第16卷 第7期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 7
1992年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1992

周期性 WZNW 模型的交换代数

赵 柳
(西北大学现代物理所,西安 710069)

摘 要

利用自由场表示求出了在周期性边界条件下 WZNW 模型的 r 矩阵和交换代数,讨论了交换代数的量子对应以及它在 Hamiltonian 约化下的行为.

一、引 言

近年来,共形场、量子群及两者的关系都得到了众多的研究.量子群作为一种重要的对称性在二维共形不变理论中受到了越来越多的重视. 特别地,对著名的 WZNW 及 Toda 理论都发现了量子群对称性.

在经典水平上,与量子群对称性相应的是由经典 r 矩阵表征的经典交换代数,特别是二次型的 Sklyanin 代数及 Poisson-Lie 结构. Sklyanin 代数还被认为是比量子群更基本的一种数学结构.

对于 WZNW 模型,其经典交换代数,r 矩阵都作了深入的研究. Blok 首先根据自由场表示,在一个特定的边界条件下(始-末边界条件)求出了 $SL(2,\mathrm{R})$ WZNW 模型的 r 矩阵和交换代数[1]. 随后,Alekseev 和 Shatashvilli 将该工作推广到了"任意 Monodromy 阵"的情形,消除了具体边界条件对 r 矩阵及交换代数的限制[2]. 此外,Balog 等人还根据 WZNW 模型的手征特性给出了一些不同的 r 矩阵,这些 r 矩阵满足修正的 Yang-Baxter 方程,并被证明对应于非标准的量子群[3,4].

在本文中,我们将研究在周期性边界条件下 WZNW 模型的交换代数及 r 矩阵. 周期性边界条件相应于 Monodromy 矩阵为单位阵的情形,在这种条件下,Alekseev 等给出的 r 矩阵具有奇异行为. 利用自由场表示,我们求出了在这一情形下不奇异的 r 矩阵和相应的交换代数,证明了这些交换代数在非定域的手征变换下协变的条件是变换矩阵满足 Sklyanin 关系. 此外我们还简要讨论了量子情形以及 Hamiltonian 约化的问题. 值得注意的是,我们得到的 r 矩阵与 Gervais[5] 用离散化的方法在同样的边界条件下得到的结果相同. Hamiltonian 约化的结果保持这一 r 矩阵不变.

本文1991年9月7日收到.

二、$SL(2,R)$ WZNW 模型的自由场表示及周期性边界条件下的交换代数

我们考虑非紧李群 $SL(2,R)$ 上的 WZNW 模型. 根据模型的手征特性，可将 WZNW 场 $g(z,\bar{z})$ 写作如下的乘积

$$g(z,\bar{z})=g_R(z)\cdot g_L(\bar{z}). \tag{1}$$

我们考虑 $g(z,\bar{z})$ 的正手征部分 $g_R(z)$. 由于 $SL(2,R)$ 是非紧李群，我们可以对 $g_R(z)$ 作如下的 Gauss 分解

$$g_R(z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \chi & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\varphi} & 0\\ 0 & e^{-\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \psi\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中χ,ψ,φ 均为 z 的标量函数. WZNW 模型的右手 Kac-Moody 流于是表为

$$J(z)\equiv\frac{\kappa}{2}\partial g_R g_R^{-1}=\frac{\kappa}{2}\begin{pmatrix}\partial\varphi-\chi\omega & \omega\\ \partial\chi+2\chi\partial\varphi-\chi^2\omega & -\partial\varphi+\chi\omega\end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中

$$\omega(z)=\partial\psi(z)e^{+2\varphi(z)}. \tag{4}$$

利用 $J(z)$ 满足的 Kac-Moody 流代数关系，不难得出场 χ, ω, φ 所满足的 Poisson 括号:

$$\{\varphi(x),\varphi(y)\}=\frac{1}{\kappa}\operatorname{sign}(x-y),$$

$$\{\omega(x),\chi(y)\}=\frac{4}{\kappa}\delta(x-y), \tag{5}$$

$$\{\varphi(x),\chi(y)\}=\{\varphi(x),\omega(y)\}=\{\chi(x),\chi(y)\}=\{\omega(x),\omega(y)\}=0.$$

