

# 过程 $J/\psi \rightarrow \gamma X, X \rightarrow P_1 P_2$ 中 X 自旋的 矩分析法

陈申见 严武光 李卫国

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

## 摘 要

本文给出了用矩分析法分析  $J/\psi \rightarrow \gamma X, X \rightarrow P_1 P_2$  辐射衰变过程中玻色子 X 自旋的原理和方法, 并利用这种方法对  $\theta(1720)$  的自旋进行了蒙特卡洛研究, 从中看到该方法可以有效地测定 X 的自旋. 作为一个例子, 把该方法用于北京谱仪 (BES)  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  衰变道低质量区域共振态的自旋分析, 结果表明该方法是可行的.

## 一、引 言

由于  $J/\psi$  辐射衰变过程是寻找胶球的最佳途径, 因而引起了人们广泛的关注, 希望能在

$$J/\psi \rightarrow \gamma X, X \rightarrow P_1 P_2 \quad (1)$$

过程中找到  $J^{PC} = (\text{偶})^{++}$  的胶球候选者, 其中  $P_1, P_2$  是两个赝标介子. 正是在这类过程中, 人们发现了  $f_2(1270)$ 、 $f'_2(1525)$ 、 $\theta(1720)$  以及可能存在的  $\xi(2230)$  等<sup>[1]</sup>. 对于  $\theta(1720)$ , 通常认为它是自旋宇称为  $2^{++}$  的胶球候选者, 但其自旋宇称是  $0^{++}$  还是  $2^{++}$  尚无明确结论. 1987 年以前, MARK III<sup>[2]</sup> 和 Crystal Ball<sup>[3]</sup> 测得  $\theta(1720)$  的自旋宇称为  $2^{++}$ , DM2<sup>[4]</sup> 发现用  $0^{++}$  和  $2^{++}$  两种假设得到的似然函数差不多, 但仍倾向于  $2^{++}$ . 以上结果都是用最大似然法拟合螺旋度振幅<sup>[5]</sup>推算的角分布得到的. 1987 年, 严武光<sup>[6]</sup> 研究了该方法后指出: 用这种角分布来确定 X 的自旋存在着不灵敏区的问题, 也就是说  $J^{PC} = 2^{++}$ 、螺旋度振幅值  $|x| \sim |y| \sim 1$  的角分布和  $J^{PC} = 0^{++}$  的很接近, 而上述几个工作测得  $J^{PC} = 2^{++}$  时正好有  $|x| \sim |y| \sim 1$ , 所以认为  $\theta(1720)$  的自旋宇称是  $0^{++}$  还是  $2^{++}$  仍不能做最后肯定, 并建议用文献<sup>[7]</sup>所述的矩分析法或其它更有效的办法或从别的反应道来测定. 在这之后, MARK III<sup>[8]</sup> 和 WA76<sup>[9]</sup> 的两个工作仍认为  $\theta(1720)$  的自旋宇称是  $2^{++}$ . 1990 年, MARK III<sup>[10]</sup> 修正了以前公式中的错误后重新分析了  $\theta(1720)$  的自旋, 结果却是以  $0^{++}$  为主, 但是有一个小的  $2^{++}$  分量无法用统计的办法排除. 这样  $\theta(1720)$  的自旋到底是什么引起了大家的关注.

本文首先给出了用矩分析法分析过程(1)中 X 自旋的原理和方法, 然后利用  $J/\psi \rightarrow \gamma 0$

(1720),  $\theta(1720) \rightarrow K^+K^-$  过程对  $\theta(1720)$  的自旋用矩分析法进行了蒙特卡罗研究. 从这里看到这个方法可以有效地测定玻色子 X 的自旋, 对于自旋为 2、螺旋度振幅  $|x| \sim |y| \sim 1$  和自旋为 0 这两种情况可以清楚地分开, 因而避免了简单螺旋度振幅法对这两种情况的不灵敏难题. 文中还把矩分析法应用于 BES 实际数据的处理, 分析了  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+K^-$  衰变道中低质量区域共振态的自旋.

## 二、矩分析法分析自旋的基本原理

对于级联过程(1), 衰变矩阵元可以写作<sup>[6]</sup>

$$\mathcal{M} = a_{\lambda_X, \lambda_X}^{\lambda_\psi}(m_X) \sqrt{\frac{2J_\psi + 1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2J_X + 1}{4\pi}} D_{\lambda_\psi, \lambda_\gamma - \lambda_X}^{\lambda_\psi, \lambda_\gamma - \lambda_X}(\Omega_\gamma) D_{\lambda_X, \lambda_P - \lambda_\gamma}^{\lambda_X, \lambda_P - \lambda_\gamma}(\Omega_P^*), \quad (2)$$

其中,  $\Omega_\gamma = (\varphi_\gamma, \theta_\gamma, 0)$ ,  $\theta_\gamma$  和  $\varphi_\gamma$  是  $J/\psi$  静止系中  $\gamma$  的极角和方位角;  $\Omega_P^* = (\varphi_P^*, \theta_P^*, 0)$ ,  $\theta_P^*$  和  $\varphi_P^*$  是 X 质心系中 P 的极角和方位角;  $J_\psi$  是  $J/\psi$  的自旋;  $\lambda_\psi$  是它的螺旋度, 可以证明在  $e^+e^-$  对撞实验中有  $\lambda_\psi = \pm 1$ ;  $\lambda_\gamma$  是光子的螺旋度;  $J_X$  表示 X 的自旋, 在  $J/\psi$  辐射衰变中, 玻色子系统  $P_1P_2$  的自旋必然为偶, 即  $J_X = 0, 2, 4, \dots$ ;  $\lambda_X$  表示 X 的螺旋度, 螺旋度守恒要求  $\lambda_X = 0, \pm 1, \pm 2$ ;  $\lambda_P$  为赝标介子的螺旋度, 有  $\lambda_P = 0$ ;  $D_{\lambda_X, \lambda_P}^{\lambda_X, \lambda_P}(\Omega)$  为  $SU(2)$  旋转矩阵元, 它表明了相互作用的动力学机制;  $a_{\lambda_X, \lambda_X}^{\lambda_\psi}(m_X)$  是依赖于 X 不变质量的未知系数, 称为螺旋度参数.

