第 17 卷 第 11 期
1993 年 11 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 11
Nov., 1993

关于 sd IBM 中自洽 Q 框架的高阶效应*

王保林
(淮阴师专，淮阴 223001)

阙建中　　　　张庆营
(衡阳工学院，衡阳 421001)　(湖南大学，长沙 410082)

摘　　要

本文用 $1/N$ 展开技术，对 sd IBM 自洽四极算符框架(CQF)的能量公式、形变参数、$E2$ 跃迁约化矩阵元等，系统地给出计算到 $1/N$ 阶修正的解析表达式．表明在内禀框架下，考虑角动量投影的重要性．

一、引　　言

D. D. Warner 和 R. F. Casten[1]在讨论 sd IBM 的 $SU(3) \to SO(6)$ 过渡时，将体系的 Hamiltonian 取为简单的四极相互作用形式

$$H = -\kappa Q \cdot Q - \kappa' L \cdot L, \tag{1}$$

其中，Q 为玻色子四极矩算符，L 为角动量算符，

$$Q = (s^+ \tilde{d} + d^+ s) + \frac{\chi_Q}{\sqrt{5}} (d^+ \tilde{d})^{(2)},$$

$$L = \sqrt{10} (d^+ \tilde{d})^{(1)}. \tag{2}$$

这种 Hamiltonian 的特点是，在 Q 中引进了形状参数 χ_Q. 当 $\chi_Q = -\sqrt{35}/2$ 时，(1)式为 $SU(3)$ 极限的 Hamiltonian；当 $\chi_Q = 0$ 时．得到 $SO(6)$ 极限的 Hamiltonian. 于是，改变 χ_Q 的值，可使体系从一种极限过渡到另一种极限．而体系的 $E2$ 跃迁算符取为

$$T(E2) = \alpha Q, \tag{3}$$

α 为玻色子有效电荷，Q 与(1)式中的完全相同．这种方法通常被称为自洽四极算符框架(CQF).

在上述框架下，文献[1]用数值方法，对过渡核进行系统的描述和预言，给出 χ_Q 的取值范围是：$-1.2 < \chi_Q < -0.5$. J. N. Ginochio 等[2]提出的 sd IBM 内禀态，建立了 IBM 和几何模型的对应关系．在此内禀态下，R. Bijker 等对 $E2$ 跃迁进行解析计算，得到与文献[1]类似的结果．但是，文献[3]中还存在与实验及数值结果明显不符的地方，比如 $\beta \to g$ 的 $E2$ 跃迁约化矩阵元始终为零[4]. 主要原因是他们没有考虑高阶效应．最近，S. Kuyucak 和

* 由国家自然科学基金和江苏省教委自然科学基金、青年教师基金资助．

本文 1992 年 4 月 7 日收到．

I. Morrison[5]提出的 $1/N$ 展开技术(ONET)，使我们能够在内禀态下，通过角动量投影，对能谱和 $E2$ 跃迁约化矩阵元，进行解析的高阶计算.

二、能谱公式和四极形变参量

根据文献[5]的分析，N 个 s、d 玻色子体系的基带内禀态可定义为

$$|\phi_g\rangle = (b_0^+)^N|-\rangle, \tag{4}$$

其中内禀玻色子产生算符

$$b_0^+ = \chi_0 s^+ + \chi_2 d_0^+. \tag{5}$$

与文献[2]的定义比较，基带内禀参数 χ_0、χ_2 可表示成四极形变参量 β 的函数，

$$\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, \qquad \chi_2 = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}. \tag{6}$$

这里的 β 与 Bohr-Mottelson 模型的形变参量有下列简单关系[2]

$$\beta_{\mathrm{BMM}} \approx 1.18\left(\frac{2N}{A}\right)\beta_{\mathrm{IBM}}. \tag{7}$$

由于(1)式中的 $-\kappa' L\cdot L$ 对内禀态不产生影响，可先行略去，只讨论 $-\kappa Q\cdot Q$ 项. 不考虑角动量投影时，Hamiltonian 矩阵元

$$\langle H\rangle_g = \langle\phi_g|H|\phi_g\rangle/\langle\phi_g|\phi_g\rangle. \tag{8}$$

由玻色子算符的对易关系，可得到

$$\langle H\rangle_g = -\kappa N(N-1)\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}(4-4f\beta+f^2\beta^2) - \frac{\kappa N}{1+\beta^2}\left(5-\beta^2+\frac{7}{2}f^2\beta^2\right), \tag{9}$$

