第 17 卷 第 3 期 高能物理与核物理 Vol. 17, No. 3
1993 年 3 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 1993

# 量子偶和量子偶对
## ——量子代数和量子群的关系*

吴 可[1) ] 郭汉英[1) ] 章人杰[1) ]
(中国科学院理论物理所，北京 100080)

**摘 要**

本文提出量子偶对的概念，从而给出由量子代数出发实现量子群的一种方法。

## 一、引 言

李群和李代数的相互关系是由李氏三定理刻划的。在量子群和量子包络代数(简称量子代数)的讨论中，尽管人们把它们理解成为对偶关系[1]，并在文献[2—4]，详细地讨论了如何在量子群上定义它的线性泛函空间，给出它和量子代数之间的一定等价关系。然而至今未见到有文献讨论如何从量子代数出发得到量子群，即使是在局部意义上。

基于量子偶[2)]的讨论[2,4,5]，本文给出一个方法可以由量子代数出发得到量子群，从中得到一个以 $R_q$ 与 $R_{q^{-1}}$ 联系在一起一对量子偶，简称为量子偶对的概念。从而给出一个讨论量子群和量子代数相互关系的完整方法。为简单起见，即较容易地说明此方法的主要想法，本文的讨论仅限于 $U_q(sl(2))$ 和 $SL_q(2)$，至于向一般情况的推广和严格的证明请参阅文献[6]。

## 二、量子代数 $U_q(sl(2))$ 的量子偶的矩阵表述

首先我们讨论作为量子偶的 $U_q(sl(2))$ 的矩阵形式。

$U_q(sl(2))$ 化为由 Hopf 代数 $B_+$ 及其带反余乘法的对偶 Hopf 代数 $B_-$ 的量子偶可用[5]或[7]中的方法类似地得到，其主要结论如下。$B_+$ 由生成之 $k$，$e$ 生成，满足如下 Hopf 代数关系：

$$\begin{gathered} ke = qek,\ \Delta(k) = k\otimes k,\ \Delta(e) = e\otimes k + k^{-1}\otimes e, \\ \varepsilon(k) = 1,\ \varepsilon(e) = 0,\ s(k) = k^{-1},\ s(e) = -qe. \end{gathered} \tag{1}$$

---

本文 1992 年 5 月 6 日收到
* 中国自然科学基金资助。
1) 中国高等科学技术中心，北京 100080.
2) 量子偶在本文指：在某种意义下对偶的两个 Hopf 代数，按一定的方式构成一个新的 Hopf 代数，称它为原来两个 Hopf 代数中任一个的量子偶。

$B_-$ 由生成元 $f$，$\bar{k}$ 生成，它们满足：

$$\bar{k}f = q^{-1}f\bar{k},\ \Delta(\bar{k}) = \bar{k}\otimes\bar{k},\ \Delta(f) = f\otimes\bar{k} + \bar{k}^{-1}\otimes f$$
$$\varepsilon(\bar{k}) = 1,\ \varepsilon(f) = 0,\ s(\bar{k}) = \bar{k}^{-1},\ s(f) = -q^{-1}f. \tag{2}$$

其对偶关系在相差一常数倍数意义下唯一确定：

$$\begin{aligned}
&\langle 1,\ \bar{k}\rangle = \langle k,\ 1\rangle = 1,\ \langle 1,\ f\rangle = \langle e,\ 1\rangle = 0,\\
&\langle e,\ \bar{k}\rangle = \langle e,\ \bar{k}^{-1}\rangle = \langle k,\ f\rangle = \langle k^{-1},\ f\rangle = 0,\\
&\langle k,\ \bar{k}\rangle = q^{\frac{1}{2}},\ \langle k,\ \bar{k}^{-1}\rangle = q^{-\frac{1}{2}},\\
&\langle e,\ f\rangle = q^{\frac{1}{2}}\lambda^{-1},\ \lambda = q - q^{-1}.
\end{aligned} \tag{3}$$

若把 $B_+$ 和 $B_-$ 的生成元分别排成上三角和下三角的 $2\times 2$ 矩阵，不妨设为 $L_+, L_-$，

$$L^+ = \begin{pmatrix} k^{-1}, & \lambda e \\ & k \end{pmatrix},\quad L^- = \begin{pmatrix} \bar{k} & \\ -\lambda f, & \bar{k}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

