第 17 卷 第 5 期
1993 年 5 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 5
May, 1993

Schwinger 模型的玻色化形式的 BFV 量子化

缪炎刚[1)]

(兰州大学物理系,730000)

摘　　要

我们采用 Batalin-Fradkin-Vilkovisky(BFV)形式对玻色化的 Schwinger 模型量子化.通过费米子函数的适当选取,导出了等价于用路径积分方法和 Dirac 方法给出的该模型的量子化形式.

一、引　　言

六十年代提出的 Schwinger 模型[1],即二维时空中的量子电动力学,在目前仍受到人们的关注.一个方面的原因是它的玻色化形式是完全可解的.因此,一些目前暂时很难在现实的四维理论中实现的想法,如 Chern-Simons 流的规范相关的矩阵元[2],作为研究的第一步可以先利用这个二维模型来考察.另一方面,由于二维自对偶场的 Siegel 形式[3]与 $U(1)$ 规范场的耦合[4]恰好给出[5]玻色化的 Schwinger 模型,这就把它同目前得到广泛讨论的自对偶场量子化[6]联系了起来.还有一个方面的原因是 Schwinger 模型本身的发展,如推广的 Schwinger 模型[7].当然,这方面一个非常重要的发展是 Schwinger 模型的手征形式,即手征 Schwinger 模型[8].进而,系统地研究反常规范理论则是目前探讨的热门问题之一.

对玻色化的 Schwinger 模型的量子化,在已有的讨论中归纳起来大致有这样三种方式.一是路径积分量子化方法[9].先把 Schwinger 模型作为一种反常规范理论看待,计算相应的 Wess-Zumino 项[10].然后按照手征 Schwinger 模型去算有效作用量,最后通过正规化参数的特殊选取回到 Schwinger 模型上.第二种是 Dirac 量子化方法[11].由于 Schwinger 模型具有规范不变性,因此它的约束都是第一类的.引入相同数目的规范条件,规范条件的选取具有一定的任意性[5,12],使第一类约束及其引入的规范条件共同构成

本文 1991 年 11 月 22 日收到.

1)中国高等科学技术中心(世界实验室).

第二类约束，进而去算 Dirac 括号. 此外，最近有文章从光锥量子化的角度[13]讨论了 Schwinger 模型的量子化问题. 总之，无论采用哪种方式玻色化的 Schwinger 模型在量子化意义上等价于[5,9,12,13]一个自由的、有质量的玻色子.

本文中，我们将采用 Batalin-Fradkin-Vilkovisky(BFV)量子化[14]形式考察玻色化的 Schwinger 模型. 这是一种协变的量子化形式. 目前，它在自对偶场量子化、反常规范理论的自洽量子化以及弦理论的量子化中都被较多地应用[15]. 此外，我们认为 BFV 过程中费米子函数的任意选取同选取规范条件和相空间独立的正则变量的任意性可能存在某种对应关系. 对 Schwinger 模型这个具体的问题，我们确定并找到了一种对应关系，给出了用有质量的标量场表示的有效作用量[5,9,13]和用有质量的矢量场表示的有效作用量形式[12]. 在下一节我们将通过 BFV 量子化详细地讨论这个模型. 在最后，作一总结与说明.

二、BFV 量子化

我们从 Schwinger 模型的拉氏量[1]

$$\mathscr{L}_F = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu + e\sqrt{\pi}A_\mu)\psi \tag{1}$$

出发，考虑如下的泛函积分[16]

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int[\mathrm{d}\psi][\mathrm{d}\bar{\psi}]\exp(i\int \mathrm{d}^2x\mathscr{L}_F) \\ &= \exp\left\{i\int \mathrm{d}^2x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2}A_\mu(g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu/\Box)A_\nu\right]\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

引入一个辅助标量场 $\phi(x)$ ，把这个泛函积分写成定域的形式

$$Z[A] = \int[\mathrm{d}\phi]\exp(i\int \mathrm{d}^2x\mathscr{L}_B), \tag{3}$$

其中

$$\mathscr{L}_B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - e\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\phi A_\nu \tag{4}$$

这就是 Schwinger 模型的玻色化形式[17].

