

反质子与电子偶素碰撞而形成 反氢原子的探讨*

程子韬 钱青 伏云昌 陈学俊¹⁾

(清华大学物理系, 北京 100084)

摘 要

本文从理论上讨论了反质子与电子偶素碰撞而形成反氢原子的一些特点, 进而分析了在实验室中制备反氢原子的可能性.

一、引 言

在实验粒子物理学中, 一个非常有兴趣的问题是在实验室中能否制备出反氢原子. 这是人们多年来一直想实现、但现在仍未能实现的目标⁽¹⁾. 按理论预言, 反氢原子在真空中是相当稳定的. 因此, 如果在实验室中能制备出反氢原子, 那么就可以进行一些基础性的研究工作, 例如检验著名的 CPT 不变性问题. 反氢原子本身又是反物质世界中最基本的体系之一, 其地位有如物质世界中的氢原子一样, 研究它的性质可以增进我们对反物质世界的认识; 研究它与氢原子等的相互作用, 又可以开拓我们对物质世界与反物质世界相互关系的认识. 这些正是人们对这一问题抱有浓厚兴趣的原因所在. 最近西欧核子中心 (CERN) 的低能强流反质子储存环已经成功地在运行, 这就增加了实现这一目标的希望. 已经有一些人正在筹备这样的实验. 所以, 现在可能是从理论上对这一问题进行比较认真探讨的合适时机.

最早想到的形成反氢原子的途径是一个反质子俘获一个正电子, 如下式所示,



但在1987年, Humberston 等人⁽²⁾又提出一种新途径, 即反质子与电子偶素碰撞而形成反氢原子, 如下式所示,



根据 Humberston 等人的计算, (2) 的截面比 (1) 的大五个数量级之多. 因此, 可能是更有价值的一种. 在本文中, 我们着重研讨反应 (2). 显然, 为了详细了解这一途径的特点, 积分截面和微分截面的计算都是必需的.

本文1991年11月22日收到.

* 清华大学理学院和研究生院基金资助.

1) 理论物理中心, 中国高等科学技术中心(世界实验室).

反应(2)是一种重排反应,类似电荷交换反应.对于这类反应,一级 Born 近似通常是不足的,需要采用二级以上的 Born 近似来描述^[3].所以,对于反应(2),一级 Born 近似的结果只能作为定性的参考,对于低的入射能量更是如此.

在本文中,我们采用作者之一^[4]最近提出的多重散射展开方法.已经证明,这一方法的第一级近似就几乎相当于前三级 Born 近似的总和.因此,所得结果有较高的可靠性.

二、理论要点

反应(2)的哈密顿算符 H 为

$$H = -\frac{1}{2}\nabla_1^2 - \frac{1}{2}\nabla_2^2 + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \quad (3)$$

本文自始至终采用原子单位,除非另有说明.在(3)中, r_1 和 r_2 分别是正电子和电子相对于反质子的位置矢量.坐标关系如图1所示.在写出(3)时,反质子被当作很重来处理.

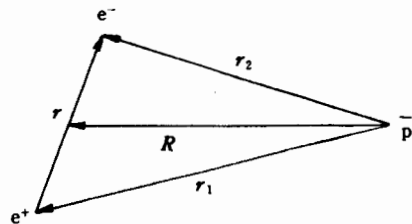


图1 坐标关系,

$$R = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), r = r_2 + r_1$$

总哈密顿算符可以按两种方式来分解:

$$H = H_i + V_i \quad (\text{入射道}) \quad (4)$$

其中

$$H_i = -\frac{1}{2M}\nabla_R^2 - \frac{1}{2\mu}\nabla_r^2 - \frac{1}{r} \quad (5)$$

$$V_i = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \quad (6)$$

$$M = 2; \quad \mu = \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$H = H_f + V_f \quad (\text{出射道}) \quad (8)$$

其中

$$H_f = -\frac{1}{2}\nabla_1^2 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{2}\nabla_2^2 \quad (9)$$

$$V_f = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \quad (10)$$

根据一般的量子碰撞理论^[5],反应(2)的微分截面为:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q_f}{q_i} |T|^2 \quad (11)$$

其中, q_i 和 q_f 分别为入射和出射动量, T 为跃迁矩阵元:

$$T = \langle \Psi_f^{(-)} | V_i | \Phi_i \rangle \quad (12)$$

$$= \langle \Phi_f | V_f | \Psi_i^{(+)} \rangle \quad (13)$$

Φ_i 和 Φ_f 分别为体系的始态和终态波函数; $\Psi_f^{(-)}$ 是与 Φ_f 对应的体系的完全波函数,即 H 的一个本征态并具有入射波边界条件; $\Psi_i^{(+)}$ 有类似的含义.

