

高能不等核碰撞和弛豫时间的 Fokker-Planck 方程描述*

白 鹤

(华中师范大学物理系, 武汉 430070)

杨 蔚 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所, 武汉 430070)

摘 要

本文提出用 Fokker-Planck 方程描述高能重离子碰撞时空演化, 并用它分析在 200 AGeV 的 ^{16}O 束流和 ^{32}S 束流下, 末态粒子的快度分布, 并确定了不同系统的弛豫时间, 得到了可以和通用经验数值相比较的结果。

一、引 言

在 高能重离子碰撞中, 通过把巨大的动能转变为热能, 会产生高温、高密度的物质, 并且若温度够高或密度够大, 则会发生从强子物质相到夸克胶子等离子体相的相变。当前研究的主要课题之一是分析高温、高密物质的时空演化。在这方面流体力学模型取得了相当大的成功, 但应强调的是当前流体力学模型主要分析的是系统处于局域热平衡时的演化。在系统达到热平衡之前的弛豫过程的研究已引起人们的重视, 这大致分为两方面的工作, 一是系统温度不够高而处于强子物质相时的非平衡过程; 二是系统处于 QGP 相时的非平衡过程。对于前者有少数采用非理想流体的工作^[1]。对于后者有 U. Heinz, M. Gyulassy 等人关于建立 QGP 输运方程方面的工作^[2]。但总的说来, 关于高能重离子碰撞中生成的高温、高密物质的非平衡过程方面的工作, 特别是结合实验的分析还处于起始阶段。1986 年以来, 高能重离子碰撞实验有了重大发展, 特别是由于在 BNL 和 CERN 分别获得了能量高达 14.5 AGeV 和 200 AGeV 的重离子束流, 从而积累了比较丰富的实验信息, 为探索高能重离子碰撞中生成的高温、高密物质的非平衡过程创造了条件。

本文我们用 Fokker-Planck 方程描述高能重离子碰撞时空演化, 并利用它分析在 200 AGeV 的 ^{16}O 束流和 ^{32}S 束流下, 末态粒子的快度分布, 以及确定了不同系统的弛豫时间。

二、模型及高能不等核碰撞的 Fokker-Planck 方程

高能不等核碰撞过程, 采用文献[3]的图像。A-A' 碰撞可以分两步来完成: (1) A 中

本文 1991 年 9 月 29 日收到。

* 国家自然科学基金资助。

与 A' 等量的核子同 A' 核中的核子产生一对一的碰撞 (即“ $A'-A'$ ”碰撞过程)。(2) “ $A'-A'$ ”碰撞完成后, A 中剩余核子将和“ $A'-A'$ ”碰撞产生的次级粒子相碰。

假设在上述碰撞过程中, 快度中心区生成的高温、高密物质是强子物质 (π 介子)。我们尝试利用 Fokker-Planck 方程来描述该强子物质系统的时空演化。注意到高温、高密物质的膨胀基本上是沿纵方向, 即束流方向, 所以类似于流体力学模型, 方程可采用 1+1 维的。一维含时 Fokker-Planck 方程的形式为^[4]:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t) \cdot f(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t) f(x, t)], \quad (1)$$

其中 $f(x, t)$ 表示高温、高密物质内 π 介子的位置几率密度, $A(x, t)$ 表示漂移系数, $B(x, t)$ 表示扩散系数。

由于高温、高密物质中 π 介子的密度不均匀, 因而引起扩散过程, 可以将扩散系数定义为^[5]

$$B(x, t) = \rho(x, t) u(x, t) / \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \right), \quad (2)$$

其中 $\rho(x, t)$ 为 π 介子的数密度, $u(x, t)$ 为 π 介子质量流动的速度。

注意到因膨胀介质密度减小的事实, 设

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) \left(\frac{t_0}{t} \right)^n,$$

t_0 为火球形成的初始时刻, $\rho_0(x)$ 为高温、高密物质中 π 介子的初始数密度, 且 $n > 0$ 。考虑衰减速度的限制, 可将 n 取为 1 则有

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) \left(\frac{t_0}{t} \right). \quad (3)$$