考虑不同自旋取向的影响, 即  $|\mathcal{M}|^2$  对初态和末态的自旋极化指标分别求平均和求和, 得到截面

$$\sigma = \frac{3}{4} \sum_{\lambda_\psi, \lambda_\gamma} \left| \sum_{J_X, \lambda_X} a_{\lambda_X, \lambda_X}^{\lambda_\psi}(m_X) \sqrt{\frac{2J_X + 1}{4\pi}} D_{\lambda_\psi, \lambda_\gamma - \lambda_X}^{\lambda_\psi, \lambda_\gamma - \lambda_X}(\Omega_\gamma) D_{\lambda_X, \lambda_P}^{\lambda_X, \lambda_P}(\Omega_P^*) \right|^2. \quad (3)$$

如果把(3)式按  $J_X = 0, 2, 4, \dots$  展开, 就可以得到一般形式的自旋为 0, 2, 4,  $\dots$  时的角分布公式. 其中有四个参数  $x, y, \varphi_x$  和  $\varphi_y$ , 用最大似然法拟合角分布即可得到这些参数的值. 这是通常分析自旋的方法, 即螺旋度振幅法<sup>[5]</sup>.

也可以把截面按球谐函数展开成如下形式,

$$\sigma = \sum_{L, J, A} W_{J, A}^L(m_X) \text{Re} Y_{L, A}(\cos \theta_\gamma) \text{Re} Y_{J, A}(\Omega_P^*), \quad (4)$$

因为球谐函数的正交性, 系数  $W_{J, A}^L$  就称为矩, 它们可以由角分布得到. 如果再找到矩和螺旋度参数之间的关系, 那么螺旋度参数的值也就得到了. 这种方法就是所谓的矩分析法.

对于过程(1), 玻色子 X 的质量  $m_X$  通常小于  $2\text{GeV}$ , 因此其自旋最大值取 2 即可, 即  $J_X = 0, 2$ , 于是最大的矩有  $J_{\max} = J_X + J_X = 4$ . 于是从(3)、(4)式可以得到矩和螺旋度参数之间的关系式:

$$W_{0,0}^0 = |a_{00}|^2 + |a_{20}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2;$$

$$W_{0,0}^2 = \frac{\sqrt{5}}{10} (|a_{00}|^2 + |a_{20}|^2 - 2|a_{21}|^2 + |a_{22}|^2);$$

$$W_{2,0}^0 = \frac{\sqrt{5}}{5} [2\sqrt{5} \text{Re}(a_{00}a_{20}^*) + \frac{5}{7}(2|a_{20}|^2 + |a_{21}|^2 - 2|a_{22}|^2)];$$

$$\begin{aligned}
W_{2,0}^2 &= \frac{1}{5} [\sqrt{5} \operatorname{Re}(a_{00} a_{20}^*) + \frac{5}{7} (|a_{20}|^2 - |a_{21}|^2 - |a_{22}|^2)]; \\
W_{2,1}^2 &= \frac{\sqrt{3}}{10} \{ \sqrt{5} \operatorname{Re}(a_{21} a_{00}^*) + \frac{5}{7} [\operatorname{Re}(a_{21} a_{20}^*) - \sqrt{6} \operatorname{Re}(a_{21} a_{22}^*)] \}; \\
W_{2,2}^2 &= \frac{\sqrt{6}}{10} [\sqrt{5} \operatorname{Re}(a_{22} a_{00}^*) - \frac{10}{7} \operatorname{Re}(a_{22} a_{20}^*)]; \\
W_{4,0}^0 &= \frac{1}{7} (6|a_{20}|^2 - 4|a_{21}|^2 + |a_{22}|^2); \\
W_{4,0}^2 &= \frac{\sqrt{5}}{70} (6|a_{20}|^2 + 8|a_{21}|^2 + |a_{22}|^2); \\
W_{4,1}^2 &= \frac{\sqrt{3}}{14} [\sqrt{6} \operatorname{Re}(a_{21} a_{20}^*) + \operatorname{Re}(a_{22} a_{21}^*)]; \\
W_{4,2}^2 &= \frac{3\sqrt{2}}{14} \operatorname{Re}(a_{22} a_{20}^*).
\end{aligned} \tag{5}$$

注意到  $W_{J,1}^2 = -W_{J,-1}^2, W_{J,2}^2 = W_{J,-2}^2$ , 从(5)式看到独立的矩共有 10 个, 可简单记作  $W_\mu, \mu = 1, 2, \dots, 10$ . 螺旋度参数可以写成  $a_{jA} = |a_{jA}| e^{i\phi_{jA}}$ , 于是独立的螺旋度参数共有 7 个, 它们是 4 个振幅参数和 3 个相位参数:

$$\begin{aligned}
&|a_{00}|, |a_{20}|, |a_{21}|, |a_{22}|; \\
&\phi_0 = \phi_{00} - \phi_{20}, \phi_x = \phi_{21} - \phi_{20}, \phi_y = \phi_{22} - \phi_{20}.
\end{aligned} \tag{6}$$

