第16卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 6
1992年6月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS June, 1992

CHHE-MRT 方法及其在三体问题中的应用

许定安 李世清 刘福庆
(武汉大学物理系 核科学与核技术研究所,武汉 430072)

焦淑卿
(武汉大学空间物理系,武汉 430072)

摘 要

本文在 Dzhibuti 的三体问题 "Hybrid" 方法的基础上，提出了 "CHHE-MRT" 方法，克服了 "Hybrid" 方法中所遇到的振荡的 Bessel 函数无穷积分的困难，使 "Hybrid" 方法可以很方便地使用 Gauss 势、指数势及 Yukawa 势研究三体束缚态问题以及散射态问题。

一、引 言

在坐标空间求解核少体问题，虽然束缚态有解；但是，由于存在边界条件困难，使散射态问题很难求解。在动量空间中求解三体散射的 Lippmann-Schwinger 积分方程，由于不同道间可能发生跃迁，存在积分核不紧致、解不唯一的困难。六十年代初，Faddeev 在动量空间中建立了三体问题的理论方程[1]，克服了 L-S 方程积分核不紧致的困难。可是，由于在方程中引进了二体离壳 t 矩阵，从而在现实核力条件下，经双重球谐展开后 Faddeev 方程化为二维 Cauchy 型奇异积分方程，这给人们实际计算带来了困难。通常，有两种方法可将 Faddeev 方程约化为一维积分方程。一种方法是采用可分势近似[2,3]，虽然近年来人们在这方面开展了一系列的工作[4-6]，J. Haidenbauer 等人[7]利用 EST[4] 方法采用 Paris 势[8]对 n-d 散射进行了计算，Y. Koike 利用 LOS Alamos 型 Malfliet-Tjon 势[9]对 n-d 散射进行了计算[10]，但严格地讲，定域势的二体 t-矩阵是不可能展开成可分形式的[11]，因此，可分势方法只是在一定的能量、动量范围内适用于定域势。利用超球函数展开的 "Hybrid" 方法[12]也可将 Faddeev 方程约化为一维积分方程，并可解决一些 1 + 1 + 1 的所谓"真正三体"的散射态问题，但是由于存在一个振荡的 Bessel 函数无穷积分的困难，使这种方法在二体作用势的选取上存在一定的局限性，因此，Jibuti 等人只用了收敛很快的 Gauss 势对上述问题进行了研究。本文利用"连续超球调和展开动量表象变换" (CHHE-MRT) 方法[13]，将积分核中出现的振荡的 Bessel 函数先予积掉，

本文 1991 年 6 月 25 日收到。

并采用 Gauss、指数、Yukawa 等作用势求解三体束缚态和散射态，从而使"Hybrid"方法在向实际应用方面迈进了一步。

第二节，简略介绍三体问题中的 CHHE-MRT 方法。第三节，给出三体问题的解。作为对这种方法的一个检验，在第四节中，给出了分别采用 Gauss 势、Yukawa 势、指数势计算的 ^3H 的结合能和束缚态超径向波函数。

二、CHHE-MRT 方法

三粒子超球坐标空间和超球动量空间分别如图 1 和图 2 所示。

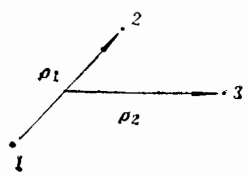

图 1　三粒子超球坐标空间

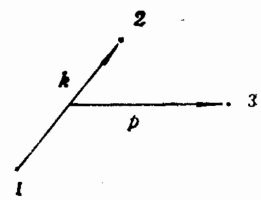

图 2　三粒子超球动量空间

定义

$$\langle \boldsymbol{k}', \boldsymbol{p}' | V(\rho_1) | \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p} \rangle = \sum_{[L'][L]} \Phi_{[L']}(\Omega^{\kappa'}) V_{[L'][L]}(\kappa', \kappa) \Phi^*_{[L]}(\Omega^{\kappa}), \tag{1}$$