设 π 介子质量流动的速度为

$$u(x, t) = u_0(x) \left(\frac{t_0}{t} \right)^2, \quad (4)$$

其中 $u_0(x)$ 为高温、高密物质中 π 介子的初始质量流动速度。于是扩散系数又可写为

$$B(x, t) = u_0(x) \rho_0(x) \left(\frac{t_0}{t} \right)^3 / \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \right). \quad (5)$$

由于高温、高密物质中各层 π 介子的速度不同, 因而引起漂移过程, 可以将漂移系数定义为^[5]

$$A(x, t) = \gamma \rho(x, t) B(x, t), \quad (6)$$

其中 γ 为可调参数。

在碰撞唯象学中常用的运动学变量是光锥变量 (y, τ) , 从 (x, t) 到 (y, τ) 的变换为

$$\left. \begin{aligned} t &= T t_0, \\ T &= \tau \cosh y, \\ x &= \tau \sinh y, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} &= \cosh y \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\tau} \sinh y \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= -\sinh y \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \cosh y \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将(7)、(8)两式代入(3)、(4)、(5)、(6)式中, 可得到用光锥变量(y, τ)表示的扩散系数和漂移系数, 即

$$\left. \begin{aligned} B(y, \tau) &= \frac{1}{\tau^2} u_0(y) \rho_0(y) (1 - \text{th}^2 y)^2 / \left(\frac{\partial \rho_0(y)}{\partial y} \right), \\ A(y, \tau) &= \gamma \frac{1}{\tau^2} \rho_0(y) (1 - \text{th}^2 y) B(y, \tau), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 $\rho_0(y)$ 为 π 介子的初始快度数密度, $u_0(y)$ 为 π 介子的初始速度. $\rho_0(y)$ 与 $\rho_0(x)$ 的关系为

$$\rho_0(x) = \rho_0(y) \left(\frac{1}{\tau} \cosh y - \frac{1}{\tau} \sin h y \text{ th} y \right), \quad (10)$$

$u_0(x)$ 与 $u_0(y)$ 的关系为

$$u_0(x) = u_0(y) \left(\frac{1}{\tau} \cosh y - \frac{1}{\tau} \sin h y \text{ th} y \right). \quad (11)$$

将(7)、(8)、(9)式代入(1)式中, 可得到用光锥变量 (y, τ) 表示的 Fokker-Planck 方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(y, \tau)}{\partial \tau} &= Q_1 \frac{\partial f(y, \tau)}{\partial y} + Q_2 \frac{\partial^2 f(y, \tau)}{\partial y^2} + Q_3 f(y, \tau) \\ &+ Q_4 \frac{\partial^2 f(y, \tau)}{\partial y \partial \tau} + Q_5 \frac{\partial^2 f(y, \tau)}{\partial \tau^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

此方程为 π 介子的分布函数 $f(y, \tau)$ 随时间的演化方程. 系数 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 分别为

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left[\frac{1}{\tau} \sin h y - \frac{1}{\tau} \cosh y A(y, \tau) - \frac{1}{\tau} \cosh y \sin h y \frac{\partial B(y, \tau)}{\partial \tau} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\tau^2} \cosh^2 y \frac{\partial B(y, \tau)}{\partial y} + \frac{1}{\tau^2} \cosh y \sin h y B(y, \tau) \right] / W, \end{aligned} \quad (13)$$

$$Q_2 = \left[\frac{1}{2\tau^2} \cosh^2 y B(y, \tau) \right] / W, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \left[\sin h y \frac{\partial A(y, \tau)}{\partial \tau} - \frac{1}{\tau} \cosh y \frac{\partial A(y, \tau)}{\partial y} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sin h^2 y \frac{\partial^2 B(y, \tau)}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2\tau} \cosh^2 y \frac{\partial B(y, \tau)}{\partial \tau} \\ &- \frac{1}{\tau} \cosh y \sin h y \frac{\partial^2 B(y, \tau)}{\partial y \partial \tau} + \frac{1}{2\tau^2} \cosh^2 y \frac{\partial^2 B(y, \tau)}{\partial y^2} \\ &\left. + \frac{1}{\tau^2} \cosh y \sin h y \frac{\partial B(y, \tau)}{\partial y} \right] / W, \end{aligned} \quad (15)$$

$$Q_4 = \left[-\frac{1}{\tau} \cosh y \sin h y B(y, \tau) \right] / W, \quad (16)$$

$$Q_5 = \left[\frac{1}{2} \sin h^2 y B(y, \tau) \right] / W, \quad (17)$$

而 W 为

$$W = \left[\cosh y - \sin hy A(y, \tau) - \sin h^2 y \frac{\partial B(y, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \sin hy \cosh y \frac{\partial B(y, \tau)}{\partial y} + \frac{1}{2\tau} \cosh^2 y B(y, \tau) \right], \quad (18)$$

