

## $e^+e^-$ 对撞过程中辐射因子的严格计算

吴 济 民

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

### 摘 要

利用我们曾经解析求得的电子、正电子分布函数的表达式, 我们求得了  $e^+e^-$  对撞过程中辐射因子的严格的解析表达式。这一级数表达式可以很快地收敛到所要求的精度。本文也给出了与现有的近似结果的比较。本文结果十分有益于精确计算  $e^+e^-$  对撞过程中的辐射修正。

当分析  $e^+e^-$  对撞过程的实验数据时, 人们必须对数据作辐射修正处理才能得到正确的物理结果。这种修正的效果往往很不小, 而且常常十分敏感地依赖于辐射修正的处理方法。因此, 尽可能精确地讨论辐射修正成为我们十分关注的理论问题。1985 年 Kuraev 和 Fadin<sup>[1]</sup> 提出了结构函数方法用来计算  $e^+e^-$  对撞过程中的辐射修正。这种方法改进了传统的费曼图逐级计算方法。进一步改进了辐射修正计算, 成为大家普遍使用的一种方法。

在这种方法中, 首先引入电子、正电子的分布函数  $D_e(x, S)$ 、 $D_{\bar{e}}(x, S)$ 。它描写能量为  $E$  的电子、正电子由于不断地辐射光子后而具有纵向动量份额为  $x$  的几率,  $x = \frac{p}{E}$ 。  $S$  为它的能量尺度。任一个  $e^+e^-$  对撞过程(通过单光子湮没道)的截面就可以表示为:

$$\sigma(S) = \int_0^1 dx_1 dx_2 D_e(x_1, S) D_{\bar{e}}(x_2, S) \sigma_B(x_1 x_2 S). \quad (1)$$

其中  $\sigma_B(x_1 x_2 S)$  为电子、正电子在始态对撞顶点上在质心系总能量的平方为  $x_1 x_2 S$  下相撞后某一过程的截面。

进而, 改变积分变量, 引入新变量  $x$ 。  $\sigma(S)$  被改写成:

$$\sigma(S) = \int_0^1 dx F(x, S) \sigma_B((1-x)S). \quad (2)$$

其中

$$x_1 x_2 = 1 - x, \quad (3)$$

辐射因子 (radiator)  $F(x, S)$  定义为:

$$F(x, S) = \int_{1-x}^1 \frac{dz}{z} D_e(z, S) D_{\bar{e}}\left(\frac{1-x}{z}, S\right). \quad (4)$$

(2) 式是  $e^+e^-$  对撞中单光子湮没道下各种过程的普适性截面表达式。在已有的文献中,

人们没有能精确地求得分布函数  $D_e, D_{e^+}$ . 只是用某些近似方法得到了它. 不可避免地存在某些误差. 因而由此分布函数进一步求得的辐射因子和辐射修正也带有一定的误差.

为了精确地计算  $e^+e^-$  对撞过程的辐射修正问题, 我们尽可能精确地求得了电子、正电子分布函数<sup>[2]</sup>. 这是一个级数解析表达式. 它可以很快地收敛到所要求的精度. 这样, 使求得辐射因子解析解成为可能. 本文将给出这个结果.

文献[2]给出了电子、正电子的分布函数. 它由非单态和单态两个分量组成. 即使在非常高的能量尺度下(例如, 几十 TeV), 后者也小于前者若干个数量级, 所以, 我们只要利用它的非单态分量就足够精确了. 它是:

$$D_e(x, S) = e^{(\frac{1}{2}-C)2F} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{2F-1} \sum_{k=0}^{\infty} G_k(F) \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right)^k}{\Gamma(2F+k)}. \quad (5)$$

其中,

$$F = -\frac{3}{2} \ln \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{S}{m_e^2}\right), \quad (6)$$

$$C = 0.5772156649 \cdots \text{欧拉常数.}$$

展开系数为:

$$\begin{aligned} G_0 &= 1, \\ G_1 &= -F, \\ G_2 &= 2F \frac{3(2F) + 14}{24}, \\ G_3 &= -(2F) \frac{(2F)^2 + 14(2F) + 24}{48}, \\ G_4 &= 2F \frac{15(2F)^3 + 420(2F)^2 + 2420(2F) + 2832}{5760}, \\ G_5 &= -(2F) \frac{3(2F)^4 + 140(2F)^3 + 1700(2F)^2 + 6192(2F) + 5760}{11520} \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

