = 0$ , D:  $k_B T = 200 \text{ MeV}$ )

于零。这时原子核内核子的吸引力为零,原子核解体而成为自由核子气体。如果用 NJL 模型的语言,认为第二节中的费密场  $\psi$  代表夸克场,  $\sigma$  介子场  $\varphi$  等同于  $\langle \bar{q}q \rangle$  的凝聚态,则耦合常数  $g_s(\beta)$  为零意味着体系变成自由夸克气体。而  $k_B T = 210 \text{ MeV}$  将是出现夸克去禁闭相变的温度。这个结果与用点阵规范理论给出的夸克-胶子相变区温度相符。

2. 图 3 表示在三线顶角修正和泡泡图近似下,有限温度下的单  $\sigma$  交换势随温度的变化。实线 A 和 B 分别表示  $k_B T = 0$  及  $200 \text{ MeV}$  时  $l = 0$  的  $s$  态的单  $\sigma$  交换势  $V_\sigma$ 。当  $k_B T = 210 \text{ MeV}$  时,  $V_\sigma$  与横轴重合,变为零。比较曲线 A 和 B 可见,在  $1.2 \text{ fm} \leq r \leq 2 \text{ fm}$  区,曲线出现交叉现象,这是由于  $\sigma$  介子的有效质量  $M_\sigma(\beta)$  随温度升高而下降,力程变长所致。这一点我们在文献 [8] 中作过详细的分析。可以证明,随着温度上升,交叉点越来越向外移,交叉区越来越狭。

图 3 中的虚线 C 表示  $T = 0 \text{ K}$  时单  $\sigma$  和单  $\pi$  交换势之和  $V_{\sigma+\pi}(r)$ 。比较曲线 A 和 C 可见,在中程核力区,这两根曲线十分靠近。这表示在中程核力区,  $V_\pi(r)$  的贡献很

小,核力主要来自交换 $\sigma$ 介子。

3. 为便于和文献[8]的结果相对照,图4给出了长程核力区( $2\text{fm} \leq r \leq 6\text{fm}$ )中的 $V_{\sigma+\pi}(r)$ 及 $V_{\pi}(r)$ 随温度变化的曲线。其中曲线A、B分别表示 $k_B T = 200\text{MeV}$ 及零时的单 $\sigma$ 和单 $\pi$ 交换势 $V_{\pi+\sigma}(r)$ ,曲线C和D分别表示 $k_B T$ 为0和 $200\text{MeV}$ 时的单 $\pi$ 交换势。比较曲线B和C可见,在低温时,特别在 $r \geq 3.2\text{fm}$ 的长程区,核力主要来自交换 $\pi$ 介子, $V_{\pi}(r)$ 与 $V_{\pi+\sigma}(r)$ 近似重合。但在高温区,比如在 $k_B T = 200\text{MeV}$ 时,在 $2\text{fm} \leq r \leq 3.2\text{fm}$ 区, $\sigma$ 场有重要的贡献,曲线A和D有明显区别。由图4中还可看到,在 $r > 3.2\text{fm}$ 区域中, $V_{\sigma+\pi}(r)$ 和 $V_{\pi}(r)$ 的模对固定的 $r$ 而言均随温度的升高而单调下降,这表示吸引力随温度的升高而变弱,至 $k_B T = 210\text{MeV}$ 时,它们的模均下降到零,吸引力消失,发生相变。

苏汝铿感谢 G.E. Broan 教授在一九九〇年三月他访问纽约州立大学石溪分校时就耦合常数与温度关系问题所作的有益讨论。

### 参 考 文 献

- [1] S. Nagamiya, Nuclear Phase Transitions and Heavy Ion Reactions ed. T. T. S. Kuo, D. Strottman and S. Wu (World Sci.) 1987.
- [2] R. K. Su and T. T. S. Kuo, *Mod. Phys. Lett.*, **A2**(1987), 71.
- [3] R. K. Su, H. Q. Song and T. T. S. Kuo, *Phys. Rev.*, **C37**(1988), 1770.
- [4] G. T. Zheng and R. K. Su, *Chinese Science Bulletin*, **35**(1990), 1874.
- [5] 郑国桐,沈雪娥,苏汝铿,计算物理,**7**(1990),153.
- [6] R. K. Su and G. T. Zheng, *Jour. of Phys.*, **G16**(1990), 203.
- [7] T. Chen and R. K. Su, *High Energy Phys. and Nucl. Phys.*, **12**(1988), 131.
- [8] 郑国桐,苏汝铿,高能物理与核物理,**14**(1990),220.
- [9] V. Bernard, U. G. Meissner and I. Zahed, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 819.
- [10] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Lett.*, **B185**(1987), 304.
- [11] A. L. 费特, J. D. 瓦立克,多粒子系统的量子理论,科学出版社,北京,1984, p. 313.

## Vertex Corrections and one $\sigma$ Exchange Potential at Finite Temperature

ZHENG GUOTONG

(Department of Physics, Hangzhou Teacher's College, 310012)

SU RUKENG

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433)

### ABSTRACT

By using the imaginary-time Green's function method in finite temperature field theory, we calculate the effects of the three-line vertex function on finite temperature one  $\sigma$ -meson exchange potential. It is found that the finite temperature coupling constant of the sigma-nucleon interaction decreases as the temperature increases, it approaches zero when temperature arrives at 210 MeV. This result is quite similar to that the temperature dependence of coupling constant given by Nambu-Jona-Lasinia model at the quark level.