方程(12)可借助于偏微分方程的有限差分方法求出其解。

考虑在 A-A' 碰撞的第一阶段, π 介子的分布函数 $f_1(y, \tau)$ 随时间的演化方程为

$$\frac{\partial f_1(y, \tau)}{\partial \tau} = Q_1 \frac{\partial f_1(y, \tau)}{\partial y} + Q_2 \frac{\partial^2 f_1(y, \tau)}{\partial y^2} + Q_3 f_1(y, \tau) + Q_4 \frac{\partial^2 f_1(y, \tau)}{\partial y \partial \tau} + Q_5 \frac{\partial^2 f_1(y, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad (19)$$

若把核-核碰撞归结为核子-核子碰撞, 求解方程(19)的初始条件可取为

$$f_{10}(y) = N \rho_{10}(y), \quad (20)$$

其中 $\rho_{10}(y)$ 为相应入射能下的核子-核子碰撞给出的 π 介子分布函数^[3]

$$\rho_{10}(y) = \left[\left[n_C \frac{dW_C}{dy}(y) + n_P \frac{dW_P}{dy}(y - y_P) + n_T \frac{dW_T}{dy}(y - y_T) \right] \cdot \frac{P(n_C)P(n_P)P(n_T)}{P(n)} \delta(n - n_C - n_P - n_T) dn_C dn_P dn_T, \quad (21)$$

N 为参加碰撞的有效核子数^[3]. n_C 为中心火球的带电多重数, n_P 为射弹火球的带电多重数, n_T 为靶火球的带电多重数。

按照相对论, 在光锥图上粒子只能在光锥内运动, 光锥线的方程为 $x^\pm = 1$. 求解方程(19)的边界条件可取为

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, \tau) \Big|_{x^\pm=1} &= 0, \\ \frac{\partial f_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x^\pm=1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

或

$$\left. \begin{aligned} f_1(y, \tau) \Big|_{(\tau \cosh y \pm r \sinh y = 1)} &= 0, \\ \left(-\sin hy \frac{\partial f_1(y, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \cosh y \frac{\partial f_1(y, \tau)}{\partial y} \right) \Big|_{(\tau \cosh y \pm r \sinh y = 1)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

考虑在碰撞的第二阶段, π 介子的分布函数 $f_2(y, \tau)$ 随时间的演化方程为

$$\frac{\partial f_2(y, \tau)}{\partial \tau} = Q_1 \frac{\partial f_2(y, \tau)}{\partial y} + Q_2 \frac{\partial^2 f_2(y, \tau)}{\partial y^2} + Q_3 f_2(y, \tau) + Q_4 \frac{\partial^2 f_2(y, \tau)}{\partial y \partial \tau} + Q_5 \frac{\partial^2 f_2(y, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad (24)$$

由于在此阶段是强子-核子碰撞, 所以求解方程(24)的初始条件可取为

$$f_{20}(y) = n' \rho_{20}(y), \quad (25)$$

其中 $\rho_{20}(y)$ 为相应能量下强子-核子碰撞给出的 π 介子分布函数^[3]

$$\rho_{20}(y) = \rho'_0 \left(1 - \frac{\bar{m}_\pi \cosh(y + y_R/2)}{\bar{m}_N \cosh(y_R/2)} \right)^3, \quad (26)$$

n' 为参加此阶段碰撞有效核子数.

求解方程(24)的边界条件相应可取为

$$\left. \begin{aligned} f_2(x, t) \Big|_{x' \pm 1} &= 0, \\ \frac{\partial f_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x' \pm 1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中^[3]

$$\left. \begin{aligned} x'^+ &= t' + x' = (t - t_1) + (x - x_1), \\ x'^- &= t' - x' = (t - t_1) - (x - x_1), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

而

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -(t_1 - d_t) \operatorname{th} y_B^*, \\ d_t &= \frac{2R_A}{\sin \operatorname{th} y_B^*}, \quad t_1 = \tau_{10} \cosh y, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

R_A 为 A 核的半径, y_B^* 为核在等速系中的快度, τ_{10} 为 A'-A' 碰撞中 π 介子热化处于局域平衡所需时间.