式中

$[L] \equiv l_k, m_k, l_p, m_p, K$,

$K = l_k + l_p + 2n$ 为超动量，

n 为相应于超球振动角 ϕ^κ 的超球量子数，

$\Omega^\kappa \equiv \hat{k}, \hat{p}, \phi^\kappa$ 为超球动量空间的五个角量，

$\Phi_{[L]}(\Omega^\kappa)$ 为超球函数[14]，

根据 6 维平面波的 Neumann 展开式

$$V(\rho_1) | \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} V(\rho_1) \sum_{\substack{l_k, m_k \\ l_p, m_p}} i^{l_k + l_p} Y^*_{l_k, m_k}(\hat{k}) Y_{l_k, m_k}(\hat{\rho}_1) j_{l_k}(k\rho_1) \cdot Y^*_{l_p, m_p}(\hat{p}) Y_{l_p, m_p}(\hat{\rho}_2) \frac{J_{l_p + \frac{1}{2}}(p\rho_2)}{(p\rho_2)^{1/2}}, \tag{2}$$

为在三粒子动量空间计算二体作用矩阵元 $V_{[L'][L]}(\kappa', \kappa)$，CHHE-MRT 方法令

$$V(\rho_1) j_{l_k}(k\rho_1) = \int_0^\infty dv f_{l_k}(k, v) j_{l_k}(v\rho_1) \tag{3}$$

式中 $f_{l_k}(k, v)$ 称为 CHHE-MRT 函数。利用 CHHE-MRT 函数，我们可将三粒子动量空间中二体作用矩阵元的计算分解成两步。首先，由坐标空间中的二体作用势 $V(\rho_1)$ 求出 CHHE-MRT 函数[13]；然后再在动量空间由 CHHE-MRT 函数求得 $V_{[L'][L]}(\kappa', \kappa)$。

为简略起见,本文略去其演算过程，直接给出三体问题中的 CHHE-MRT 函数的表达式如下:

$$f_{l_k}(k,v)=v\sqrt{\frac{v}{k}}\int_0^\infty d\rho_1\rho_1 V(\rho_1)J_{l_k+\frac{1}{2}}(k\rho_1)J_{l_k+\frac{1}{2}}(v\rho_1). \tag{4}$$

由 Bateman 公式[15],并利用 CHHE-MRT 函数,可将(2)式整理成

$$V(\rho_1)|\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}\rangle=\int_0^\infty dv f_{l_k}(k,v)\sum_{[L]} i^K\Phi^*_{[L]}(\Omega^{\kappa_v})\Phi_{[L]}(\Omega^\rho)\frac{J_{K+2}(\kappa_v\rho)}{(\kappa_v\rho)^2}, \tag{5}$$

此处

$$\kappa_v=\sqrt{v^2+p^2},$$
$$\rho=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2},$$
$$\Omega^{\kappa_v}\equiv\hat{k},\hat{p},\phi^{\kappa_v},$$
$$\phi^{\kappa_v}=\arccos\left(\frac{\kappa}{\kappa_v}\cos\phi^\kappa\right).$$

利用超球函数的正交性、贝塞尔函数的正交性及 Dirac 函数公式

$$\delta[f(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \tag{6}$$

并利用 CHHE-MRT 函数,求得

$$\langle\boldsymbol{k}',\boldsymbol{p}'|V(\rho_1)|\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}\rangle=\sum_{[L']}\Phi_{[L']}(\Omega^{\kappa'})\left\{\frac{f_{l_k}(k,v)}{\kappa'^4 v}\right\}\Phi^*_{[L']}(\Omega^{\kappa_v}), \tag{7}$$

由(1)式和(7)式可得三体动量空间二体作用矩阵元为

$$V_{[L'][L]}(\kappa',\kappa)=\int d\Omega^\kappa\Phi^*_{[L']}(\Omega^{\kappa_v})\left\{\frac{f_{l_k}(k,v)}{\kappa'^4 v}\right\}\Phi_{[L]}(\Omega^\kappa). \tag{8}$$