而通常所谓的螺旋度振幅  $x, y$  则按下式定义:

$$x = \frac{a_{21}}{a_{20}}, y = \frac{a_{22}}{a_{20}}. \tag{7}$$

### 三、矩分析法分析自旋的一般方法

实验上用矩分析法分析自旋的策略是: 首先根据终态粒子的角分布  $(\Omega_f, \Omega_p^*)$  得到矩, 然后从矩拟合出螺旋度参数. 具体方法如下:

首先根据三个角分布, 用最大似然法拟合出 10 个独立矩  $W^{\text{exp}}$ , 选择扩展的对数似然函数<sup>[11]</sup>:

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_{\text{obs}}} \ln \sigma(W; \cos \theta_i, \Omega_p^{*i}) - \frac{8\pi}{N_{\text{gen}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{acc}}} \sigma(W; \cos \theta_j, \Omega_p^{*j}), \tag{8}$$

式中  $N_{\text{obs}}$  是实验测得的事例数,  $N_{\text{gen}}$  是蒙特卡罗产生的事例数,  $N_{\text{acc}}$  是蒙特卡罗产生的事例经探测器模拟、径迹重建和事例选择后被接收的事例数. 上式第一项是实验数据, 第二项是蒙特卡罗数据, 体现了探测器的效率修正, 因此拟合出来的 10 个矩  $W^{\text{exp}}$  又称为效率修正矩.

然后用最小二乘法拟合出螺旋度参数, 选择目标函数  $\chi^2$  为

$$\chi^2 = \sum_{\mu=1}^{10} [W_\mu^{\text{exp}} - W_\mu^{\text{th}}(a)] V^{-1} [W_\mu^{\text{exp}} - W_\mu^{\text{th}}(a)], \tag{9}$$

其中,  $W^{\text{exp}}$  是效率修正矩,  $V$  是它的协方差矩阵, 均由前面的最大似然法拟合给出.  $W^{\text{th}}$  是

理论预言的矩,即为矩和螺旋度参数的关系式(5).

从式(9)看出,矩  $W$  是质量  $m_x$  的函数,在实际分析中,考虑到在  $P_1P_2$  不变质量谱的一个小区间内,效率变化不是太大,故可以把  $P_1P_2$  不变质量谱分成几个区间,认为每个区间内质量谱的效率不变,拟合对每个区间进行.至于该质量区间的选择,应视具体衰变道而定,原则上要求:

1. 每个质量区间内接收效率的变化确实很小,不超过 10%.
2. 每个区间应有较高的统计量,通常处于共振峰处的那个区间应有 100—200 个事例.
3. 要有足够数量的区间数,以保证有详细的矩和螺旋度参数变化的信息.

对于  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  道,一般选择  $\Delta m_x = 100$  MeV 即可满足上述条件.

#### 四、矩分析法的蒙特卡洛检验

为了检查矩分析法分析自旋的策略是否成功,进行了蒙特卡洛检验.为此产生 10 组  $J/\psi \rightarrow \gamma X, X \rightarrow K^+ K^-$  数据,其中  $X$  按  $\theta(1720)$  的共振峰形状产生 ( $m_x = 1710$  MeV,  $\Gamma_x = 130$  MeV),这 10 组数据对应于自旋为 0 时的  $1 + a \cos^2 \theta$  分布和自旋为 2,  $x=0, \pm 1, y=0, \pm 1$  时的分布等 10 种情形.每组数据经重建和  $\gamma K^+ K^-$  事例选择<sup>[11]</sup>后在  $K^+ K^-$  质量区间  $[1660, 1760]$  MeV 内都有 120 个事例,这大致对应于  $\sim 2.5 \times 10^6$  个真实  $J/\psi$  事例在该区间的  $\gamma K^+ K^-$  事例数.为了模拟探测器接收效率的修正,还随机产生了大量按  $(m_x, \Omega_r, \Omega_p)$  等均匀分布的事例,经事例选择后在  $[1660, 1760]$  MeV 区间有 510 个事例.

表 1 自旋为 0 和 2 态的理论预言矩

理论矩	自旋=0	自旋=2
$W_{00}^0$	1	$1 + x^2 + y^2$
$W_{00}^2$	$\frac{\sqrt{5}}{10}$	$\frac{\sqrt{5}}{10}(1 - 2x^2 + y^2)$
$W_{20}^0$	0	$\frac{\sqrt{5}}{7}(2 + x^2 - 2y^2)$
$W_{20}^2$	0	$\frac{1}{7}(1 - x^2 - y^2)$
$W_{21}^2$	0	$\frac{\sqrt{3}}{14} [x \cos \phi_x - \sqrt{6} xy \cos(\phi_x - \phi_y)]$
$W_{22}^2$	0	$-\frac{\sqrt{6}}{7} y \cos \phi_y$
$W_{40}^0$	0	$\frac{1}{7}(6 - 4x^2 + y^2)$
$W_{40}^2$	0	$\frac{\sqrt{5}}{70}(6 + 8x^2 + y^2)$
$W_{41}^2$	0	$\frac{\sqrt{3}}{14} [\sqrt{6} x \cos \phi_x + xy \cos(\phi_x - \phi_y)]$
$W_{42}^2$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{14} y \cos \phi_y$

首先进行矩的最大似然法拟合. 根据事例产生时自旋为 0 和自旋为 2 的各种螺旋度振幅  $x, y$ , 从(5)式可以预言相应的理论矩如表 1 所示, 表 2 则列出了矩的拟合结果. 因为考虑了探测器接收度的影响, 拟合矩和理论矩会有所差别, 但两者在误差范围内基本一致:

- (1)  $W_{00}^0$  正比于产生的事例数, 它体现了  $P_1 P_2$  系统不变质量分布.
- (2) 自旋为 0 的态只有两个非零矩  $W_{00}^0$  和  $W_{00}^2$ .
- (3)  $\Lambda=0$  的矩  $W_{\Lambda}^2$  仅依赖于螺旋度振幅的平方.