从(4)式，我们找到初级约束

$$\Gamma_1 \equiv \pi^0 \equiv \partial\mathscr{L}_B/\partial\dot{A}_0 \approx 0, \tag{5}$$

以及共轭动量

$$\begin{aligned} \pi^1 &\equiv \partial\mathscr{L}_B/\partial\dot{A}_1 = \partial_0A_1 - \partial_1A_0, \\ \pi_\phi &\equiv \partial\mathscr{L}_B/\partial\dot{\phi} = \dot{\phi} - eA_1. \end{aligned} \tag{6}$$

因此，哈密顿量可以写为

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_B &= \pi^\mu\dot{A}_\mu + \pi_\phi - \mathscr{L}_B \\ &= \frac{1}{2}(\pi^1)^2 + \pi^1\partial_1A_0 + \frac{1}{2}\pi_\phi^2 + \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}e^2A_1^2 + e\pi_\phi A_1 - e\dot{\phi}A_0. \end{aligned} \tag{7}$$

由初级约束的时间自洽性条件 $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H_B\} \approx 0$，我们得到一个次级约束

$$T \equiv \partial_1\pi^1 + e\dot{\phi} \approx 0 \tag{8}$$

由于次级约束的时间自洽性条件不再给出进一步的约束条件，所以该系统只有两个约束条件 Γ_1 和 T，而且它们都是第一类的.

为了简化讨论且不失去普遍性，我们可以引入一个规范固定条件 $\Gamma_2 \equiv A_0 \approx 0$，它与 Γ_1 构成两个第二类约束，因此，该系统只剩下一个第一类约束 T. 其余正则变量(除 A_0 和 π^0) 的 Poisson 括号同它们的 Driac 括号是一致的，只是正则哈密顿量(7)式约化为

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}(\pi^1)^2 + \frac{1}{2}\pi_\phi^2 + \frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{1}{2}e^2 A_1^2 + e\pi_\phi A_1 \tag{9}$$

另外，容易验证 $\{T,T\} = 0$ 和 $\{T,\mathscr{H}_0\} = 0$，即 Schwinger 模型是一个零秩理论[14].

按照 BFV 过程[14]我们为第一类约束 T 引入一个拉氏乘子场 $\lambda(x)$ 及其共轭动量 $\pi_\lambda(x)$，同时再引入两个费米子鬼场 $\eta(x)$ 和 $\bar{\eta}(x)$ 及其共轭动量 $\bar{P}(x)$ 和 $P(x)$. 在扩大的相空间 $(A_1,\pi^1) \oplus (\phi,\pi_\phi) \oplus (\lambda,\pi_\lambda) \oplus (\eta,\bar{P}) \oplus (\bar{\eta},P)$ 中，所有正则变量都被作为动力学场处理，并附加如下的等时 Poisson 括号

$$\{\lambda,\pi_\lambda\} = \{\eta,\bar{P}\} = \{\bar{\eta},P\} = 1 \tag{10}$$

因此，对这个零秩理论我们找到了守恒的和零势的(nilpotent)BRST 荷

$$\Omega = P\pi_\lambda + \eta T. \tag{11}$$

通过尝试，我们先选取如下的费米子函数形式

$$\Psi = (1/\beta)A_1\bar{\eta} + \bar{P}\lambda, \tag{12}$$

β 是引进的一个参数. 现在我们可以写出这个零秩理论的泛函积分

$$Z = \int [\mathrm{d}\mu]\exp(iS_{\mathrm{eff}}) \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{eff}} &= \int \mathrm{d}^2x(\pi^1\dot{A}_1 + \pi_\phi\dot{\phi} + \pi_\lambda\dot{\lambda} + \bar{P}\dot{\eta} + P\dot{\bar{\eta}} - \mathscr{H}_0 - \{\Psi,\Omega\}), \\ [\mathrm{d}\mu] &= [\mathrm{d}A_1][\mathrm{d}\pi^1][\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\pi_\phi][\mathrm{d}\lambda][\mathrm{d}\pi_\lambda][\mathrm{d}\eta][\mathrm{d}\bar{P}][\mathrm{d}\bar{\eta}][\mathrm{d}P] \end{aligned} \tag{14}$$