三、三体问题的解

设三粒子动量分别为 $\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$ 和 $\boldsymbol{k}_3$. 定义 Jacobi 动量

$$\boldsymbol{p}_{ij}=\frac{m_j\boldsymbol{k}_i-m_i\boldsymbol{k}_j}{\sqrt{m_im_j(m_i+m_j)}}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{p}_k=\frac{m_k(\boldsymbol{k}_i+\boldsymbol{k}_j)-(m_i+m_j)\boldsymbol{k}_k}{\sqrt{m_k(m_i+m_j)(m_i+m_j+m_k)}}, \tag{10}$$

式中 i、j、k 为 1、2、3 的任意循环置换.

由 L-S 方程

$$T=V+VG_0T \tag{11}$$

求得三体束缚态的二体 T 矩阵为

$$T_{[L'][L]}(\kappa_0,\kappa',\kappa)=V_{[L'][L]}(\kappa',\kappa)-\frac{2}{\hbar^2}\sum_{[L'']}\int d\kappa''\frac{\kappa''^5}{\kappa''^2+\kappa_0^2}V_{[L'][L'']}(\kappa',\kappa'')T_{[L''][L]}(\kappa_0,\kappa'',\kappa), \tag{12}$$

三体束缚态结合能为

$$\varepsilon = \frac{\kappa_0^2}{2}. \tag{13}$$

三体束缚态波函数的超径向函数满足方程

$$\begin{aligned}\varphi_{K_k}^{l_{p_{ij}},l_{p_k}}(\kappa) = &-\frac{2}{\hbar^2}\frac{1}{\kappa^2+\kappa_0^2}\int d\kappa'\kappa'\Bigg\{\sum_{\substack{K_i,l_{p_{jk}},l_{p_i}\\ l'_{p_{ij}},l'_{p_k}}} {}^{k}\langle l'_{p_{ij}}l'_{p_k}|l_{p_{jk}}l_{p_i}\rangle_{K_i}^{i}\\ &\cdot T_{K_kK_i}^{l_{p_{ij}}l_{p_k},l'_{p_{ij}}l'_{p_k}}\varphi_{K_i}^{l_{p_{jk}}l_{p_i}}(\kappa') + \sum_{\substack{K_j,l_{p_{ki}},l_{p_j}\\ l''_{p_{ij}},l''_{p_k}}} {}^{k}\langle l''_{p_{ij}}l''_{p_k}|l_{p_{ki}}l_{p_i}\rangle_{K_j}^{j}\\ &\cdot T_{K_kK_j}^{l_{p_{ij}}l_{p_k},l''_{p_{ij}}l''_{p_k}}\varphi_{K_j}^{l_{p_{ki}}l_{p_j}}(\kappa')\Bigg\},\end{aligned} \tag{14}$$

式中 ${}^{k}\langle l'_{p_{ij}}l'_{p_k}|l_{p_{jk}}l_{p_i}\rangle_{K_i}^{i}$等为 Reynol-Revai 系数[16,17]。三体散射态二体 T 矩阵为

$$\begin{aligned}T_{[L'][L]}(\kappa_0,\kappa',\kappa) &= V_{[L'][L]}(\kappa',\kappa)\\ &-\frac{2}{\hbar^2}\sum_{[L'']}\int d\kappa''\frac{\kappa''^5}{\kappa''^2-\kappa_0^2-i\varepsilon}V_{[L'][L'']}(\kappa',\kappa'')T_{[L''][L]}(\kappa_0,\kappa'',\kappa'),\end{aligned} \tag{15}$$