表 2 效率修正矩的拟合值

拟合矩	自旋=0		自旋=2								
	$a=1$	$x=-1$	$x=-1$	$x=-1$	$x=0$	$x=0$	$x=0$	$x=1$	$x=1$	$x=1$	
		$y=-1$	$y=0$	$y=1$	$y=-1$	$y=0$	$y=1$	$y=-1$	$y=0$	$y=1$	
$W_{00}^0$	$360 \pm 44$	$351 \pm 41$	$291 \pm 38$	$248 \pm 36$	$399 \pm 46$	$430 \pm 48$	$304 \pm 41$	$393 \pm 47$	$361 \pm 45$	$297 \pm 40$	
$W_{00}^2$	$74 \pm 52$	$17 \pm 46$	$33 \pm 51$	$-89 \pm 41$	$89 \pm 50$	$119 \pm 54$	$10 \pm 44$	$7 \pm 51$	$-22 \pm 47$	$-60 \pm 50$	
$W_{20}^0$	$3 \pm 43$	$-3 \pm 45$	$150 \pm 50$	$43 \pm 40$	$-50 \pm 48$	$295 \pm 61$	$-22 \pm 44$	$72 \pm 55$	$208 \pm 54$	$103 \pm 39$	
$W_{20}^2$	$11 \pm 54$	$-91 \pm 53$	$62 \pm 62$	$-18 \pm 49$	$-116 \pm 59$	$-129 \pm 79$	$-84 \pm 52$	$-59 \pm 63$	$-33 \pm 55$	$-9 \pm 51$	
$W_{21}^0$	$-38 \pm 29$	$-35 \pm 25$	$-42 \pm 23$	$-19 \pm 28$	$-39 \pm 21$	$37 \pm 17$	$4 \pm 18$	$84 \pm 29$	$63 \pm 29$	$2 \pm 26$	
$W_{22}^0$	$7 \pm 22$	$37 \pm 21$	$-43 \pm 22$	$-64 \pm 22$	$48 \pm 26$	$-9 \pm 19$	$-111 \pm 28$	$48 \pm 21$	$0 \pm 21$	$-43 \pm 21$	
$W_{40}^0$	$-15 \pm 45$	$43 \pm 42$	$84 \pm 46$	$33 \pm 33$	$231 \pm 45$	$345 \pm 50$	$166 \pm 34$	$94 \pm 43$	$55 \pm 39$	$0 \pm 44$	
$W_{40}^2$	$-36 \pm 57$	$9 \pm 52$	$115 \pm 59$	$26 \pm 43$	$-12 \pm 50$	$-126 \pm 81$	$-13 \pm 39$	$71 \pm 58$	$63 \pm 50$	$-82 \pm 60$	
$W_{41}^0$	$52 \pm 27$	$-11 \pm 30$	$-78 \pm 27$	$-89 \pm 36$	$-18 \pm 28$	$-3 \pm 32$	$21 \pm 28$	$17 \pm 31$	$104 \pm 34$	$52 \pm 29$	
$W_{42}^0$	$-12 \pm 23$	$-45 \pm 22$	$-32 \pm 26$	$58 \pm 20$	$-87 \pm 24$	$0 \pm 16$	$89 \pm 27$	$-27 \pm 22$	$11 \pm 28$	$46 \pm 21$	

接着用最小二乘法拟合螺旋度参数. 先假设只存在自旋为 0 或自旋为 2 的态, 即以纯自旋为 0 或纯自旋为 2 这两种假设分别进行拟合, 在以纯自旋为 2 假设进行拟合时, 因为数据统计量不大, 两个相位  $\varphi_x$  和  $\varphi_y$  的确定是十分困难的, 在拟合中令它们为 0. 拟合结果如表 3 所示, 表中  $P(\chi^2)$  是  $\chi^2$  对应的概率, 是体现拟合优度的特征量. 可以看到:

1. 根据正确的自旋假设进行拟合得到的  $P(\chi^2)$  值明显大于根据不正确的自旋假设得到的  $P(\chi^2)$ , 尤其是自旋为 2、螺旋度振幅值  $|x| \sim |y| \sim 1$  时仍有  $P(\chi^2_{s=2}) \gg P(\chi^2_{s=0})$ . 这表明, 至少在这些情形下不存在螺旋度振幅法中出现的不灵敏区问题.