由(8)、(10)、(11)和(12)式，我们得到

$$\{\Psi,\Omega\} = (1/\beta)A_1\pi_\lambda - (1/\beta)\bar{\eta}\eta(\partial/\partial x) + \bar{P}P + \lambda T. \tag{15}$$

把(9)、(14)和(15)式代入(13)式，对费米子鬼变量积分，我们得到一个与场变量无关的因子〔$(\det\beta)^{-1}\det(\partial/\partial x)$〕. 然后对 π_λ 积分，给出因子$(\det\beta)\delta$〔$\beta\dot{\lambda}+A_1$〕. 显然，参数 β 的行列式可以抵消掉. 再对 A_1 积分并令 $\beta \to 0$，则泛出积分(13) 式约化为

$$\begin{aligned} Z = &\int [\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\pi_\phi][\mathrm{d}\pi^1][\mathrm{d}\lambda]\det(\partial/\partial x) \\ &\times\exp\Big\{i\int \mathrm{d}^2x[\pi_\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2}(\pi^1)^2 - \frac{1}{2}\pi_\phi^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - \lambda(\partial_1\pi^1 + e\phi')]\Big\}. \end{aligned} \tag{16}$$

上式对 λ 积分给出泛函 δ 因子 $\delta[\partial_1\pi^1 + e\phi']$. 利用 $\delta[\partial_1\pi^1 + e\phi'] = [\det(\partial/\partial x)]^{-1}\delta[\pi' + e\phi]$抵消掉空间微商的行列式并对 π^1 积分，得

$$\begin{aligned} Z &= \int [\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\pi_\phi]\exp[i\int \mathrm{d}^2x(\pi_\phi\dot{\phi} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})], \\ \mathscr{H}_{\mathrm{eff}} &= \frac{1}{2}\pi_\phi^2 + \frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{1}{2}e^2\phi^2. \end{aligned} \tag{17}$$

容易验证，ϕ 满足自由的有质量(质量 $m = e$) 的标量场方程

$$[\partial_0^2 - \partial_1^2 + e^2]\phi(x) = 0. \tag{18}$$

因此，选取如(12)式的费米子函数形式，Schwinger 模型在量子化意义上等价于一个质量为 e 的自由标量场[5,9,13].

此外，如果我们选取的费米子函数形式为

$$\Psi' = (1/\beta)\pi_\phi\bar{\eta} + \bar{P}\lambda, \tag{19}$$

则泛函积分 Z' 同 Z 完全一致，只需把(14)式中$\{\Psi,\Omega\}$换成$\{\Psi',\Omega\}$即可．不难算出

$$\{\Psi',\Omega\} = (1/\beta)\pi_\phi\pi_\lambda + (e/\beta)\bar{\eta}\eta(\partial/\partial x) + \bar{P}P + \lambda T. \tag{20}$$

完全按照前面的讨论，先对费米子鬼变量和 π_λ 积分，给出一个因子 $[\det(\partial/\partial x)]\delta[\beta\lambda + \pi_\phi]$，然后对 π_ϕ 积分并令 $\beta\to 0$，则泛函积分约化成

$$Z' = \int[\mathrm{d}\phi][\mathrm{d}\pi^1][\mathrm{d}\lambda][\mathrm{d}A_1]\det(\partial/\partial x)$$
$$\times\exp\left\{i\int \mathrm{d}^2x\left[\pi^1\dot{A}_1 - \frac{1}{2}(\pi^1)^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - \frac{1}{2}e^2A_1^2 - \lambda(\partial_1\pi^1 + e\phi')\right]\right\}. \tag{21}$$