那末，$B_+$ 的 Hopf 代数结构可由下述矩阵形式给出

$$\begin{aligned}
&R^+_{12}L^+_1L^+_2 = L^+_2L^+_1R^+_{12},\quad \Delta L^+ = L^+\dot{\otimes}L^+,\\
&\varepsilon(L^+) = 1_{(2\times 2)},\\
&S(L^+) = \begin{pmatrix} k & -q\lambda e \\ & k^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\dot{\otimes}$ 表示矩阵相乘元素作张量积，以及

$$R_{12} = \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} & & & \\ & q^{-\frac{1}{2}} & & \\ & q^{-\frac{1}{2}}\lambda & q^{-\frac{1}{2}} & \\ & & & q^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},\quad R^+_{12} = \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} & & & \\ & q^{-\frac{1}{2}} & q^{-\frac{1}{2}}\lambda & \\ & & q^{-\frac{1}{2}} & \\ & & & q^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

类似地 $B_-$ 的 Hopf 代数结构可写为

$$\begin{aligned}
&R^+_{12}L^-_1L^-_2 = L^-_2L^-_1R^+_{12},\quad \Delta L^- = L^-\dot{\otimes}L^-,\\
&\varepsilon(L^-) = 1_{(2\times 2)},\\
&s(L^-) = \begin{pmatrix} \bar{k}^{-1} & \\ q^{-1}\lambda f & \bar{k} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7}$$

由 $B_+$，$B_-$ 构成量子偶 $U_q(sl(2))$ 时，还要定义非平凡的乘法交换关系，即当 $a\in B_+$，$b\in B_-$，且 $\Delta^2 a = a'\otimes a''\otimes a'''$，$\Delta^2 b = b'\otimes b''\otimes b'''$ 时有[5]

$$ba = \Sigma\langle a',\ s(b')\rangle a''b''\langle a''',\ b'''\rangle. \tag{8}$$

此式和文献[2]中定义的量子偶中的交换关系的抽象公式是一致的，只是具体化了。

若用矩阵表示时，(8)式可等价地改写为

$$l^-_{ij}l^+_{mn} = \Sigma\langle l^+_{mp},\ sl^-_{ik}\rangle\langle l^+_{qn},\ l^-_{rj}\rangle l^+_{pq}l^-_{kr}. \tag{9}$$

不妨把对偶关系表示成矩阵 $\langle l^-_{kl},\ l^+_{ij}\rangle = \langle l^-,\ l^+\rangle_{ik,jl}$ 时，即得

$$\begin{pmatrix}
\langle\bar{k},\ k^{-1}\rangle, & 0 & \langle\bar{k},\ \lambda e\rangle, & 0\\
\langle -\lambda f,\ k^{-1}\rangle, & \langle\bar{k}^{-1},\ k^{-1}\rangle, & \langle -\lambda f,\ \lambda e\rangle, & \langle\bar{k}^{-1},\ \lambda e\rangle\\
0 & 0 & \langle\bar{k},\ k\rangle, & 0\\
0 & 0 & \langle -\lambda f,\ k\rangle, & \langle\bar{k}^{-1},\ k\rangle
\end{pmatrix}. \tag{10}$$

此矩阵正是 $R$ 矩阵(6)式中的 $(R^+)^{-1}$,从而我们证明了(9)式可写成

$$L_2^- L_1^+ = (R_{12}^+) L_1^+ L_2^- (R_{12}^+)^{-1}. \tag{11}$$

结合(5)(7)(11)式，我们发现了由 $L_+$，$L_-$ 构成的量子偶 $U_q(sl(2))$ 就是 Faddeev 等在[2]中讨论的 $\mathrm{Fun}(SL_q(2))$ 上的线性泛函．由于把量子偶写成矩阵形式，从而也说明了为什么在 Faddeev 等[2]的方法中没有另一个式子 $R_{12}^+ L_1^- L_2^+ = L_2^+ L_1^- R_{12}^+$[4] 事实上，我们可以把(5)(7)(11)式概括写成一个式子

$$\mathscr{R}_{12} \mathscr{L}_1 \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_2 \mathscr{L}_1 \mathscr{R}_{12}. \tag{12}$$

其中 $\mathscr{L} = \begin{pmatrix} L^+ & \\ & L^- \end{pmatrix}$，$\mathscr{R} = \mathrm{diag}\,(R^+,\ R^+,\ R^-,\ R^-)$，$R^- = R^{-1}$． 由 $\mathscr{R}$ 所满足的 Yang-Baxter 方程自然就证明了由(11)式或者(8)式所定义的乘法应满足的结合律，而相应于此式的乘法 $E_j^i E_l^k = M_{jl\,n}^{ik\,m} E_m^n$ 的结合律[2]的证明至少对我们并不是那样显然.

