第16卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 4
1992年4月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Apr., 1992

神保方法适用条件的一个猜测*

马中骐
（中国科学院高能物理研究所，北京 100039）

摘　　要

根据神保（Jimbo）定理建立起来的计算带谱参数的杨-Baxter方程解的方法，取决于在量子包络代数给定不可约表示中与最低负根相对应的 e_0 表示矩阵的存在。本文给出 e_0 表示矩阵存在条件的一个猜测，并举一个简单例子（U_qC_2 的伴随表示），说明不满足此条件时 e_0 表示矩阵确实不存在。

一、引　　言

近年来，寻找杨-Baxter方程解的问题成为理论物理学家和数学家共同关心的一个热门课题。根据神保（Jimbo）定理[1]建立起来的一个构造带谱参数的杨-Baxter方程解的系统方法[2]，已被用来计算与各种量子包络代数各种表示相联系的杨-Baxter方程解[2,3]。这类解称为三角解。由三角解立刻可用标准方法得到杨-Baxter方程相应的有理解、辫子群的表示和 link 多项式。

但是，应用这一系统方法的关键是，在所讨论的量子包络代数给定的不可约表示中，与最低负根相对应的生成元 e_0 的表示矩阵是否存在。神保[4]给出了在 U_qA_l 代数中 e_0 表示矩阵的计算方法，宋行长[5]用量子包络代数玻色实现的方法，简洁地证明了这 e_0 表示矩阵满足量子代数关系。在其他量子包络代数中 e_0 表示矩阵形式尚没有一般讨论，只见到就若干具体表示给出的具体形式，很可能这一般形式是不存在的。

在计算杨-Baxter方程有理解时，Drinfeld 引入了 Yangian 代数[6]。因为有理解可由三角解取极限得到，所以有理解存在的条件[6]很可能就是 e_0 表示矩阵存在的条件。这是关于神保方法适用条件的一种猜测。

本文的结构如下。第二节给出 e_0 表示矩阵的定义及其满足的代数关系，并简略介绍了 U_qA_l 代数中 e_0 表示矩阵的形式。第三节提出 e_0 表示矩阵存在条件的一种猜测。第四节就破坏此条件的一个简单例子，即 U_qC_2 的伴随表示，证明 e_0 表示矩阵确实不存在。

二、e_0 表示矩阵

秩为 l 的李代数 $\mathscr{G}$，有 l 个素根 r_j 和 l 个基本主权 λ_j，它们满足

本文1991年8月17日收到。
* 国家自然科学基金资助。

$$\langle r_i, r_j\rangle = d_i a_{ij},\ \langle r_i, \lambda_j\rangle = d_i\delta_{ij},$$
$$d_i = \frac{1}{2}\langle r_i, r_i\rangle, \tag{1}$$

其中 a_{ij} 为 Cartan 矩阵．本文采用规一化方案，使短根长度之半 $d_i = 1/2$．由 (1) 可推出

$$r_i = \sum_j \lambda_j a_{ji},\ \ \lambda_j = \sum_i r_i (a^{-1})_{ij},$$
$$\langle \lambda_i, \lambda_j\rangle = d_i (a^{-1})_{ij}. \tag{2}$$

$\mathscr{G}$ 的有限维不可约表示可用最高权 N 描写，N 是基本主权 λ_j 的非负整数线性组合．

量子包络代数 $U_q\,\mathscr{G}$ 中包含单位元 1，生成元 h_i, e_i, f_i, $i = 1, 2, \cdots, l$, 和量子参数 q，它们满足如下量子代数关系：

$$\left.\begin{array}{l} q_i = q^{d_i} \neq \pm 1 \text{或} 0,\ \ k_i = q_i^{h_i}, \\ [h_i, h_j] = 0, \\ [h_i, e_j] = a_{ij} e_j,\ [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij}(q_i^{2h_i} - q_i^{-2h_i})/(q_i^2 - q_i^{-2}), \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{1-a_{ij}} (-1)^n \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ n \end{bmatrix}_{q_i^2} e_i^{1-a_{ij}-n} e_j e_i^n = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{1-a_{ij}} (-1)^n \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ n \end{bmatrix}_{q_i^2} f_i^{1-a_{ij}-n} f_j f_i^n = 0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, l$,

$$[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}},$$
$$[m]_q! = [m]_q [m-1]_q \cdots [1]_q,$$
$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[m]_q! [n-m]_q!},$$
$$[0]_q! = 1,\ [-m]_q! \rightarrow \infty, \tag{4}$$