把上式对 λ 和 ϕ 积分，我们得到用正则对 A_1 和 π^1 表示的泛函积分

$$Z' = \int[\mathrm{d}A_1][\mathrm{d}\pi^1]\exp\left[i\int \mathrm{d}^2x(\pi^1\dot{A}_1 - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\right],$$
$$\mathscr{H}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}(\pi^1)^2 + \frac{1}{2e^2}(\partial_1\pi^1)^2 + \frac{1}{2}e^2A_1^2. \tag{22}$$

可以证明，正则变量 π^1(即 x 轴向的电场 E)满足自由的有质量(质量 $m = \mathrm{e}$)的玻色场方程

$$(\partial_\mu\partial^\mu + e^2)\pi^1 = 0. \tag{23}$$

这就是说，选取(19)式的费米子函数形式，Schwinger 模型在量子力学意义上等价于一个质量为 e 的自由的矢量场[12].

三、总结与说明

我们已经看到，利用 BFV 量子化方法在具体选择了如(12)和(19)式的费米子函数之后，Schwinger 模型的量子化形式可以分别由标量场正则对 ϕ、π_ϕ 和矢量场正则对 A_1、π^1 的泛函积分表示．换句话说，(12)式的费米子函数对应于参考文献[5,13]中的规范条件的选取，而(19)式则对应于参考文献[12]中选取的库仑规范. 因此，我们在本文中对 Schwinger 模型找到了 BFV 量子化中的费米子函数与 Dirac 量子化中规范条件之间的一种对应关系，并且从 BFV 量子化的角度重新考察了玻色化的 Schwinger 模型，这两种完全不同的量子化形式之间存在这样一种联系是非常有趣的. 最后需要说明的一点是，(22)式与参考文献[12]中的泛函积分形式是等价的，因为两者都导出相同的运动方程(23)式.

参 考 文 献

[1] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 2425; J. H. Lowenstein and J. A. Swieca, *Ann. Phys.* (N. Y.), **68**(1971), 172.

[2] A. V. Manohar, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 1663.

[3] W. Siegel, *Nucl. Phys.*, **B238**(1984), 307.

[4] J. M. F. Labastida and A. V. Ramallo, *Phys. Lett.*, **B222**(1989), 231.

[5] J. McCabe, *Phys. Lett.*, **B257**(1991), 145.

[6] R. Floreanini and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 1873; M. E. V. Costa and H. O. Girotti, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1771; M. Bernstein and J. Sonnenschein, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1772; P. P. Srivastava, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 2791; K. Harada, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 267.

[7] C. M. Naon and C. Wotzasek, *J. Phys.*, **G16**(1990), 795; M. Chanowita, *Phys. Lett.*, **B171**(1986), 280.

[8] R. Jackiw and R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 1219; 54(1985), 2060(E).

[9] K. Harada and I. Tsutsui, *Phys. Lett.*, **B183**(1987), 311.

[10] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.*, **B37**(1971), 95.

[11] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ. Press, 1964.

[12] C. Wotzasek and C. M. Naon, *Z. Phys.*, **C46**(1990), 445; C. Wotzasek, *Act. Phys. Pol.*, **B21**(1990), 457.

[13] Th. Heinzl, St. Krusche and E. Werner, *Phys. Lett.*, **B256**(1991), 55.

[14] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.*, **B69**(1977), 309; E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky, *Phys. Lett.*, **B55**(1975), 224.

[15] M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *Phys. Lett.*, **B218**. (1989), 63; P. P. Srivastava, *Phys. Lett.*, **B235** (1990), 287; R. Amorim and J. Barcelos-Neto, *Phys. Lett.*, **B258**(1991), 335.

[16] R. Jackiw, Relativity, Groups and Topology II. ed. B. DeWitt and R. Stora, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[17] J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 3594.

BFV Quantization of the Bosonized Schwinger Model

MIAO YANGANG

(*Department of Physics*, *Lanzhou University*, 730000)

ABSTRACT

The bosonized Schwinger model is quantized by using the Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV) formalism. The quantized versions of the model, which are equivalent to those obtained in terms of the path-integral and Dirac's method, are derived through appropriate choiees of the Fermi function.