若同时考虑 A-A' 包含的两个碰撞过程的贡献, 则末态粒子的快度分布函数 $F(y, \tau)$ 为 $f_1(y, \tau)$ 与 $f_2(y, \tau)$ 的卷积, 即

$$F(y, \tau) = \int_{y_1}^{y_2} c f_1(y, \tau) f_2(y - y, \tau) dy, \quad (30)$$

其中 c 为归一化因子.

三、结果与讨论

采用数值计算方法, 从方程(19)、(24)和它们的定解条件出发, 利用(30)式, 我们原则上就可以求得高温、高密系统在任何时刻的解. 它为讨论系统演化提供了基础.

实验观察到的是系统达到局域平衡后的末态粒子分布, 因而我们关心的是方程的这类解.

当系统达到局域平衡时, 在快度空间各点附近, 局域扩散系数 B 和漂移系数 A 应分别达到各个相应的稳定的小量值, 因而 B 和 A 关于 y 的平均值 \bar{B} 和 \bar{A} 也将趋于相应稳定小量值. 这样在实际计算中, 局域平衡可以用 \bar{B} 和 \bar{A} 达到稳定的小量值来标志. 原则上, \bar{B} 和 \bar{A} 达到这类值的时间就是系统到达局域平衡的弛豫时间.

下面我们首先讨论按(9)式确定的扩散系数 B 和漂移系数 A . 图 1、图 2 是我们计算的束流能量在 200 AGeV 时 $^{16}\text{O} + \text{Ag}/\text{Br}$ 的结果. 图 1 给出 $^{16}\text{O} + \text{Ag}/\text{Br}$ 在 A-A' 碰撞第一阶段, 扩散系数 B_1 关于 y 的算术平均值 \bar{B}_1 的对数随 τ 的变化以及漂移系数 A_1 关于 y 的算术平均值 \bar{A}_1 的对数随 τ 的变化. 图中的曲线是取 $u_0(y) = 10.0$, $\gamma = \frac{5}{6}$ 时, $\log \bar{B}_1$

在 $\tau = 1.1\text{fm}$ 趋于稳定小量值, $\log \bar{A}_1$ 在 $\tau = 1.3\text{fm}$ 趋于稳定小量值的结果. 图 2 给出 $^{16}\text{O} + \text{Ag}/\text{Br}$ 在 A-A' 碰撞的第二阶段, 扩散系数 B_2 的算术平均值 \bar{B}_2 的对数随 τ 的变化以及漂移系数 A_2 的算术平均值 \bar{A}_2 的对数随 τ 的变化. 图中的曲线是取 $u_0(y) = 32.0$,