表 3 纯自旋假设下的拟合参数

输入参数值		拟合参数值								
自旋	$(x, y)$	$\chi^2_{s=0}$	$P(\chi^2_{s=0})$	$\chi^2_{s=2}$	$P(\chi^2_{s=2})$	$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$x$	$y$
0	$a=1$	6.9	0.65	10.7	0.15	$6.7 \pm 2.5$	$10.8 \pm 1.0$	$10.8 \pm 1.8$	$1.60 \pm 0.62$	$1.60 \pm 0.65$
2	$-1, -1$	27.7	$1.1 \times 10^{-3}$	4.0	0.78	$10.2 \pm 1.3$	$-9.8 \pm 1.2$	$-11.6 \pm 1.5$	$-0.96 \pm 0.17$	$-1.13 \pm 0.20$
2	$-1, 0$	34.4	$7.7 \times 10^{-5}$	8.7	0.28	$12.1 \pm 1.2$	$11.7 \pm 0.9$	$1.4 \pm 2.8$	$-0.97 \pm 0.12$	$0.12 \pm 0.23$
2	$-1, 1$	41.4	$4.2 \times 10^{-6}$	10.2	0.18	$10.4 \pm 1.3$	$-9.4 \pm 1.0$	$9.6 \pm 1.4$	$-0.91 \pm 0.15$	$0.92 \pm 0.18$
2	$0, -1$	47.0	$4.0 \times 10^{-7}$	10.2	0.18	$14.5 \pm 1.2$	$-1.5 \pm 1.7$	$-13.3 \pm 1.2$	$-0.11 \pm 0.12$	$-0.92 \pm 0.11$
2	$0, 0$	88.1	$3.9 \times 10^{-15}$	23.6	$1.3 \times 10^{-3}$	$18.1 \pm 0.9$	$-0.5 \pm 1.8$	$-0.5 \pm 1.5$	$-0.03 \pm 0.10$	$-0.03 \pm 0.09$
2	$0, 1$	73.6	$2.9 \times 10^{-12}$	14.8	$3.9 \times 10^{-2}$	$11.9 \pm 1.1$	$0.5 \pm 1.9$	$12.9 \pm 1.0$	$0.05 \pm 0.16$	$1.08 \pm 0.13$
2	$1, -1$	44.8	$1.0 \times 10^{-6}$	3.5	0.83	$12.7 \pm 1.4$	$10.1 \pm 1.1$	$-10.6 \pm 1.6$	$0.79 \pm 0.12$	$-0.83 \pm 0.16$
2	$1, 0$	33.6	$1.0 \times 10^{-4}$	6.3	0.51	$12.5 \pm 1.2$	$12.6 \pm 0.9$	$-0.4 \pm 2.3$	$1.01 \pm 0.12$	$-0.03 \pm 0.19$
2	$1, 1$	43.5	$1.8 \times 10^{-6}$	12.7	$7.9 \times 10^{-2}$	$10.7 \pm 1.4$	$10.8 \pm 0.9$	$7.3 \pm 1.5$	$1.02 \pm 0.16$	$0.68 \pm 0.17$

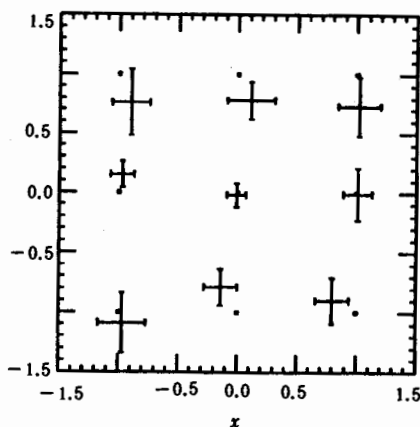


图1 螺旋度振幅的输入值和拟合值

·输入值; +拟合值

2. 对自旋为2时各种  $x, y$  输入值, 拟合得到的参数值均与之一致.

3. 螺旋度振幅  $x=y=0$  的情形下, 虽然  $P(\chi^2_{s=0})$  和  $P(\chi^2_{s=2})$  都要比其它情形的小, 仍有  $P(\chi^2_{s=1}) \gg P(\chi^2_{s=0})$ , 即自旋为0和2在这两种情况下还是区分得很好.

再假设同时存在自旋为0和自旋为2的两个态, 从(5)式看到, 此时自旋0和自旋2的分量之间也有交叉项, 即以自旋0和2同时存在的假设对上述数据进行拟合时有干涉项出现, 写作  $0 \times 2$ , 由于统计量不大, 拟合时除令  $\varphi_x = \varphi_y = 0$  外还令  $\varphi_0 = 0$ . 结果列于表4, 其中  $R_{JA} = |a_{JA}|^2 / \sum_{JA} |a_{JA}|^2$ , 它表征了自旋为  $J$ 、螺旋度为  $A$  的分量占总事例的比例. 可以看到:

1. 在所有情况下(自旋为0或2),  $|a_{JA}|$  拟合值都正确反映了输入的参数值.

2. 由  $R_{JA}$  看出, 自旋为0的态被误认为自旋为2的比例  $< 8\%$ , 而自旋为2的态被误认为自旋为0的态的比例最大者亦不超过  $4\%$ .

3. 自旋为2时  $x, y$  的拟合值与产生值如图1所示. 可以看到它们在误差范围内基本一致.