当下标是 q 时，下标常省略．本文只讨论 q 不是单位根的情况，因此

$$[m]_q = [m] \neq 0,\ \text{如果}\ m \neq 0,$$

引入 $\mathscr{G}$ 的最低负根 r_0

$$r_0 = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j r_j,\ \ \alpha_j \leqslant 0. \tag{5}$$

推广 Cartan 矩阵

$$a_{00} = 2,\ d_0 = \frac{1}{2}\langle r_0, r_0\rangle,$$
$$a_{0i} = d_0^{-1}\langle r_0, r_i\rangle,\ \ a_{i0} = d_i^{-1}\langle r_i, r_0\rangle, \tag{6}$$

d_0 与长根的 d_i 相等．定义

$$k_0 = \prod_{j=1}^{l} k_j^{\alpha_j},\ \ \ h_0 = \sum_{j=1}^{l} h_j \alpha_j d_j / d_0. \tag{7}$$

如果在量子包络代数 $U_q\mathscr{G}$ 的给定不可约表示中,存在与 r_0 相对应的生成元 e_0 和 f_0 表示矩阵(为方便起见,仍用 e_0 和 f_0 表示),它们与其它 h_i, e_i 和 f_i 一起满足 (3) 式,其中 $i,j=0,1,2,\cdots,l$, 我们称为 e_0 表示矩阵存在.

如果在 $U_q\mathscr{G}$ 某不可约表示中满足 (3) 式的 e_0 存在,则根据神保定理[1],可以用标准的方法[2],计算与此不可约表示相联系的带谱参数的杨-Baxter 方程解. 可惜不是所有 $U_q\mathscr{G}$ 代数的所有有限维不可约表示都可找到相应的 e_0 矩阵. 但 U_qA_l 代数的 e_0 矩阵是确实存在的.下面将简单介绍宋行长用玻色算子计算 U_qA_l 任意有限维表示中 e_0 矩阵形式的方法.

设有 $l+1$ 个玻色产生和消灭算子 $a_i,a_i^\dagger,i=1,2,\cdots,l+1$, 它们满足

$$[a_i,a_j^\dagger]=\delta_{ij},\ [a_i,a_j]=[a_i^\dagger,a_j^\dagger]=0, \tag{8}$$

引入粒子数算子 N_i,

$$N_i=a_i^\dagger a_i,\ a_ia_i^\dagger=N_i+1, \tag{9}$$

在粒子数表象中, N_i 对角化, a_i 和 $a_i^\dagger$ 互为转置.

量子化后, N_i 算子不变,而 a_i 和 $a_i^\dagger$ 变成 b_i 和 $b_i^\dagger$:

$$\begin{aligned} b_i&=a_i\left\{\frac{[N_i]}{N_i}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{[N_i+1]}{N_i+1}\right\}^{\frac{1}{2}}a_i,\\ b_i^\dagger&=\left\{\frac{[N_i]}{N_i}\right\}^{\frac{1}{2}}a_i^\dagger=a_i^\dagger\left\{\frac{[N_i+1]}{N_i+1}\right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\frac{[N_i]}{N_i}=\frac{q^{N_i}-q^{-N_i}}{N_i(q-q^{-1})}=\frac{\sinh(\eta N_i)}{N_i\sinh\eta},\ q=e^\eta,$$

是有确切定义的量. 定义

$$e_i=b_i^\dagger b_{i+1},\ f_i=b_{i+1}^\dagger b_i,\ h_i=N_i-N_{i+1}, \quad i=1,2,\cdots,l. \tag{11}$$

在粒子数表象中, $\tilde{h}_i=h_i$, $e_i=\tilde{f}_i$. 直接验证可知它们满足 U_qA_l 代数的对易关系(3).