三体散射态的超球径向方程为

$$\begin{aligned}\varphi_{K_k}^{l_{p_{ij}}l_{p_k}}(\kappa) = &\frac{\delta(\kappa-\kappa_0)}{\kappa_0^5}\delta_{K_kK_0} - \frac{2}{\hbar^2}\frac{1}{\kappa^2-\kappa_0^2-i\varepsilon}\cdot\int d\kappa'\kappa'\\ &\cdot\Bigg\{\sum_{\substack{K_i l_{p_{jk}}l_{p_i}\\ l'_{p_{ij}}l'_{p_k}}}\langle l'_{p_{ij}}l'_{p_k}|l_{p_{jk}}l_{p_i}\rangle_{K_i}\langle l_{p_{ij}}l_{p_k}|l_{p_{jk}}l_{p_i}\rangle_{K_0}\\ &\cdot T_{K_kK_i}^{l_{p_{ij}}l_{p_k}l'_{p_{ij}}l'_{p_k}}\varphi_{K_i}^{l_{p_{jk}}l_{p_i}}(\kappa')\\ &+\sum_{\substack{K_j l_{p_{ki}}l_{p_j}\\ l''_{p_{ij}}l''_{p_k}}}\langle l''_{p_{ij}}l''_{p_k}|l_{p_{ki}}l_{p_j}\rangle_{K_j}\langle l_{p_{ij}}l_{p_k}|l_{p_{ki}}l_{p_i}\rangle_{K_0}\\ &\cdot T_{K_kK_j}^{l_{p_{ij}}l_{p_k}l''_{p_{ij}}l''_{p_k}}\varphi_{K_j}^{l_{p_{ki}}\cdot l_{p_j}}(\kappa')\Bigg\}.\end{aligned} \tag{16}$$

四、计 算 结 果

作为 CHHE-MRT 方法的一个检验，我们采用了如下六种定域势对 ^{3}H 束缚态进行了计算，并取 $K=0$。

1. Gauss-Baker 势[18] $V=V_0e^{-\mu^2r^2}$，$V_0=-51.5\text{MeV}$，$\mu^2=0.3906\text{fm}^{-2}$。
2. Gauss-Volkov 势[19] $V=V_{01}e^{-\mu_1^2r^2}-V_{02}e^{-\mu_2^2r^2}$，$V_{01}=144.863\text{MeV}$，
   $\mu_1^2=1.4872\text{fm}^{-2}$，$V_{02}=83.3426\text{MeV}$，$\mu_2^2=0.3906\text{fm}^{-2}$。
3. Yukawa-Schwager 势[20] $V=V_0e^{-\mu r}/r$，$V_0=-65.246\text{MeV-fm}$，

$\mu = 0.6329\text{fm}^{-1}$.

4. Yukawa-Payne 势[21] $V = V_0 e^{-\mu r}/r$, $V_0 = -58.795\text{MeV-fm}$, $\mu = 0.723\text{fm}^{-1}$.

5. Yukawa-Malfliet-Tjon 势[22] $V = -V_{01}\dfrac{e^{-\mu_1 r}}{r} + V_{02}\dfrac{e^{-\mu_2 r}}{r}$,

$V_{01} = 626.883\text{MeV-fm}$, $\mu_1 = 1.550\text{fm}^{-1}$, $V_{02} = 1438.72\text{MeV-fm}$, $\mu_2 = 3.110\text{fm}^{-1}$.

6. 指数势 $V = V_0 e^{-\mu r}$, $V_0 = -170.03\text{MeV}$, $\mu = 1.469\text{fm}^{-1}$.

在数值计算方程 (14) 时,采用了迭代法,并选用了两种不同的试探函数 $\varphi_1 = e^{-\kappa}$, $\varphi_2 = \kappa e^{-0.5\kappa}$. 由两种不同试探函数计算所得的结果,相差不足0.1%,几乎完全吻合,且收敛速度均很快,一般只需迭代 2—3 次. 计算所得的 ^{3}H 结合能和超径向波函数分别列在表和图 3、图 4 中.