表4 自旋  $0 \times 2$  干涉假设下的拟合参数

输入参数值		拟合参数值									
自旋	(x, y)	$a_{20}$	$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$x$	$y$	$R_{00}(\%)$	$R_{20}(\%)$	$R_{21}(\%)$	$R_{22}(\%)$
0	$a=1$	$17.4 \pm 1.6$	$-0.5 \pm 1.2$	$-4.8 \pm 3.1$	$-0.5 \pm 2.2$	$9.26 \pm 22.63$	$0.95 \pm 4.78$	92.86	0.08	6.98	0.07
2	-1, -1	$-0.7 \pm 3.5$	$10.4 \pm 1.5$	$-10.1 \pm 1.5$	$-11.3 \pm 2.0$	$-0.97 \pm 0.20$	$-1.09 \pm 0.25$	0.14	31.95	30.07	37.85
2	-1, 0	$0.3 \pm 1.0$	$12.1 \pm 0.9$	$-11.7 \pm 0.7$	$1.8 \pm 1.3$	$-0.97 \pm 0.10$	$0.15 \pm 0.11$	0.03	50.76	48.10	1.12
2	-1, 1	$-1.5 \pm 2.3$	$10.9 \pm 1.5$	$-9.8 \pm 1.1$	$8.2 \pm 2.8$	$-0.90 \pm 0.16$	$0.76 \pm 0.28$	0.75	41.62	33.78	23.85
2	0, -1	$-1.9 \pm 1.8$	$15.6 \pm 1.5$	$-2.2 \pm 2.2$	$-12.4 \pm 2.0$	$-0.14 \pm 0.14$	$-0.79 \pm 0.15$	0.89	60.29	1.17	37.65
2	0, 0	$1.4 \pm 0.8$	$18.2 \pm 1.0$	$-0.2 \pm 1.5$	$0.4 \pm 1.8$	$-0.01 \pm 0.08$	$-0.02 \pm 0.10$	0.59	99.36	0.01	0.05
2	0, 1	$-3.4 \pm 1.6$	$13.6 \pm 1.3$	$1.5 \pm 2.7$	$10.6 \pm 1.9$	$0.11 \pm 0.20$	$0.78 \pm 0.16$	3.74	59.54	0.74	35.97
2	1, -1	$0.9 \pm 1.9$	$12.3 \pm 1.6$	$9.8 \pm 1.3$	$11.1 \pm 1.8$	$0.80 \pm 0.14$	$-0.90 \pm 0.19$	0.23	40.75	26.00	33.02
2	1, 0	$0.5 \pm 1.5$	$12.5 \pm 1.2$	$12.6 \pm 0.9$	$-0.1 \pm 2.8$	$1.01 \pm 0.12$	$-0.01 \pm 0.22$	0.07	49.33	50.36	0.24
2	1, 1	$0.4 \pm 2.2$	$10.5 \pm 1.6$	$10.8 \pm 0.9$	$7.6 \pm 2.4$	$1.02 \pm 0.18$	$0.73 \pm 0.25$	0.06	38.76	40.77	20.40

## 五、矩分析法应用于 $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$ 衰变道

北京谱仪在 1989 年秋季运行中获取了它的第一批  $\sim 2.5 \times 10^6 J/\psi$  数据,我们利用这批数据分析了  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  衰变道. 经过事例筛选得到如图 2 所示的  $K^+ K^-$  不变质量谱, 其中低质量区域 ( $m_{K^+ K^-} < 2.0 \text{ GeV}$ ) 有两个明显的共振峰  $f'_2(1525)$  和  $\theta(1720)$ ; 同时还求得了关于  $\gamma$  和  $K^+$  的三个角分布 ( $\cos \theta_\gamma, \cos \theta_{K^+}, \varphi_{K^+}$ ). 在此基础上对  $X(K^+ K^-)$  态进行了自旋的矩分析. 因为第一批数据统计量有限, 分析中不能把  $m_{K^+ K^-}$  区间分得太小. 为保证共振态存在的区间有足够多的事例数, 作为初步分析, 从不变质量谱(质量单位 GeV) 选择如下三个区间:

$$R_1: 1.10 < m_{K^+ K^-} < 1.40;$$

$$R_2: 1.45 < m_{K^+ K^-} < 1.60;$$

$$R_3: 1.65 < m_{K^+ K^-} < 1.85.$$

用矩分析法对三个区间的数据分别进行拟合得到各区间的 10 个矩如表 5 所示, 拟合矩得到的螺旋度参数值列于表 6 中. 从表 5 看到:

1. 在  $R_1$  区间, 虽然没有明显的共振态, 但用纯自旋为 2 假设时拟合得到的  $P(\chi^2_{S=2})$  大于用纯自旋为 0 假设时拟合得到的  $P(\chi^2_{S=0})$ , 这表明在该区间可能有一个自旋为 2 的态, 它很可能是  $f_2(1270)$ . 由于  $R_1$  区间本身数据量很少 (49 个事例), 再加上  $J/\psi \rightarrow \gamma f_2(1270), f_2(1270) \rightarrow K^+ K^-$  的分支比也很少, 故拟合效果不是太好.

2. 在  $R_2$  区间, 很明显有  $P(\chi^2_{S=2}) \gg P(\chi^2_{S=0})$ , 因此落在该区间的  $f'_2(1525)$  共振态的自旋就是 2. 此外, 根据自旋  $0 \times 2$  干涉假设时的螺旋度拟合结果, 可以得到它的螺旋度振幅是:

$$x = 0.85 \pm 0.11; y = -0.26 \pm 0.16 (\varphi_x = 0, \varphi_y = 0).$$

同时还可以看到, 在该区域 0 分量所占的比例仅为 1%.