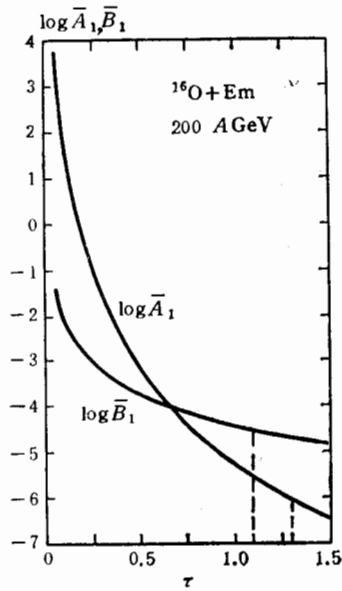


图1 等核

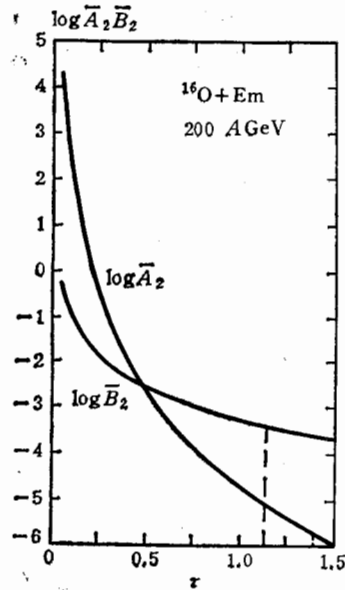


图2 不等核

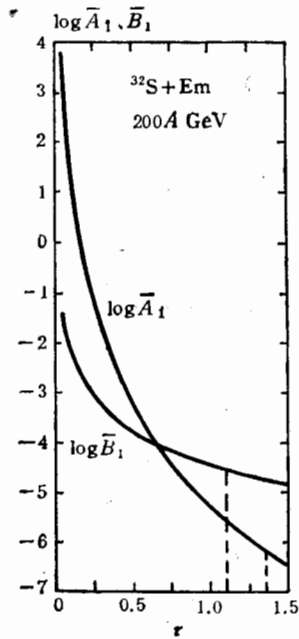


图3 等核

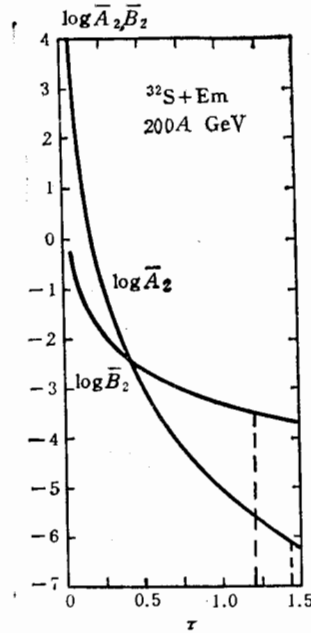


图4 不等核

$\tau = \frac{5}{60}$ 时, $\log \bar{B}_2$ 在 $\tau = 1.13\text{fm}$ 趋于稳定小量值, $\log \bar{A}_2$ 在 $\tau = 1.4\text{fm}$ 趋于稳定小量值的结果。需要指出的是: 由于扩散系数 B 和漂移系数 A 是唯一确定的, 因此对应某一个 τ 值, $\log \bar{B}$ 和 $\log \bar{A}$ 达到稳定的小量值后, 还需要将相应 τ 下的方程(19)、(24)和(30)式的解与实验结果进行比较。以上结果就是这样经过反复比较最后确定的。

图 3、图 4 是我们计算的在同样束流能量下 $^{32}\text{S} + \text{Ag}/\text{Br}$ 的结果。图 3 中的曲线是取 $u_0(y) = 10.0$, $\tau = \frac{5}{6}$ 时, $\log \bar{B}_1$ 在 $\tau = 1.12\text{fm}$ 时趋于稳定小量值, $\log \bar{A}_1$ 在 $\tau = 1.35\text{fm}$ 时趋于稳定小量值的结果。图 4 中的曲线是取 $u_0(y) = 32.0$, $\tau = \frac{5}{60}$ 时, $\log \bar{B}_2$ 在 $\tau = 1.19\text{fm}$ 趋于稳定小量值, $\log \bar{A}_2$ 在 $\tau = 1.42\text{fm}$ 趋于稳定小量值的结果。

从以上结果可以看出,对于 $^{16}\text{O} + \text{Ag}/\text{Br}$, 系统的弛豫时间为 $\tau = 1.4\text{fm}$ 。对于 $^{32}\text{S} + \text{Ag}/\text{Br}$, 系统的弛豫时间为 $\tau = 1.42\text{fm}$ 。

从(9)式可知, $\log \bar{B}$ 和 $\log \bar{A}$ 随 τ 的变化趋势与可调参数 $u_0(y)$ 和 τ 有关。我们是采用 $^{16}\text{O} + \text{Ag}/\text{Br}$ 作输入, 确定二组数据 $u_0(y) = 10.0$, $\tau = \frac{5}{6}$ 和 $u_0(y) = 32.0$, $\tau = \frac{5}{60}$ 后, 再采用 $^{32}\text{S} + \text{Ag}/\text{Br}$ 作输出的。