为了便于完成积分(4), 得到辐射因子, 让我们把电子分布函数(5)展成  $(1-x)$  的幂级数:

$$\begin{aligned} D_e(x, S) &= e^{(\frac{1}{2}-C)2F} \{ C_0(1-x)^{2F-1} + C_1(1-x)^{2F} + C_2(1-x)^{2F+1} \\ &\quad + C_3(1-x)^{2F+2} + C_4(1-x)^{2F+3} + \dots \}. \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\Gamma(2F)}, \\ C_1 &= \frac{1}{\Gamma(2F+1)} (2F^2 - 2F), \\ C_2 &= \frac{1}{\Gamma(2F+2)} \left( 2F^4 - \frac{4}{3} F^3 - F^2 + F \right), \end{aligned}$$

$$C_3 = \frac{1}{\Gamma(2F+3)} \frac{4}{3} (F^6 + F^5 - F^4 + F^2),$$

$$C_4 = \frac{1}{\Gamma(2F+4)} \frac{1}{6} \left( 4F^8 + 16F^7 + \frac{52}{3}F^6 + \frac{12}{5}F^5 + 7F^4 + 18F^3 + 9F^2 \right).$$

.....

进而,对此分布函数,正如文献[1]所述的那样还应作如下修正:

(1) 须要加入虚电子圈的贡献<sup>[1,3]</sup>,它的最低级贡献为 $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2$ 级,

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[ -\frac{1}{36}L^3 + \frac{15}{72}L^2 + \left(\frac{1}{18}\pi^2 - \frac{265}{216}\right)L + \text{常数} \right],$$

$$L = \ln \frac{S}{m_e^2}$$

由于 $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 L$ 项以下的贡献已小于 $10^{-5}$ 量级,故只要考虑前两项的贡献就足够精确了.

为此,在展开式(8)中取

$$C_0 = \frac{1}{\Gamma(2F)} \left[ 1 - \frac{\beta^2}{288} (2L - 15) \right]. \quad (9)$$

$$\beta \equiv \frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{S}{m_e^2} = \frac{2\alpha}{\pi} L. \quad (10)$$

(2) 比较由此分布函数计算得到的截面与软光子近似下的相应结果<sup>[1,4]</sup>,要在分布函数中作替代 $L \rightarrow L - 1$ .这样,再利用下一公式完成 $F(x, S)$ 的积分<sup>[5]</sup>.

$$\begin{aligned} \int_{1-x}^1 \frac{dz}{z} (1-z)^a \left(1 - \frac{1-x}{z}\right)^b &= x^{a+b+1} B(a+1, b+1) F(b+1, a+1, a+b+2, x) \\ &= x^{a+b+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+1+n)\Gamma(a+1+n)}{\Gamma(a+b+2+n)} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $B(x, y)$ 、 $F(a, b, c, x)$ 和 $\Gamma(x)$ 分别为Beta函数,超几何函数和伽玛函数.最终得到辐射因子的表式为:

$$F(x, S) = e^{(\frac{3}{2}-C)F} \{ a_0 x^{4F-1} + a_1 x^{4F} + a_2 x^{4F+1} + a_3 x^{4F+2} + a_4 x^{4F+3} + \dots \}.$$

其中

$$a_0 = \frac{(1-a)^2}{\Gamma(4F)},$$

$$a_1 = \frac{1}{\Gamma(4F+1)} (8F^2 - 4F + 4aF - 12aF^2 + 4a^2F^2),$$

$$a_2 = \frac{1}{\Gamma(4F+2)} \left( 2F - 4F^2 - \frac{32}{3}F^3 + 32F^4 - 2aF + 10aF^2 + \dots \right),$$