A_l 代数中的最低负根为

$$r_0=-\sum_{j=1}^{l}r_j. \tag{12}$$

因此

$$\begin{aligned} &d_0=d_j=1/2,\\ &a_{ij}=2\delta_{ij}-\delta_{i(j+1)}-\delta_{i(j-1)}-\delta_{i0}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{j0},\\ &i,j=0,1,2,\cdots,l. \end{aligned} \tag{13}$$

很明显,令

$$e_0=cb_{l+1}^\dagger b_1,\ f_0=c^{-1}b_1^\dagger b_{l+1},\ h_0=N_{l+1}-N_1, \tag{14}$$

其中 c 可与所有算符 e_i, f_i 和 h_i 对易,则根据对称性,这些算符满足 (3) 式,其中

$$i,j=0,1,2,\cdots,l.$$

现在关键是如何选取 c, 使 e_0 和 f_0 可用 e_j, f_j 和 $h_j(1\leqslant j\leqslant l)$ 表出.

令

$$\begin{aligned} E_{31}&=f_2f_1-q^{-1}f_1f_2=q^{N_2}b_3^\dagger b_1,\\ E_{41}&=f_3E_{31}-q^{-1}E_{31}f_3=q^{N_2+N_3}b_4^\dagger b_1, \end{aligned}$$

依此类推

$$E_{(l+1)1}=f_lE_{l1}-q^{-1}E_{l1}f_l=q^{N_2+N_3+\cdots+N_l}b_{l+1}^{\dagger}b_1,$$

$E_{(l+1)1}$ 确可以用 f_j，$1\leqslant j\leqslant l$，表出。令

$$e_0=q^{\frac{1}{l+1}\sum\limits_{j=1}^{l}(l-2j+1)h_j}E_{(l+1)1}=q^{\frac{l-1}{l+1}\sum\limits_{j=1}^{l+1}N_j}b_{l+1}^{\dagger}b_1,\qquad(15)$$

$$f_0=\tilde{e}_0|_{q\to q^{-1}}=q^{-\frac{l-1}{l+1}\sum\limits_{j=1}^{l+1}N_j}b_1^{\dagger}b_{l+1},$$

则 e_0 和 f_0 都可用 h_j，e_j 和 f_j 表出，而且因为"粒子数守恒"，$\sum\limits_{j=1}^{l+1}N_j$ 可与所有 e_j、f_j 和 h_j 对易，即 $c=q^{\frac{l-1}{l+1}\sum\limits_{j=1}^{l+1}N_j}$ 满足上述条件。例如 U_qA_2 代数

$$e_0=q^{\frac{1}{3}(h_1-h_2)}(f_2f_1-q^{-1}f_1f_2),$$
$$f_0=q^{-\frac{1}{3}(h_1-h_2)}(e_1e_2-qe_2e_1).\qquad(16)$$

三、神保方法适用的条件

如果 e_0 表示矩阵存在，则可通过标准方法计算得带谱参数的杨-Baxter 方程三角解，并由此得到相应的有理解[3]. Drinfeld 用 Yangian 代数计算杨-Baxter 方程有理解时，曾以定理形式(文献[6]定理七)未予证明地指出有理解存在的必要条件.根据我们的计算经验，将 Drinfeld 条件加以推广，作为一种猜测，提出 e_0 表示矩阵存在的条件，即神保方法适用的条件.

猜测：设单纯李代数 $\mathscr{G}$ 最低负根 r_0 由(5)式给出，

且　　$\alpha_{j_1}=\alpha_{j_2}=\cdots=\alpha_{j_s}=-1$，$\alpha_k=-d_0/d_k\neq-1$

则在 $U_q\mathscr{G}$ 最高权表示 N 中 e_0 表示矩阵存在，其中

$$N=\sum_{i=1}^{s}n_i\lambda_{j_i}\ \text{或}\ N=\lambda_k,$$

n_i 为非负整数.

U_qA_l 代数中，$r_0=-\sum\limits_{j=1}^{l}r_j$，故在所有最高权表示中 e_0 表示矩阵都存在.