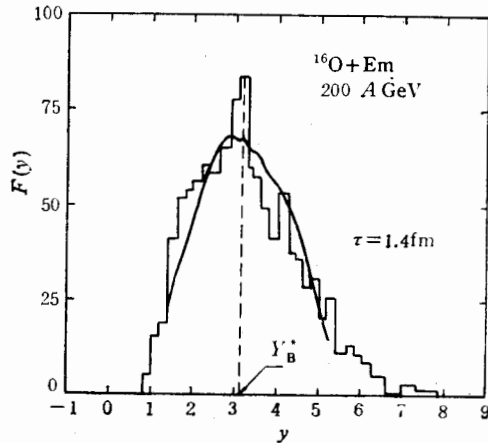


图 5

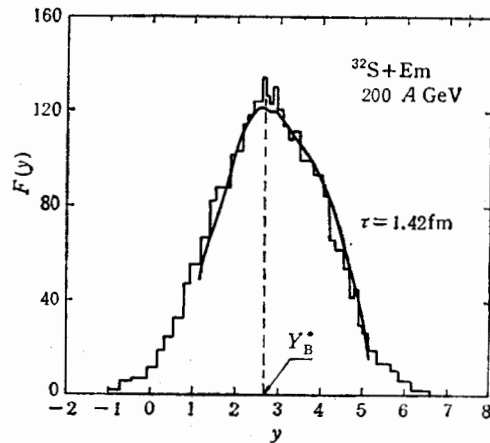


图 6

以下讨论系统达到局域平衡时,按方程(19)、(24)和(30)得到的解,即末态粒子快度分布。图 5 给出 $^{16}\text{O} + \text{Ag}/\text{Br}$ 末态粒子的快度分布,其中实线是我们计算的 $\tau = 1.4\text{fm}$ 时的结果。图 6 中的实线给出 $^{32}\text{S} + \text{Ag}/\text{Br}$ 在 $\tau = 1.42\text{fm}$ 的结果。从图 5、图 6 可以看出,理论曲线和实验结果符合。这表明束流能量在 200A GeV 时, $^{16}\text{O} + \text{Ag}/\text{Br}$ 中的强子物质在弛豫时间 $\tau = 1.4\text{fm}$ 已达到局域平衡。 $^{32}\text{S} + \text{Ag}/\text{Br}$ 中的强子物质在弛豫时间 $\tau = 1.42\text{fm}$ 已达到局域平衡。应该说明的是,在以上讨论中,我们没有分析末态观测粒子是如何从系统中自由化出来的。这也是当前各种模型计算中都尚未弄清的问题。

对比 $^{16}\text{O} + \text{Ag}/\text{Br}$ 和 $^{32}\text{S} + \text{Ag}/\text{Br}$ 的结果还表明,在入射能量相同,靶核相同的情况下,入射核子数不同,系统的弛豫时间也不同。入射核子数越多,则系统的弛豫时间越长,反之亦然。这说明重要参数弛豫时间与入射束能、入射核子数有关。

本工作还存在着需要进一步讨论的问题。我们讨论膨胀火球的扩散系数 B 、漂移系数 A 时,其形式是唯一决定的,而我们的计算结果又依赖于这两个系数。因此讨论膨胀火球的输运系数问题是值得进一步探讨的。曾有人在稳定条件下,用硬球散射模型讨论了

低能情况下一般强子系统的输运系数问题。而在高能情况下,如何从动力学方程出发讨论膨胀火球的输运系数问题,是一个进一步需要研究的课题。

参 考 文 献

- [1] H. Von Gersdorff et al., *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 794.
- [2] U. Heinz, *Nucl. Phys.*, **A461**(1987), 49c.
- [3] P. F. Zhuang, Z.Q. Wang, and L.S. Liu, *Z. Phys.*, **C32**(1986), 93.
沈国金等, 高能物理与核物理, **13**(1989), 205.
- [4] H. Haken, *Mod. Phys. Rev.*, **47**(1975), 67.
- [5] 王竹溪, 统计物理学导论, 人民教育出版社(1965).

High Energy Unequal-nuclei Collisions and Relaxation Time in Fokker Planck Equation

BAI GE

(Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

YANG WEI LI JIARONG

(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

ABSTRACT

In this paper, the time evolution of high energy heavy ion collisions is described by Fokker-Planck Equation. The rapidity distribution of the final state particles is analysed with this model for ^{16}O and ^{32}S particles beams of 200 AGeV. The relaxation time for various systems are determined. Results comparable to the usual empirical data are obtained.