假定场 $g_R(z)$ 满足周期性条件,

$$g_R(z)=g_R(z+2\pi), \tag{6}$$

或写作

$$g_R(z)g_R^{-1}(z+2\pi)=M=1. \tag{7}$$

M称作模型的 Monodromy 矩阵. 在文[2]中，相应于 $M=1$ 的 r 矩阵具有奇异性. 下面我们将给出不奇异的 r 矩阵.

利用场 φ,ψ,χ 可将边界条件(6)写为

$$\varphi(z)=\varphi(z+2\pi),\psi(z)=\psi(z+2\pi),\chi(z)=\chi(z+2\pi). \tag{8}$$

显然，我们还有

$$\omega(z)=\omega(z+2\pi). \tag{9}$$

据(4)式，若假定周期性函数 $\omega e^{-2\varphi}$ 在 $0\sim2\pi$ 范围内的积分为零，则

$$\psi(z)=\int_0^z\omega e^{-2\varphi}dz'=-\int_z^{2\pi}\omega e^{-2\varphi}dz'. \tag{10}$$

这样，利用 Poisson 括号(5)，不难求出下面的交换代数（为了简单我们用 $g(z)$ 代表 $g_R(z)$)

$$\begin{aligned}
&\{g(z)\underset{,}{\otimes}g(z')\}=g(z)\otimes g(z')r\,\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{g(z)\underset{,}{\otimes}g^{-1}(z')\}=-(g(z)\otimes 1)r(1\otimes g^{-1}(z'))\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{g^{-1}(z)\underset{,}{\otimes}g(z')\}=-(1\otimes g(z'))r(g^{-1}(z)\otimes 1)\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{g^{-1}(z)\underset{,}{\otimes}g^{-1}(z')\}=rg^{-1}(z)\otimes g^{-1}(z')\mathrm{sign}(z-z'),
\end{aligned}\tag{11}$$

其中的矩阵 r 具有简单的形式

$$r=\frac{1}{\kappa}\sigma_3\otimes\sigma_3,\tag{12}$$

σ_3 为泡利矩阵．这一 r 矩阵因为是对角的，所以平庸地满足经典 Yang-Baxter 方程．

三、Poisson-Lie 结构

我们知道，WZNW 模型具有左-右 Kac-Moody 对称性．除此之外，WZNW 模型还具有量子群对称性，反映在经典水平上，就是交换代数在 Poisson-Lie 群作用下的协变性．

对场 $g(z)$ 作如下的非定域变换

$$g(z)\to g(z)\cdot h(z)\equiv g_h(z),\tag{13}$$

其中 $h(z)$ 是与 χ,ω,φ 无关的矩阵函数．若要求交换代数(11)在这一变换下协变，即

$$\begin{aligned}
&\{g_h(z)\underset{,}{\otimes}g_h(z')\}=g_h(z)\otimes g_h(z')r\,\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{g_h(z)\underset{,}{\otimes}g_h^{-1}(z')\}=-(g_h(z)\otimes 1)r(1\otimes g_h^{-1}(z'))\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{g_h^{-1}(z)\underset{,}{\otimes}g_h(z')\}=-(1\otimes g_h(z'))r(g_h^{-1}(z)\otimes 1)\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{g_h^{-1}(z)\underset{,}{\otimes}g_h^{-1}(z')\}=rg_h^{-1}(z)\otimes g_h^{-1}(z')\mathrm{sign}(z-z'),
\end{aligned}\tag{14}$$