其中

$$f = \sqrt{\frac{2}{35}}\chi_Q. \tag{10}$$

而考虑角动量投影时，Hamiltonian 矩阵元按下式计算[5]：

$$\langle H\rangle_{K,L} = \langle\phi_K|HP_{KK}^L|\phi_K\rangle/\langle\phi_K|P_{KK}^L|\phi_K\rangle, \tag{11}$$

其中 $|\phi_K\rangle$ 代表基带或 β、γ 带的内禀态，投影算符

$$P_{MK}^L = \frac{2L+1}{8\pi^2}\int D_{MK}^{L*}(\Omega)R(\Omega)\mathrm{d}\Omega. \tag{12}$$

按照 ONET 的计算方法，展开到第一层次时，基带矩阵元

$$\langle H\rangle_{g,L} = -\kappa N^2\left(R+\frac{S}{N}+\frac{\bar{L}}{N^2}T\right). \tag{13}$$

其中的

$$\bar{L}\equiv L(L+1), \tag{13a}$$

$$R = \frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}(4-4f\beta+f^2\beta^2), \tag{13b}$$

$$S = \frac{1}{1+\beta^2}\left[\frac{\beta^2}{1+\beta^2}(2-f\beta)^2-\frac{1}{2}(2-f\beta)(2-3f\beta)+5+\beta^2+\frac{7}{2}f^2\beta^2\right], \tag{13c}$$

$$T=\frac{2-f\beta}{3}\left[\frac{1}{4\beta^2}(2-3f\beta)-\frac{1}{1+\beta^2}(2-f\beta)\right]. \tag{13d}$$

形变参量 β 可由(9)式变分(投影前变分,VBP)

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\langle H\rangle_g = 0, \tag{14}$$

或由(13)式变分(投影后变分,VAP)

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\langle H\rangle_{g,L} = 0 \tag{15}$$

来确定.一般来说,(14)、(15)式为非线性方程,需采用数值方法进行求解.根据 $1/N$ 的方次,通过适当的近似,也可以得出近似的解析表达式.在对(9)式和(13)式只取第一项时(N^2 项),VBP 和 VAP 的结果完全一样,很容易得到形变参量的零阶值 β_0 满足方程

$$1-f\beta_0-\beta_0^2=0\,. \tag{16}$$

由此可得到两组解

$$\beta_0=\frac{1}{2}(-f+\sqrt{f^2+4}), \tag{17a}$$

$$\beta'_0==-\frac{1}{\beta_0}\,. \tag{17b}$$

根据文献[5]的定义,(17)式即为 Q_0 的本征模方程[2,5]

$$[Q_0,b_0^+]=\lambda_0 b_0^+ \tag{18}$$

的两个本征值 λ_0 和 λ'_0,而前者对应于基带内禀态,后者可构造β带内禀态(见后面的计算).由(17a),在 $SU(3)$ 极限下,$\beta_0=\sqrt{2}$,基带内禀参数为 $x_0=\sqrt{\frac{1}{3}}$,$x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}$.一般情况下,内禀态为 χ_a 的函数.

对于 β 的高次项,可根据文献[5]中的逐阶近似方法,分别由(14)、(15)式给出解析结果,两种方法得到的结果将有所区别.

用 VBP,由(14)式,设

$$\beta=\beta_0+\frac{\beta_1}{N}\,, \tag{19}$$

根据逐阶近似方法,由(9)式

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}(4-4f\beta+f^2\beta^2)\right]_{\beta=\beta_0+\frac{\beta_1}{N}}$$
$$=-\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}(4-4f\beta+f^2\beta^2)-\frac{1}{1+\beta^2}\left(5-\beta^2+\frac{7}{2}f^2\beta^2\right)\right]_{\beta=\beta_0}. \tag{20}$$

左边只近似到 $1/N$ 项,结合 β_0 满足的方程(16),可以解出

$$\beta_1=-\frac{(7f^2-8)(f\beta_0-2)}{4\beta_0(f^2+4)}\,. \tag{21}$$

此即文献[2]的结果,将上式代入(19)式,得出计算到 $1/N$ 时,β 的解析表达式

$$\beta=\beta_0-\frac{1}{N}\frac{(7f^2-8)(f\beta_0-2)}{4\beta_0(f^2+4)}\,. \tag{22}$$

用 VAP,由(15)式,可设

$$\beta = \beta_0 + \frac{\beta_1}{N} + \frac{\bar{L}}{N^2}\beta_2, \tag{23}$$

由(13)式，β_1，β_2 分别由以下两式近似求解：

$$\left.\frac{\partial R}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_0+\frac{\beta_1}{N}} = -\frac{1}{N}\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_0}, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_0+\frac{\beta_2}{N^2}L} = -\frac{\bar{L}}{N^2}\left.\frac{\partial T}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_0}. \tag{25}$$