$$\begin{aligned} a_3 = \frac{1}{\Gamma(4F+3)} & \left\{ \frac{16}{3}F^2(1 - 4F^2 + 8F^3 + 16F^4) \right. \\ & - a(-8F^2 - 24F^4 - 104F^5 - 72F^6) \\ & \left. + 16a^2F^2(4 + 24F + 52F^2 + 48F^3 + 16F^4) \right\}, \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{\Gamma(4F+4)} \left\{ \frac{4}{a} \left( \frac{27}{2} F^2 + 54F^3 + 42F^4 + \frac{144}{5} F^5 + 416F^6 + 768F^7 + 384F^8 \right) \right. \\ \left. - a \left( 11F^2 + \frac{154}{3} F^3 + 93F^4 + \frac{3652}{15} F^5 + \frac{4204}{9} F^6 + 384F^7 + 108F^8 \right) \right. \\ \left. + a^2 \left( 6F^2 + 44F^3 + \frac{386}{3} F^4 + 192F^5 + \frac{464}{3} F^6 + 64F^7 + \frac{32}{3} F^8 \right) \right\}.$$

.....

这是一个级数表达式,是严格的解析结果。图 1 给出了此展开式精确到各级的曲线、可以看出,这级数收敛得很快。在  $x < 0.3$  范围内,展式前三级之和与饱和值的相对误差就小于  $4 \times 10^{-4}$ 。在  $x < 0.5$  范围内,该相对误差小于 3%。

从上式还可以看出,  $F(x, S)$  的贡献集中在小  $x$  区域。如果我们讨论  $e^+e^-$  对撞产生共振态或讨论阈行为,我们更是注意小  $x$  区域内的  $F(x, S)$  行为,因为那里给出主要贡献。(小  $x$  对应于  $x_1, x_2$  靠近 1 的情况)。越是在小  $x$  区域,上展开式的收敛情况越好。例如,在  $x < 0.1$  区域内,前三项的和就达到了饱和值。

许多文献中还常使用固定耦合常数近似,即在求解电子分布函数  $D(x, S)$  时,取

$$\alpha(t) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} t} \simeq \alpha.$$

则导致在分布函数  $D(x, S)$  中出现下列的变量替代:

$$F = -\frac{3}{2} \ln \left( 1 - \frac{\alpha}{3\pi} t \right) \rightarrow \frac{\alpha}{2\pi} t = \frac{\beta}{4}.$$

在这一近似下,使辐射因子  $F(x, S)$  也产生小于 4% ( $E_b = 2\text{GeV}$ ) - 8% ( $E_b = 20\text{GeV}$ ) 的变化。但是还小于目前对理论精度的要求(例如要求误差小于 1%)。所以,我们也可以在实际应用中接收这一替代。

让我们把本文的严格结果(到展开式第五级)与现有的近似结果相比较。

(1) Kuraev、Fadin<sup>[5]</sup> 给出

$$F(x, S) = \beta x^{\beta-1} \left[ 1 + \frac{3}{4} \beta + \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\beta^2}{24} \left( \frac{1}{3} \ln \frac{S}{m_e^2} + 2\pi^2 - \frac{37}{4} \right) \right] \\ - \beta \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \\ + \frac{1}{8} \beta^2 \left[ 4(2-x) \ln \frac{1}{x} - \frac{1+3(1-x)^2}{x} \ln(1-x) - 6+x \right].$$

(2) Nicosini、Trentadue<sup>[6]</sup> 给出

$$F(x, S) = \Delta(S) \beta x^{\beta-1} - \frac{1}{2} \beta (2-x) \\ + \frac{1}{8} \beta^2 \left\{ (2-x) [3 \ln(1-x) - 4 \ln x] - 4 \frac{\ln(1-x)}{x} + x - 6 \right\}.$$

其中,

$$\beta = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{S}{m_e^2} - 1 \right),$$

$$\begin{aligned} \Delta(S) = & 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{3}{2} \ln \frac{S}{m_c^2} + 2(\zeta(2) - 1) \right] \\ & + \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \left\{ \left[ \frac{9}{8} - 2\zeta(2) \right] \left( \ln \frac{S}{m_c^2} \right)^2 \right. \\ & + \left[ 3\zeta(3) + \frac{11}{2} \zeta(2) - \frac{45}{16} \right] \ln \frac{S}{m_c^2} \\ & \left. + \left[ -\frac{6}{5} \zeta^2(2) - \frac{9}{2} \zeta(3) - 6\zeta(2) \ln 2 + \frac{3}{8} \zeta(2) + \frac{57}{12} \right] \right\}. \end{aligned}$$