U_qB_l，$l\geqslant 3$，代数中，$r_0=-\lambda_2=-r_1-2\sum\limits_{j=2}^{l}r_j$，故在最高权表示 $N=n\lambda_1$ 和 $N=\lambda_l$ 中 e_0 表示矩阵存在。注意 $N=\lambda_1$ 为矢量表示，$N=\lambda_l$ 为旋量表示.

U_qC_l，$l\geqslant 2$，代数中，$r_0=-2\lambda_1=-2\sum\limits_{j=1}^{l-1}r_j-r_l$，故在最高权表示 $N=n\lambda_l$ 和 $N=\lambda_j(j<l)$ 中 e_0 表示矩阵存在.

U_qD_l，$l\geqslant 4$，代数中，$r_0=-\lambda_2=-r_1-2\sum\limits_{j=2}^{l-2}r_j-r_{l-1}-r_l$，故在最高权表示 $N=n_1\lambda_1+n_2\lambda_{l-1}+n_3\lambda_q$ 中 e_0 表示矩阵存在，其中 $N=\lambda_1$ 为矢量表示，$N=\lambda_{l-1}$ 和

λ_l 为旋量表示。

U_qG_2 代数中，$r_0=-\lambda_1=-2r_1-3r_2$，只有在最小表示 $N=\lambda_2$ (7 维)中 e_0 表示矩阵存在。

U_qF_4 代数中，$r_0=-\lambda_1=-2r_1-3r_2-4r_3-2r_4$，只有在最小表示 $N=\lambda_4$ (26 维)中 e_0 表示矩阵存在。

U_qE_6 代数中，$r_0=-\lambda_6=-r_1-2r_2-3r_3-2r_4-r_5-2r_6$，在最高权表示 $N=n_1\lambda_1+n_2\lambda_5$ 表示中 e_0 表示矩阵存在，其中 $N=\lambda_1$ 和 $N=\lambda_5$ 是互为共轭的最小表示 (27 维)。

U_qE_7 代数中，$r_0=-\lambda_1=-2r_1-3r_2-4r_3-3r_4-2r_5-r_6-2r_7$，在表示 $N=n\lambda_6$ 中 e_0 矩阵存在。$N=\lambda_6$ 是最小表示 (56 维)。

U_qE_8 代数中，$r_0=-\lambda_1=-2r_1-3r_2-4r_3-5r_4-6r_5-4r_6-2r_7-3r_8$，在所有表示中 e_0 表示矩阵都不存在。

四、例　　子

具体讨论一个 e_0 表示矩阵不存在的最简单的例子，即 U_qC_2 (它等价于 U_qB_2) 代数的伴随表示，$N=2\lambda_1$。推广的 Cartan 矩阵为

$$a=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

其中行(列)指标为 0,1,2. 最低负根为

$$r_0=-2r_1-r_2=-2\lambda_1,$$

因此

$$k_0=k_1^{-2}k_2^{-1},\quad h_0=-h_1-h_2.$$

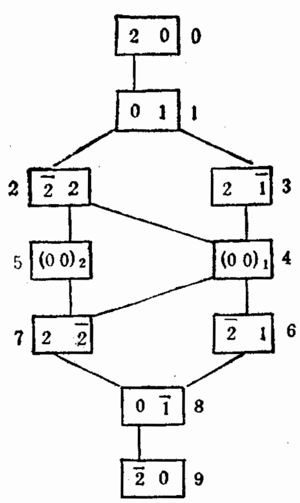

图 1　U_qC_2 伴随表示的权图和状态的重新编号

伴随表示是 10 维表示，它的权图见图 1。为了表述方便起见，将各状态重新编号，亦列于图 1。

应用标准方法[3]，可计算得生成元的表示矩阵为

$$e_1=\bar{f}_1=[2]^{\frac{1}{2}}(E_{01}+E_{12}+E_{34}+E_{46}+E_{78}+E_{89}),$$

$$e_2=\bar{f}_2=E_{13}+E_{24}+E_{47}+\left(\frac{[6]}{[3][2]}\right)^{\frac{1}{2}}(E_{25}+E_{57})+E_{68},$$