则 $h(z)$ 及 $h^{-1}(z)$ 必须满足下面的不平庸的 Poisson 括号

$$\begin{aligned}
&\{h(z)\underset{,}{\otimes}h(z')\}=-[r,h(z)\otimes h(z')]\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{h(z)\underset{,}{\otimes}h^{-1}(z')\}=-((h(z)\otimes 1)r(1\otimes h^{-1}(z'))\\
&\qquad-(1\otimes h^{-1}(z'))r(h(z)\otimes 1))\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{h^{-1}(z)\underset{,}{\otimes}h(z')\}=-((1\otimes h(z'))r(h^{-1}(z)\otimes 1)\\
&\qquad-(h^{-1}(z)\otimes 1)r(1\otimes h(z')))\mathrm{sign}(z-z'),\\
&\{h^{-1}(z)\underset{,}{\otimes}h^{-1}(z')\}=[r,h^{-1}(z)\otimes h^{-1}(z')]\mathrm{sign}(z-z'),
\end{aligned}\tag{15}$$

其中，第一式和第四式正是熟知的 Sklyanin 代数关系，它表明(13)式中 $h(z)$ 的取值并不在一个普通的 $SL(2,R)$ 群上，而是在 Poisson-Lie 群上．(15)式的第二、三两个关系给出了 Poisson-Lie 群互逆元素的乘法规则．

现在我们讨论变换(13)的意义．

据(1)式，完整的 WZNW 场是两个手征部分的乘积，

$$g(z,\bar z)_{ij}=\sum_\alpha g(z)_{i\alpha}g(\bar z)_{\alpha j}.\tag{16}$$

当我们按(13)式对 $g(z)$ 作非定域变换，并同时按如下方式对 $g(\bar z)$ 变换

$$g(\bar z)\to h(\bar z)g(\bar z)\tag{17}$$

时，交换代数保持协变．将(13)和(17)式写成矩阵元的形式代入(16)，我们发现，

Poisson-Lie 群作用在 WZNW 场的"哑指标"α 上。同理，相应的量子群也作用在哑指标上。这一结论与 Faddeev[6] 讨论 $SU(2)$ WZNW 场的量子交换矩阵所得结论类同。

四、量子交换矩阵

为研究模型的量子群对称性，求出量子交换关系是很重要的。一般求量子交换代数有两种办法：一是将模型作严格的量子化，利用量子场的算子积代数来求交换矩阵；二是利用已经求得的经典交换代数作量子对应，将经典 r 矩阵作为量子 r 矩阵的准经典近似来看待。下面我们将利用后一种办法给出本文条件下 WZNW 模型的量子交换矩阵。

注意到在准经典近似下量子 R 矩阵与经典 r 矩阵间存在如下关系

$$R(z-z')=1+\hbar r\,\mathrm{sign}(z-z')+O(\hbar^2),\hbar\to 0, \tag{18}$$

并将交换代数(11)中所有 Poisson 括号换为对易括号，我们有

$$\begin{aligned}
g_2(z')g_1(z)&=g_1(z)g_2(z')R(z'-z),\\
g_2^{-1}(z')g_1(z)&=g_1(z)R(z-z')g_2^{-1}(z'),\\
g_1^{-1}(z')g_2(z)&=g_2(z)R(z-z')g_1^{-1}(z'),\\
g_2^{-1}(z')g_1^{-1}(z)&=R(z'-z)g_1^{-1}(z)g_2^{-1}(z'),
\end{aligned} \tag{19}$$

其中，

$$g_1(z)=g(z)\otimes 1,\quad g_2(z)=1\otimes g(z),$$

等等。

与交换代数的量子化相适应，Poisson-Lie 群的平方型代数关系(15)也要作量子化，结果为

$$\begin{aligned}
R(z-z')h_1(z)h_2(z')&=h_2(z')h_1(z)R(z-z'),\\
h_1(z)R(z-z')h_2^{-1}(z')&=h_2^{-1}(z')R(z'-z)h_1(z),\\
h_1^{-1}(z)R(z-z')h_2(z')&=h_2(z')R(z'-z)h_1^{-1}(z).\\
R(z'-z)h_1^{-1}(z)h_2^{-1}(z')&=h_2^{-1}(z')h_1^{-1}(z)R(z'-z).
\end{aligned} \tag{20}$$