作为 Hopf 代数结构，$B_+$，$B_-$ 的量子偶 $U_q(sl(2))$ 的余代数结构是由 $B_+$，$B_-$ 上的余代数结构合起来的，用矩阵可直接表示为

$$\Delta_{\mathscr{D}}(L_2^- L_1^+) = \Delta(L_2^-) \cdot \Delta(L_1^+) = L_2^- L_1^+ \otimes L_2^- L_1^+. \tag{13}$$

由此可见矩阵方法，给出了量子偶的一个简捷表述，全部非平凡的关系全部集中在(12)(13)式中．从而实现了[4]

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & L_+ \arrow[dr] & \\ SL_q(2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & U_q(sl(2)). \\ & L_- \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

## 三、量子群 $SL_q(2)$ 的量子偶实现

当 $B_+$ 是 Hopf 代数，$B_-$ 是其对偶 Hopf 代数并具有反余乘法时，除了上面讨论的一种量子偶之外还有另一种量子偶．它继承 $B_+$，$B_-$ 中的代数关系，而在余乘法中要引入非平凡的交换性质．下面我们用 $L^+$，$L^-$ 为例讨论这一类量子偶.

我们定义 $L^- \dot{\otimes} L^+$ 为一 $2 \times 2$ 矩阵 $T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$，即

$$T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^- \otimes l_{11}^+ & l_{11}^- \otimes l_{12}^+ \\ l_{21}^- \otimes l_{11}^+ & l_{21}^- \otimes l_{12}^+ + l_{22}^- \otimes l_{22}^+ \end{pmatrix}. \tag{14}$$

基于 $L^+$,$L^-$ 之间各自的乘法关系，可直接验算 $a'$，$b'$,$c'$，$d'$ 之间的乘法关系．例如

$$\begin{aligned} a'b' &= (l_{11}^- \otimes l_{11}^+) \cdot (l_{11}^- \otimes l_{12}^+) \\ &= l_{11}^{-2} \otimes l_{11}^+ l_{12}^+ \\ &= q^{-1} l_{11}^{-2} \otimes l_{12}^+ l_{11}^+ \\ &= q^{-1} (l_{11}^- \otimes l_{12}^+) \cdot (l_{11}^- \otimes l_{11}^+) \\ &= q^{-1} b'a'. \end{aligned} \tag{15}$$

类似地有

$$\begin{aligned} & a'c' = q^{-1} c'a',\ b'd' = q^{-1} d'b',\ c'd' = q^{-1} d'c', \\ & b'c' = c'b',\ a'd' - d'a' = -\lambda b'c', \\ & a'd' - q^{-1} b'c' = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

概括(15)(16)，$T'$ 满足

$$R_{q^{-1}}T'_1T'_2 = T'_2T'_1R_{q^{-1}}. \tag{17}$$

其中 $R_{q^{-1}}$ 即在 $R$ 矩阵(6)中用 $q^{-1}$ 代替 $q$ 所得的．注意到 $R_{q^{-1}} = R^{-1}$，那么(17)式可改写成 $R_{12}^{-1}T'_1T'_2 = T'_2T'_1R_{12}^{-1}$，或者为 $R_{21}T'_1T'_2 = T'_2T'_1R_{21}$，即 $T'$ 和 $L^{\pm}$ 满足同一方程式

$$R_{21}X_1X_2 = X_2X_1R_{21}. \tag{18}$$

其实 $L^-$，$L^+$ 和 $L^-\dot{\otimes}L^+$ 满足同样代数关系是不证自明的．

现在的问题是如何在 $T' = L^-\dot{\otimes}L^+$ 上定义余代数运算法则．显然它不能简单地由

$$\Delta L^- = \Delta\begin{pmatrix} l_{11}^- & \\ l_{21}^- & l_{22}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^-\otimes l_{11}^- & \\ l_{21}^-\otimes l_{11}^- + l_{22}^-\otimes l_{21}^-, & l_{22}^-\otimes l_{22}^- \end{pmatrix} \tag{19}$$