经复杂计算，结合(16)式得到

$$\beta_1 = -\frac{(2f^2-1)(f\beta_0-2)}{\beta_0(f^2+4)}. \tag{26}$$

而

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_0} = 0 \tag{27}$$

则有 $\beta_2=0$，表明在 sd IBM 中，只考虑四极相互作用时，形变参量及内禀态不随角动量变化. VAP 得到的形变参数 β 近似到 $1/N$ 的结果为

$$\beta = \beta_0 - \frac{1}{N}\frac{(2f^2-1)(f\beta_0-2)}{\beta_0(f^2+4)}. \tag{28}$$

与 VBP 的结果(22)式有所差别，但在 $SU(3)\to SO(6)$ 范围内，$\chi_Q=-\sqrt{35}/2\to 0$，从(22)和(28)式都可得到 β 随 N 的增大而增大，其物理意义是很清楚的. 需要说明的是，上述解析结果用于定性讨论很方便，定量计算时，对(14)或(15)式进行数值求解将更准确.

对 β、γ 带的内禀态，文献[2,3]中没有考虑单双声子的混合，这样做对能量计算影响不大，但对电磁跃迁，往往会带来很大误差. 为了计算 $E2$ 跃迁的高阶效应，在只计算到第一层次时，β 带内禀态可定义为[5]

$$|\phi_\beta\rangle = [(b_0^+)^{N-1}b_0'^+ + (b_0^+)^{N-2}\zeta'_{1\nu}b_1^+b_{-1}^+]|-\rangle, \tag{29}$$

β 带的内禀玻色子产生算符

$$b_0'^+ = x_0 s^+ + x_2' d_0^+, \tag{30}$$

内禀参数 x_0'、x_2' 与基带的参数满足

$$x_0x_0' + x_2x_2' = 0 \tag{31}$$

的关系. 因此，x_0'、x_2' 即为(18)式中对应于 $\lambda_0'(\beta_0')$ 的基矢，

$$x_0' = \frac{-\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad x_2' = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}. \tag{32}$$

在 $SU(3)$ 极限下，$x_0'=-\sqrt{\frac{2}{3}}$，$x_2'=\sqrt{\frac{1}{3}}$. 而 $b_{\pm1}^+=d_{\pm1}^+$. (29)式中的单双声子混合系数 $\zeta_{1\nu}'$ 由基带和 β 带的正交关系得到[5]

$$\zeta_{1\nu}' = \frac{1}{\beta}. \tag{33}$$

同理，可构造 γ 带的内禀态为

$$|\phi_\gamma\rangle = [(b_0^+)^{N-1}b_2^+ + (b_0^+)^{N-2}\zeta_{1\nu}^2 b_1^{+2}]|-\rangle. \tag{34}$$

其中 $b_2^+=d_2^+$，混合系数由 γ 带和基带的正交关系得：

$$\zeta_{1\nu}^{2}=-\frac{\sqrt{1+\beta^{2}}}{\sqrt{6}\,\beta}\,. \tag{35}$$

(29)和(34)式的内禀态，忽略单双声子混合时，与文献[2,3]完全一样.

在计算β、γ带的 Hamiltonian 矩阵元时，为方便起见，可忽略混杂项的影响，我们得到计算到第一层次的β带 Hamiltonian 矩阵元为

$$\langle H\rangle_{\beta,L}=-\kappa N^{2}\left(R+\frac{S'}{N}+\frac{\bar{L}}{N^{2}}T\right). \tag{36}$$

其中

$$S'=\frac{\beta(2-f\beta)}{(1+\beta^{2})^{2}}(4\beta+f-f\beta^{2})+\frac{1}{1+\beta^{2}}\left[5+\beta^{2}+\frac{7}{2}f^{2}\beta^{2}-\frac{1}{2}(2-f\beta)(2-3f\beta)\right]. \tag{37}$$

γ带的矩阵元

$$\langle H\rangle_{\gamma,L}=-\kappa N^{2}\left(R+\frac{S_{2}}{N}+\frac{\bar{L}}{N^{2}}T\right). \tag{38}$$

其中，

$$S_{2}=-\frac{\beta^{2}}{(1+\beta^{2})^{2}}(2-f\beta)^{2}+\frac{1}{1+\beta^{2}}\left[5+\beta^{2}+\frac{7}{2}f^{2}\beta^{2}-\frac{1}{2}(2-f\beta)(2-3f\beta)+2(1+4f\beta)\right]. \tag{39}$$

差别只在 $1/N$ 项，即带头位置上. 计算到第一层次时，各个带的转动惯量显然是相同的，

$$\mathscr{I}_{0}=-\frac{1}{2\kappa T}\,. \tag{40}$$

在 $SU(3)$ 极限下，可得 $\mathscr{I}_{0}=\frac{4}{3\kappa}$，这和群论计算的结果完全一样. 要讨论转动惯量随带的变化，需要计算到第二层次.