$$h_1=2(E_{00}-E_{22}+E_{33}-E_{66}+E_{77}-E_{99}),$$

$$h_2=E_{11}-E_{33}+2(E_{22}-E_{77})+E_{66}-E_{88},$$

$$h_0=2(E_{99}-E_{00})-E_{11}-E_{33}$$

$$+ E_{66} + E_{88},$$

其中矩阵基 E_{ab} 定义为

$$(E_{ab})_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd},$$

根据 r_0 具体形式知 e_0 和 f_0 的可能形式为

$$e_0 = a_1E_{40} + a_2E_{50} + a_3E_{61} + a_4E_{83} + a_5E_{94} + a_6E_{95},$$

$$f_0 = b_1E_{04} + b_2E_{05} + b_3E_{16} + b_4E_{38} + b_5E_{49} + b_6E_{59},$$

由条件 $[e_0, f_j] = 0$，$[f_0, e_j] = 0$，$j = 1,2$，定出

$$-\left(\frac{[6]}{[3][2]}\right)^{\frac{1}{2}} a_2 = -\left(\frac{[6]}{[3][2]}\right)^{\frac{1}{2}} a_6 = a_1 = a_3 = a_4 = a_5,$$

$$-\left(\frac{[6]}{[3][2]}\right)^{\frac{1}{2}} b_2 = -\left(\frac{[6]}{[3][2]}\right)^{\frac{1}{2}} b_6 = b_1 = b_3 = b_4 = b_5,$$

由此得

$$[e_0, f_0] = a_1b_1\left\{\frac{[4][3]}{[6]}(E_{99} - E_{00}) + E_{88} + E_{66} - E_{11} - E_{33}\right\}$$

$$\neq \frac{q^{2h_0} - q^{-2h_0}}{q^2 - q^{-2}},$$

容易验证量子 Serre 关系

$$e_0^2e_1 - (q^2 + q^{-2})e_0e_1e_0 + e_1e_0^2 = 0,$$

也不满足，即 e_0 表示矩阵不存在。因此不能用神保方法计算与 U_qC_2 代数伴随表示相联系的带谱参数的杨-Baxter 方程解。计算表明，此解用聚合方法[7]也无法得到。这样的解是否存在目前尚不清楚。

作者感谢神保教授、宋行长教授和郭汉英教授的有益讨论和鼓励。

参　考　文　献

[1] M. Jimbo, *Commun. Math. Phys.*, **102**(1986), 537.

[2] Zhong-Qi Ma, *Commun. Theor. Phys.*, **15**(1991), 37.

[3] A. Kuniba, *J. Phys.*, **A23**(1990), 1349; Zhong-Qi Ma, *J. Phys.*, **A24**(1991), 433; Bo-Yuan Hou and Zhong-Qi Ma, *J. Phys.*, **A24**(1991), 1363; Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou, Zhong-Qi Ma and Yu-Dong Yin, *J. Math. Phys.*, **32**(1991), 2210; Bo-Yu Hou, Bo-Yuan Hou, Zhong-Qi Ma and Yu-Dong Yin, to appear in Mod. Phys. Lett.

[4] M. Jimbo, Quantum R matrix related to the generalized Toda system: an algebraic approach, Lecture Notes on Physics, No. 246, p. 335.

[5] 宋行长，1990 年在中国高等科技中心 (CCAST) 关于量子群和共形场论工作月上的报告；Xing-Chang Song, J. Phys., **A23**(1990), L821.

[6] V. G. Drinfeld, *Sov. Math. Dokl.*, **32**(1985), 254.

[7] M. Jimbo, Introduction to the Yang-Baxter equation, in "Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics" ed. by C. N. Yang and M. L. Ge, P. 111, World Scientific, Singapore, 1989.

A Conjecture for the Effecture Condition of Jimbo's Method

MA ZHONGQI

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing* 100039)

ABSTRACT

The method for constructing the spectrum-dependent solutions to the Yang-Baxter equation, according to Jimbo's theorem, is based on the existence of the representation matrix of e_0, corresponding to the lowest negative root, in an irreducible representation of a quantum enveloping algebra. In this paper a conjecture for the existent condition of the representation matrix of e_0 is made. As an example, the adjoint representation of U_qC_2 is discussed where the representation matrix e_0 does not exist because the existent condition is violated.