3. 在  $R_3$  区间,  $P(\chi^2_{S=0}) \approx P(\chi^2_{S=2})$ , 说明落在该区间的  $\theta(1720)$  的自旋是 0 或是 2 的可能性几乎一样, 即用纯自旋假设的办法无法区分该共振态的自旋是 0 还是 2. 用自旋  $0 \times 2$  分量相干涉的假设去拟合, 得到 0 分量所占的比例为 14%, 远远超过了  $2^{++}$  态被误认为  $0^{++}$  态的上限 4%. 一种可能的解释是在  $m_{K^+ K^-} \sim 1.7 \text{ GeV}$  附近包含两个共振态, 一个是真正的  $2^{++}$  态, 另一个是  $0^{++}$  态. 文献[12]曾对  $K^+ K^-$  低质量区域分别用两个共振态  $f'_2(1525), \theta(1720)$  和三个共振态  $f'_2(1525), G(1590), \theta(1720)$  进行了拟合, 似乎用三个共振态的拟合结果比只用两个共振态的拟合更好, 这与上述看法是类似的. 要想确定该区间共振态的自旋, 需要有更多的  $J/\psi$  数据, 这样可以把不变质量谱分得更细些, 可以有更详细的  $|a_{00}|^2, |a_{20}|^2, |a_{21}|^2$  和  $|a_{22}|^2$  随  $m_{K^+ K^-}$  变化的信息, 据此可以测到自旋为 0 和 2 的各个

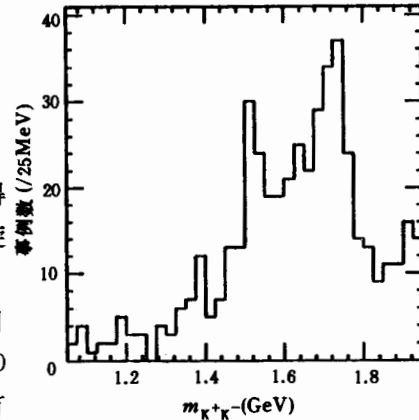


图 2  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  衰变道中的  $K^+ K^-$  不变质量谱

共振态的情况.

表5  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  衰变道的矩的拟合值

K <sup>+</sup> K <sup>-</sup> 质量(GeV)	1.10—1.40	1.45—1.60	1.65—1.80
事例数	49	120	163
$W_{00}^0$	$233 \pm 42$	$517 \pm 57$	$626 \pm 58$
$W_{00}^2$	$74 \pm 56$	$106 \pm 66$	$139 \pm 60$
$W_{20}^0$	$18 \pm 51$	$234 \pm 71$	$275 \pm 62$
$W_{20}^2$	$-67 \pm 80$	$-14 \pm 89$	$45 \pm 81$
$W_{21}^2$	$-78 \pm 25$	$36 \pm 42$	$154 \pm 36$
$W_{22}^2$	$4 \pm 16$	$56 \pm 19$	$57 \pm 21$
$W_{40}^0$	$-21 \pm 54$	$16 \pm 64$	$25 \pm 48$
$W_{40}^2$	$-5 \pm 80$	$40 \pm 75$	$61 \pm 70$
$W_{41}^2$	$37 \pm 31$	$31 \pm 45$	$207 \pm 38$
$W_{42}^2$	$-40 \pm 24$	$51 \pm 25$	$95 \pm 23$

表6  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  衰变道的螺旋度参数拟合值

K <sup>+</sup> K <sup>-</sup> 质量(GeV)	1.10—1.40	1.45—1.60	1.65—1.80
$P(\chi^2_{-0})$	$8.52 \times 10^{-3}$	$1.08 \times 10^{-5}$	$1.06 \times 10^{-8}$
$a_{00}$	$-10.31 \pm 0.99$	$-16.65 \pm 0.93$	$-18.02 \pm 0.87$
$P(\chi^2_{-2})$	$8.21 \times 10^{-2}$	$4.97 \times 10^{-3}$	$1.15 \times 10^{-8}$
$a_{20}$	$9.31 \pm 2.09$	$-13.33 \pm 1.34$	$13.03 \pm 1.33$
$a_{21}$	$-5.38 \pm 1.27$	$-12.29 \pm 0.96$	$10.83 \pm 0.99$
$a_{22}$	$-6.87 \pm 2.09$	$3.72 \pm 1.74$	$4.54 \pm 2.75$
$x$	$-0.58 \pm 0.19$	$0.92 \pm 0.12$	$0.84 \pm 0.11$
$y$	$-0.74 \pm 0.28$	$-0.28 \pm 0.13$	$0.35 \pm 0.21$
$P(\chi^2_{=0 \times 2})$	0.119	$4.41 \times 10^{-3}$	$7.85 \times 10^{-8}$
$a_{00}$	$3.45 \pm 1.90$	$2.01 \pm 1.66$	$7.18 \pm 1.72$
$a_{20}$	$8.35 \pm 1.59$	$14.15 \pm 1.43$	$8.02 \pm 1.33$
$a_{21}$	$-4.48 \pm 1.78$	$12.03 \pm 1.03$	$9.00 \pm 1.19$
$a_{22}$	$-8.63 \pm 1.21$	$-3.67 \pm 2.17$	$12.82 \pm 2.18$
$x$	$-0.54 \pm 0.24$	$0.85 \pm 0.11$	$1.12 \pm 0.24$
$y$	$-1.03 \pm 0.24$	$-0.26 \pm 0.16$	$1.60 \pm 0.30$

## 六、讨 论

从以上分析可以看出,矩分析法与螺旋度振幅法相比具有以下优点:

1. 矩分析法不仅可以用纯自旋假设进行拟合,还可以用自旋干涉假设拟合数据,且某种自旋态被误认为其它自旋态的比例很小.而螺旋度振幅法因其角分布是对不同自旋分别获取的,故只能用纯自旋假设进行拟合,而且只有对单峰的拟合结果才比较可信.