和

$$\Delta L^+ = \Delta\begin{pmatrix} l_{11}^+ & l_{12}^+ \\ & l_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^+\otimes l_{11}^+, & l_{11}^+\otimes l_{12}^+ + l_{12}^+\otimes l_{22}^+ \\ & l_{22}^+\otimes l_{22}^+ \end{pmatrix} \tag{20}$$

得到，根据[2]中的讨论，需要定义一非平凡的交换性质 $\sigma$

$$\sigma: B_-\otimes B_+ \to B_+\otimes B_-. \tag{21}$$

使得

$$\Delta_{\mathscr{D}'}T' = T'\dot{\otimes}T'. \tag{22}$$

由 Podlés 和 Woronowicz 等在[8]的讨论知道

$$\sigma(L^-\dot{\otimes}L^+) = L^+\dot{\otimes}L^-. \tag{23}$$

也就是

$$\begin{aligned}
&\sigma(l_{11}^-\otimes l_{11}^+) = l_{11}^+\otimes l_{11}^- + l_{12}^+\otimes l_{21}^-,\\
&\sigma(l_{11}^-\otimes l_{12}^+) = l_{12}^+\otimes l_{22}^-,\\
&\sigma(l_{21}^-\otimes l_{11}^+) = l_{22}^+\otimes l_{21}^-,\\
&\sigma(l_{21}^-\otimes l_{12}^+ + l_{22}^-\otimes l_{22}^+) = l_{22}^+\otimes l_{22}^-.
\end{aligned} \tag{24}$$

于是类似于[8]中的结果，我们定义

$$\Delta_{\mathscr{D}'} = (id\otimes\sigma\otimes id)\Delta_{L^-}\otimes\Delta_{L^+}. \tag{25}$$

可以验证

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathscr{D}'}a' &= (id\otimes\sigma\otimes id)\Delta_{L^-}\otimes\Delta_{L^+}(l_{11}^-\otimes l_{11}^+)\\
&= (id\otimes\sigma\otimes id)l_{11}^-\otimes l_{11}^-\otimes l_{11}^+\otimes l_{11}^+\\
&= l_{11}^-\otimes(l_{11}^+\otimes l_{11}^- + l_{12}^+\otimes l_{21}^-)\otimes l_{11}^+\\
&= l_{11}^-\otimes l_{11}^+\otimes l_{11}^-\otimes l_{11}^+ + l_{11}^-\otimes l_{12}^+\otimes l_{21}^-\otimes l_{11}^+\\
&= a'\otimes a' + b'\otimes c'.
\end{aligned} \tag{26}$$

类似地有

$$\Delta_{\mathscr{D}'}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\dot{\otimes}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}. \tag{27}$$

同样据文献[8]的讨论定义

$$S_{\mathscr{D}'} = \sigma_{+-}(S_{L^+}\otimes S_{L^-})\sigma. \tag{28}$$

其中 $\sigma_{+-}: B^+\otimes B^- \to B^-\otimes B^+$ 是通常的两个元素的交换，而 $\sigma: L^-\dot{\otimes}L^+ \to L^+\dot{\otimes}L^-$ 是

由(23)式给出的非平凡的交换性质,直接可以验证:

$$
\begin{aligned}
S_{\mathscr{D}'}a' &= \sigma_{+-}(S_{L^+}\otimes S_{L^-})\sigma(l^-_{11}\otimes l^+_{11})\\
&= \sigma_{+-}(S_{L^+}\otimes S_{L^-})(l^+_{11}\otimes l^-_{11} + l^+_{12}\otimes l^-_{21})\\
&= \sigma_{+-}(l^+_{22}\otimes l^-_{22} + (-q^{-1}l^+_{12})\otimes(-ql^-_{21}))\\
&= l^-_{22}\otimes l^+_{22} + l^-_{21}\otimes l^+_{12}\\
&= d'.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

类似有

$$S_{\mathscr{D}'}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' & -qb' \\ -q^{-1}c' & a' \end{pmatrix}. \tag{30}$$

余单位可直接定义如下

$$e_{\mathscr{D}'} = e_{L^-}\otimes e_{L^+}. \tag{31}$$

所以

$$e_{\mathscr{D}'}\begin{pmatrix} c' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

综上所述,我们从 $B_+,B_-$ 两互为对偶的 Hopt 代数出发,构造了一个新的 Hopt 代数,同构于由 $R_{q^{-1}}$ 定义的量子群,即实现了下列过程

$$U_q(sl(2)) \begin{array}{c} \nearrow L^+ \searrow \\ \searrow L^- \nearrow \end{array} SL_{q^{-1}}(2),$$