表 1 ^{3}H 结合能 (MeV)

势	GB	GV	YS	YP	YM	EP
结合能	9.356	7.814	21.920	8.389	7.982	16.602

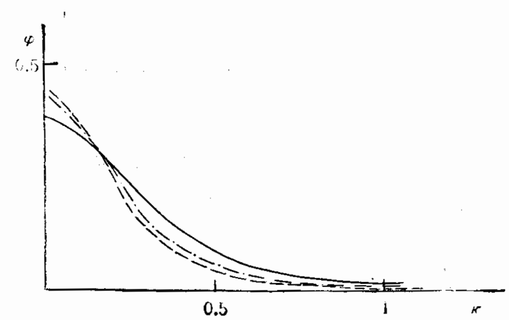

图 3 利用 Gauss 势、指数势得到的^{3}H束缚态超径向波函数 ($K = 0$)
GB-------- GV-·-·-·- EP——

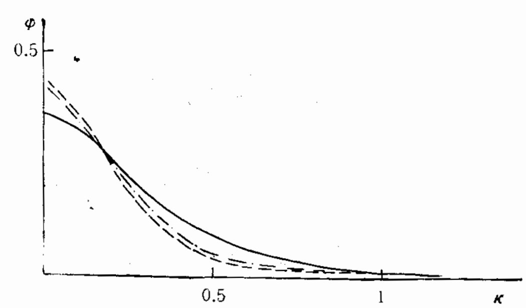

图 4 利用 Yukawa 势得到的 ^{3}H 束缚态超径向波函数 ($K = 0$)
YM------ YP-·-·- YS——

参　考　文　献

[1] L. D. Faddeev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **39**(1960), 1459; *Sov. Phys. JETP.*, **12**(1961), 1014.
[2] E. O. Alt et al., *Nucl. Phys.*, **1**(1967), 167.
[3] R. Amado. *Phys. Rev.*, No**132**(1963), 485; *Ann. Rev. Nucl, Sci*, No**19**(1969), 61.
[4] D. J. Ernst et al., *Phys. Rev.*, **C8**(1973), 46.
[5] S. K. Adhikari et al., *Nucl. Phys.*, **A241**(1975), 429.
[6] S. K. Adhikari et al., *Phys. Rev.*, **C36**(1987), 1275.
[7] J. Haidenbauer et al., *Phys. Rev.*, **C32**(1985), 1424.
[8] M. Lacombe et al., *Phys. Rev.*, **C21**(1980), 861.
[9] J. L. Friar et al., *Phys. Rev.*, **C42**(1990), 2310.
[10] Y. Koike, *Phys. Rev.*, **C42**(1990), 2286.
[11] T. A. Osbron, *J. Math. Phys.*, No**14**, **373**(1973), 1485.
[12] R. I. Dzhibuti et al., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **40**(5) (1984), 746; **41**(4) (1985), 554; **43**(4) (1986), 530.
[13] F. Q. Liu et al., *ACTA Mathematica Sci.*, **9**(3) (1989), 355.
[14] J. L. Ballot et al., *Annals of Phys.*, **127**(1980), 62.
[15] G. N. Watson, A Treatise in the Theory of Bessel Functions, Cambridge Uni. Press, (1962).
[16] J. Raynal et al., *Nuovo Cimento*, **A68**(1970), 612.
[17] R. I. Dzhibuti et al., Metod gipersfericheskikh funktsii V kvantovoi mekhanike neskol' kikhtel, Tbilisi, Metsniereba, (1984).
[18] M. Beiver et al., *Lett, Nuovo Cimento*, **1**(1971), 584.
[19] A. B. Volkov, *Nucl. Phys. Rev.*, **74**(1965), 33.
[20] L. Tomio et al., *Phys. Rev.*, **C22**(1980), 28.
[21] G. L. Payne, *Phys. Rev.*, **C22**(1980), 823.
[22] R. A. Malfliet and J. A. Tion, *Nucl. Phys.*, **A127**(1969), 161.

CHHE-MRT Method and Its Application in Three-Body Problem

Xu Dingan　Li Shiqing

Liu Fuqing　Jiao Shuqing

(Physics Department, Wuhan University, 430072)

Abstract

Based on "Hybrid Method" by Dzhibuti, a CHHE-MRT method is suggested for three-body problem, which overcomes the difficulty of infinite integral of oscillatory Bassel functions in hybrid method, and enables us to study the bound states and scattering states of three-body problem by using Gauss, Exponential and Yukawa potential.