三、关于 $E2$ 跃迁的约化矩阵元

文献[3]对 $E2$ 算符的解析研究，没有考虑角动量投影和单、双声子激发的混合，在对 χ_Q 取值范围的研究中，取的是 $SU(3)$ 极限的内禀态($\beta=\sqrt{2}$)，而实际上 β 随 χ_Q 而变化，因而文献[3]的分析有一定的局限性和不自洽性. 这些问题通过高阶计算，可以得到较好的解决.

考虑角动量投影及单、双声子激发的混合时，由文献[5]，我们得到基带内 $E2$ 跃迁约化矩阵元

$$\langle g,L+2\,\|\,T(E2)\,\|\,g,L\rangle=\alpha N\sqrt{2L+1}\langle L020|L+20\rangle\times\left\{\frac{\beta(2-f\beta)}{1+\beta^{2}}+\frac{1}{N}\left[\frac{\beta(2-f\beta)}{1+\beta^{2}}+\frac{1}{2}f\beta\right]-\frac{\bar{L}+\overline{L+2}}{N^{2}}\,\frac{(2\beta^{2}-1)(2-f\beta)}{36\beta^{3}}\right\}. \tag{41}$$

β→g 带的矩阵元

$$\langle\beta,L+2\,\|\,T(E2)\,\|\,g,L\rangle=\alpha\sqrt{N}\sqrt{2L+1}\langle L020|L+20\rangle$$

$$\times \left\{ \frac{1}{1+\beta^2}(1-\beta^2-f\beta) + \frac{2L+3}{N} \cdot \frac{1}{3\beta^2}(f\beta+\beta^2-1) \right\}. \tag{42}$$

$\gamma \to g$ 带的矩阵元

$$\langle \gamma, L+2 \| T(E2) \| g, L \rangle = \alpha \sqrt{2N} \langle L022 | L+22 \rangle$$
$$\times \left\{ \frac{1+f\beta}{1+\beta^2} - \frac{1}{N} \cdot \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{3\beta^2}(1+f\beta) \right\}. \tag{43}$$

对 $\gamma \to \beta$ 带的跃迁,计算到第一层次很繁杂,这里只计算到第零层次(主导项)

$$\langle \gamma, L+2 \| T(E2) \| \beta, L \rangle = \alpha \sqrt{2} \ \sqrt{2L+1} \langle L022 | L+22 \rangle$$
$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}(-\beta+f) - \frac{1+f\beta}{\beta^2 \sqrt{1+\beta^2}} \right\}. \tag{44}$$

上述结果中的第一项与文献[3]完全一样,其余均为修正项. 由(42)式,当 $\beta=\beta_0$ 时,即使考虑角动量投影,仍有 $\beta \to g$ 带的 $E2$ 跃迁禁戒. 欲使其不为零,必须考虑 β 的高阶修正.

四、小　　结

本文采用 ONET,给出 CQF 下的能谱公式、形变参量、内禀态及 $E2$ 跃迁的解析计算公式. 其结果与早期的内禀工作[1,2]比较,大多给出了修正项. 由于结果都是解析的,因而在数值计算和物理分析上都将带来很大的方便.

参　考　文　献

[1] D. D. Warner, R. F. Casten, *Phys. Rev.*, C**25**(1982), 2019; C**28**(1983), 1798; *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1385.

[2] J. N. Ginocchio, M. W. Kirson, *Nucl. Phys.*, A**350**(1980), 31.

[3] R. Bijker, A. E. L. Dieperink, *Phys. Rev.*, C**26**(1982), 2688.

[4] D. D. Warner, R. F. Casten, *Phys. Rev.*, C**26**(1982), 2690.

[5] S. Kuyucak, I. Morrison, *Ann. Phys.*, **181**(1988), 79.

On the Higher Order Effects of A Consistent Q Framework in the sd Interacting Boson Model

WANG BAOLIN
(*Huaiyin Teachers College*, *Huaiyin* 223001)
QUE JIANZHONG
(*Hengyang Institute of Technology*, *Hengyang* 421000)
ZHANG QINGYING
(*Hunan University*, *Changsha* 410082)

ABSTRACT

By utilizing the 1/N expansion technique(ONET), the analytical expressions of low-lying energy spectrum, the deformation parameter and the reduced matrix elements of E2 transitions to the order of 1/N are systematically given for a consistent Q framework in the sd interacting boson model. It is shown that it is important to consider the angular momentum projection in the intrinsic state formalism.