给出了由量子包络代数到量子群的实现. 与前一部分讨论结合起来有下述过程

$$SL_q(2) \begin{array}{c} \nearrow L^+ \searrow \\ \searrow L^- \nearrow \end{array} U_q(sl(2)) \begin{array}{c} \nearrow L^+ \searrow \\ \searrow L^- \nearrow \end{array} SL_{q^{-1}}(2).$$

## 四、量 子 偶 对

上面我们讨论了由 $L^+$, $L^-$ 构成的两个不同的量子偶,一个是量子包络代数,一个是量子群,并且完成了一个过程

$$SL_q(2) \begin{array}{c} \nearrow L^+ \searrow \\ \searrow L^- \nearrow \end{array} SL_{q^{-1}}(2).$$

如果再重复上述过程,即在 $SL_{q^{-1}}(2)$ 上建立它的线性泛函 $L^+_{q^{-1}}$, $L^-_{q^{-1}}$, 从它们出发再构造一个量子群,即 $SL_q(2)$ 如下

$$SL_q(2) \begin{array}{c} \nearrow L^+_q \searrow \\ \searrow L^-_q \nearrow \end{array} SL_{q^{-1}}(2) \begin{array}{c} \nearrow L^+_{q^{-1}} \searrow \\ \searrow L^-_{q^{-1}} \nearrow \end{array} SL_q(2).$$

我们称之为量子偶对 (Quantum Quadruple 或者 Quantum Double Pair).

注意到,尽管由 $U_q(sl(2))$ 的代数关系式

$$[H,\ X^\pm] = \pm 2X^\pm,\ [X^+,\ X^-] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}. \tag{33}$$

知当 $q \to q^{-1}$ 时，是不变的，即由 $L_q^{-1}$，$L_q^{-1}$，或 $L_{q^{-1}}^{+}$，$L_{q^{-1}}^{-}$ 生成的量子代数的代数关系是一致的，但余代数关系

$$\Delta_q X^{\pm} = X^{\pm} \otimes q^{H/2} + q^{-H/2} \otimes X^{\pm}, \tag{34}$$

在 $q \to q^{-1}$ 时是不等价的。由此知 $L_q^{\pm}$ 和 $L^{\pm}{}_{q^{-1}}$ 是不同的量子包络代数，这一现象的出现是 $q \neq 1$ 时所特有的。

而在 $SL_q(2)$ 和 $SL_{q^{-1}}(2)$ 存在同构对应

$$a \longleftrightarrow d',\quad d \longleftrightarrow a',\quad b \longleftrightarrow c',\quad c \longleftrightarrow d'.$$

即 $a,b,c,d$ 在 $SL_q(2)$ 中的 Hopf 代数关系[2]和 $d',c',b',a'$ 在 $SL_{q^{-1}}(2)$ 中的 Hopf 代数关系是完全一致的。

有关量子偶对的性质及进一步应用，我们将继续进行讨论。

作者感谢王世坤，费少明、阎宏等的讨论和帮助。

## 参　考　文　献

[1] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proc. ICM (Berkeley)-1986, Vol. **1**, 798.
[2] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhadzhyan, L. D. Faddeev, *Leningrad Math. J.*, Vol. **1**(1990), 193.
[3] S. Majid, *Inter. J. Mod. Phys.*, **A15**(1990), 1.
[4] N. Burroughs, *Commun. Math. Phys.*, **133**(1990), 91.
[5] M. Jimbo, in *Nankai Lecture Notes Series*, ed. M. L. Ge, *World Scientific* (1992).
[6] R. J. Zhang, M. S. Thesis, *Institute of Theoretical Physics*. (1992).
[7] Z. Q. Ma, Talks given at *CCAST Workshop on Quantum Groups and Low Dimensional Field Theories*, (1992).
[8] P. Podles, S. L. Woronowicz, *Commun. Math. Phys.*, **130**(1990), 381.

# Quantum Double and Quantum Double Pair——A Relation Between Quantum Algebras and Quantum Groups

Wu Ke　　Guo Hanying　　Zhang Renjie

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica Beijing* 100080)

Abstract

We introduce the concept of quantum double pair and proposed a method of realizing the quantum group from a given quantum algebra in terms of this concept.