根据上述关系不难验证 $R(z-z')$ 满足量子 Yang-Baxter 方程。

五、Hamiltonian 约化

Kac-Moody 流 $J=\frac{\kappa}{2}\partial gg^{-1}$ 的定义式可写为如下的线性微分方程

$$\left(\partial-\frac{2}{\kappa}J\right)g=0, \tag{21}$$

这时 J 的作用就好象是一个可积系的 Lax 算子。现已熟知，对 J 施加适当的约束，可使 WZNW 模型约化为 Toda 模型，同时(21)式就成为 Toda 模型的线性化方程组中的一个。

对于我们目前讨论的情况，欲将 WZNW 模型约化为 Toda 模型，所需的约束条件为

$$\chi=0,\quad \omega=1. \tag{22}$$

从(5)式可知,这组约束为典型的第二类约束. 但施加这样的约束并不影响计算交换代数的结果. 因此,在考虑约束(22)后,我们也可以说(11)式就是 Toda 模型的交换代数.

将约束后的(21)式明显写出如下:

$$\left\{\partial-\frac{2}{\kappa}\begin{pmatrix}\partial\varphi & 1\\ 0 & -\partial\varphi\end{pmatrix}\right\}g(z)=0. \tag{23}$$

作变量代换

$$\phi=\partial\varphi,$$

(23)又变为 $mKdV$ 系统的一个线性化方程

$$\left[\partial-\frac{2}{\kappa}\begin{pmatrix}\phi & 1\\ 0 & -\phi\end{pmatrix}\right]g=0. \tag{24}$$

最后还可通过一个不改变 Poisson 括号的定域变换(Miura 变换)将该方程变为 KdV 系统的一个线性化方程

$$\left[\partial-\frac{2}{\kappa}\begin{pmatrix}0 & 1\\ u & 0\end{pmatrix}\right]\tilde{g}=0, \tag{25}$$

$$u=\partial\phi+\phi^2.$$

所以本文求出的 r 矩阵又可被认作是 KdV 系统的 r 矩阵. 事实上，本文的 r 矩阵与 Gervais 在文[5]中用完全不同的方式对 KdV 场得到的结果相同.

六、结　论

利用自由场表示,我们求出了周期性 WZNW 场的经典及量子的交换代数，并讨论了经典交换代数在 Hamiltonian 约化中的行为. 本文的主要结论是

1. 周期性 WZNW 场具有简单的非奇异的 r 矩阵;
2. WZNW 场的交换代数在一个 Poisson-Lie 群的作用下协变;
3. 经量子化后,交换代数将导致量子 Yang-Baxter 关系，并可能由此给出量子群对称性,
4. 所得的经典交换代数在 WZNW → Toda 的约化中不变.

参　考　文　献

[1] B. Blok, *Phys. Lett.*, **B233**(1989), 359.
[2] A. Alekseev, S. Shatashivilli, *Commun. Math. Phys.*, **133**(1990), 353.
[3] J. Balog, L. Dabrowski and L. Feher, *Phys. Lett.*, **B244**(1990), 227.
[4] J. Balog, L. Dabrowski and L. Feher, DIAS-STP-90-29.
[5] J.-L. Gervais, *Phys. Lett.*, **B160**(1985), 279.
[6] L. D. Faddeev, *Commun. Math. Phys.*, **132**(1990), 131.

On the Exchange Algebra of Periodic WZNW model

Zhao Liu
(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069)

Abstract

Using the free field representation, we calculate, the r-matrix and classical exchange algebra for WZNW model under periodic boundary condition, and discuss the quantum counterparts of the exchange algebra as well as the performances of the r-matrix and classical exchange algebra under Hamiltonian reductions.