2. 对自旋为2、 $|x| \sim |y| \sim 1$ 和自旋为0这两种情形,矩分析法用纯自旋为2和纯自旋为0两种假设进行拟合时可以用 $P(\chi^2)$ 很容易地加以区分.而螺旋度振幅因其角分布



相近而存在不灵敏区的问题.

3. 矩分析法中对不同实验甚至不同衰变道(例如  $\gamma K^+ K^-$ ,  $\gamma K_S^0 K_S^0$ ,  $\gamma \eta \eta$ , ...)的数据经效率修正后,若其效率修正矩很相近,则这些数据可以加起来,统一以最小二乘法拟合矩以增加统计量.而螺旋度振幅法仅从角分布信息是无法保证这些数据能否相加的.

虽然矩分析法有很多优点,但也有不足之处:

1. 因为要进行各种自旋态相干涉的拟合,故要有较高统计量.

2. 从(5)式知独立的矩有 10 个,而螺旋度参数只有 7 个,因此用最小二乘法拟合螺旋度参数时存在多解问题.解决的办法是设置各种不同的初值取  $\chi^2$  最小的一组值,这样就增加了工作量.

3. 为了减少统计误差,一般要求在某一质量区间内有  $N_{\text{acc}} \sim 10N_{\text{obs}}$ .由于矩分析法要求有较多的  $N_{\text{obs}}$ ,故必须产生大量的蒙特卡洛事例才有足够的  $N_{\text{acc}}$ .

4. 要求有十分真实可靠的蒙特卡洛模拟.尤其是要能做到不同实验甚至不同衰变道的数据相加,蒙特卡洛模拟必须真实地再现取数时的实际情况.

## 七、结 论

本文详细描述了  $J/\psi$  辐射衰变到一对赝标介子过程中赝标介子对自旋的矩分析法的基本原理和一般方法.引用  $J/\psi \rightarrow \gamma \theta(1720)$ ,  $\theta(1720) \rightarrow K^+ K^-$  过程对该方法进行了蒙特卡洛研究,结果表明对于自旋为 0 和自旋为 2 这两种情形可以用  $P(\chi^2)$  区分,而且它们的误辨率很小;在自旋为 2 时,  $x, y$  的拟合值与输入值在误差范围内一致.因此矩分析法分析自旋的策略是成功的.本文在对北京谱仪实际数据的处理中分析了  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  低质量区域共振态的自旋分析,初步结论是:  $f_2'(1525)$  确实是  $2^{++}$  介子,其螺旋度振幅值与世界平均值一致;在  $m_{K^+ K^-} \sim 1.7\text{GeV}$  附近很可能有两个态;对于  $\theta(1720)$ ,由于统计量不足,还不能最后判定它的自旋.

本工作是在 BES 合作组内进行的,是为 BES 数据分析而准备的,本文所采用的  $J/\psi$  数据也是在 BES 合作组全体成员的共同努力下获得的,在此,作者向全体成员,特别是物理一室数据生成组和刻度组的同志们,表示衷心的感谢.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] L. Kopke and N. Werms, *Phys. Reports*, **174**(1989), 67.
- [ 2 ] K. F. Einsweiler, Ph. D. Thesis, SLAC-Report-278(1984); R. M. Baltrusaitis et al., *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 2077.
- [ 3 ] C. Edwards et al., *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 458.
- [ 4 ] J. Augustin et al., LAL/85-27, July, 1985; J. Augustin et al., *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 2238.
- [ 5 ] Чжоу Гуан-чжао, *ЖЭТФ* **36**(1959), 909; M. Jacob and G. C. Wick, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **7**(1959), 404; J. D. Richman, Ph. D. Thesis, CALT-68-1231, Appendix A, 1985.
- [ 6 ] W. G. Yan, Inner Report of IHEP, BES Note 86-13, 1986; T. Z. Ruan, Proc. of the BIMP Symp. on Heavy Flavor Physics, Peking, Aug. 11-20, 1988, P410-418;  
王泰杰等, *高能物理与核物理*, **14**(1990), 385;  
严武光等, *高能物理与核物理*, **14**(1990), 193;

- W. G. Yan, *Proc. of HADRON'91*, (1991), 706.
- [ 7 ] S. U. Chung, *Phys. Rev.*, **169**(1968), 1342.
- [ 8 ] T. Bolton, Ph. D. Thesis, MIT(1988).
- [ 9 ] WA76 Collaboration, T. A. Armstrong et al. ,CERN/EP/89-70; *Phys. Lett.*, **227B**(1989), 186.
- [10] L. P. Chen et al. ,SLAC-PUB-5378(1990).
- [11] 陈申见, 硕士学位论文《 $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  衰变道的研究》, 1992.
- [12] W. G. Yan, *Proc. of HADRON'91*, (1991), 94.

## Moment Method for Spin Analysis of the Pseudoscalar Pair Produced in the Radiative $J/\psi$ Decay

CHEN SHENJIAN YAN WUGUANG LI WEIGUO

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039*)

### ABSTRACT

The formalism and technique of the moment method for spin analysis of the boson  $X$  in  $J/\psi \rightarrow \gamma X, X \rightarrow P_1 P_2$  are presented. The analysis technique is cited to study the spin of  $\theta(1720)$  with Monte Carlo data samples. One finds that the spin of the boson  $X$  can be effectively determined by the moment method. As an example, the technique is used to measure the spin of the resonances in the low mass region of  $J/\psi \rightarrow \gamma K^+ K^-$  channel at BES. It is found that the spin analysis strategy of the moment method is successful.