$\zeta(2), \zeta(3)$  为黎曼  $\zeta$  函数。

由于在图 1 上难以区别上述表达式与本文结果的差别,我们在图 2 上给出此二表式与本文结果的相对偏差,可以看出,在  $x < 0.7$  范围内,现有的近似结果小于本严格结果。相对误差在 6‰ 以内。在  $x > 0.7$  范围内,现有的近似结果大于本严格结果。当然,我们仍然关心小  $x$  区域的行为。

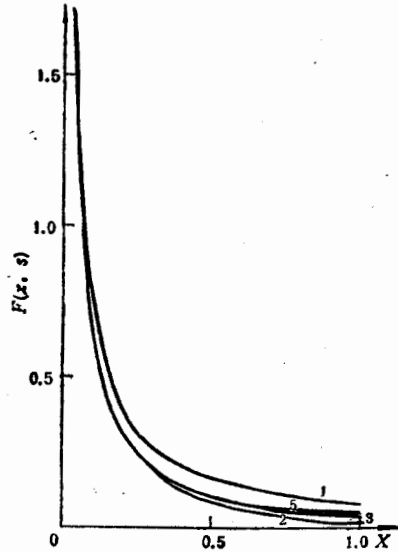


图 1  $F(x, S)$  的行为。

曲线 1, 2, 3, 5 代表分别精确到展开到第 1, 2, 3, 5 级的行为。  
(前四级展式和曲线 3, 5 之间)

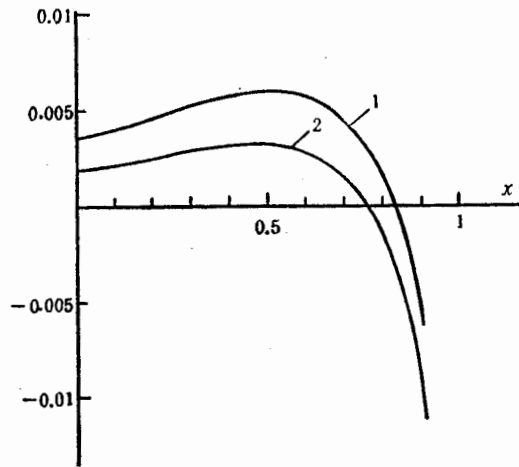


图 2 严格结果与近似结果之间的相对误差。

曲线 1 对应于 Kuraev, Fadin 近似结果; 曲线 2 对应于 Nicrosini, Trentadue 近似结果

高能物理学历来重视数据的辐射修正处理,并且要求越来越高。人们也花不少注意力去不断提高辐射修正处理的精度。本文给出了在结构函数方法中普遍使用的辐射因子的严格解析表达式。指出,我们必须用此严格推出的结果才有可能进一步得到正确又足够精确的物理结果。我们将用此严格结果继续讨论各有关过程的辐射修正问题。

### 参 考 文 献

- [1] E. A. Kuraev and V. S. Fadin, *Yad. Fiz.*, **41**(1985), 753.  
 [2] 吴济民, 高能物理与核物理, **16**(1992), 518.  
 [3] R. Barbieri, J. A. Mignaco and E. Remiddi, *Nuovo Cimento*, **11A**(1972), 824, 865.

- [4] V. N. Baier et. al. *Phys. Rep.*, **78**(1981), 293.  
[5] 函数表与积分表, И. М. 雷日克, И. С. 格拉德什坦高等教育出版社(1959年版) p. 159.  
[6] O. Nicrosini and L. Trentadue, *Phys. Lett.*, **106B** (1987) 551; *Z. Phys.*, **C39**(1988), 479.

## A Rigorous Calculation for the Radiator in $e^+ e^-$ Process

WU JIMIN

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039*)

### ABSTRACT

Using the precise expression of electron, positron distribution function we obtained earlier, we derive the rigorous analytical expression of radiator in  $e^+ e^-$  collision process. This series expression converges rapidly to the precise result required. The comparison with existing approximate expression is also given. Our result benefits the precise calculation for the radiative corrections in  $e^+ e^-$  collision processes.