不同理论方法的主要差别表现在如何近似地求出 $\Psi_i^{(+)}$ 或 $\Psi_f^{(-)}$ 上.本文采用下述两

种方法:

1. Born 展开方法

$\Psi_i^{(+)}$ 表示为:

$$\Psi_i^{(+)} = [1 + G_0 V_i + G_0 V_i G_0 V_i + \dots] \Phi_i \quad (14)$$

其中 G_0 是自由 Green 函数. 因此, T 表述为:

$$T = T_B^{(1)} + T_B^{(2)} + T_B^{(3)} + \dots \quad (15)$$

其中

$$T_B^{(1)} = \langle \Phi_f | V_i | \Phi_i \rangle \text{(一级 Born 近似)} \quad (16)$$

$$T_B^{(2)} = \langle \Phi_f | V_i G_0 V_i | \Phi_i \rangle \text{(二级 Born 近似)} \quad (17)$$

$$T_B^{(3)} = \langle \Phi_f | V_i G_0 V_i G_0 V_i | \Phi_i \rangle \text{(三级 Born 近似)} \quad (18)$$

2. 多重散射展开方法^[4]

$\Psi_f^{(-)}$ 表示为:

$$\Psi_f^{(-)} = \Psi_M^{(1)} + \Psi_M^{(2)} + \dots \quad (19)$$

在文[4]中, 已经详细描述了一般的多重散射展开方法, 本文的情况算是较为简单的特例. 按文[4]的方法, 可以求出 $\Psi_M^{(1)}$ 和 $\Psi_M^{(2)}$ 等的形式, 具体为:

$$\Psi_M^{(1)} = \{e^{iq_f r_2} \Gamma(1 - i\eta) \Gamma(1 + i\eta) F(i\eta, 1, -i[q_f r_2 + q_f \cdot r_2]) \\ F(-i\eta, 1, -i[q_f r + q_f \cdot r])\} \phi_f(r_1) \quad (20)$$

其中 Γ 和 F 分别为伽马函数和合流超几何函数. $\phi_f(r_1)$ 是反应后形成的反氢原子的内部状态的波函数. η 为库仑参数: $\eta = 1/q_f$. (20)式的物理意义相当明确, 花括号代表的就是反应后出射电子受反氢原子核和核外正电子的扭曲波. 当能量很高时, $\eta \rightarrow 0$, 这时扭曲波应趋于平面波. 显然, (20)具有这样的性质.

至于 $\Psi_M^{(2)}$ 的具体形式在此从略, 因为文献[4]已证明, 只取 $\Psi_M^{(1)}$, 就能得到相当精确的结果, 也就是几乎相当于前三级 Born 项的总和. 因此, 按多重散射展开方法, T 可写成:

$$T = T_M^{(1)} + T_M^{(2)} + \dots \quad (21)$$

其中

$$T_M^{(1)} = \langle \Psi_M^{(1)} | V_i | \Phi_i \rangle \quad (22)$$

$$T_M^{(2)} = \langle \Psi_M^{(2)} | V_i | \Phi_i \rangle \quad (23)$$

3. 1s-1s 跃迁

下面先考虑主要的过程, 即始态的 P_s 和终态的 \bar{H} 均处于 1s 态的情形. 对于这样的过程, Φ_i 和 ϕ_f 可表示为:

$$\phi_f(r_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r_1} \quad (24)$$

$$\Phi_i = e^{iq_i \cdot r} \phi_i^{(r)} \quad (25)$$

ϕ_i 是 P_s 的 1s 态的波函数,

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-r/2} \quad (26)$$

因此, $T_M^{(1)}$ 具体化为:

$$T_M^{(1)} = \frac{\eta}{2\sqrt{2}\operatorname{sh}(\pi\eta)} [A_M^{(1)} - B_M^{(1)}] \quad (27)$$

其中

$$A_M^{(1)} = \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_1 e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}_2} e^{-i\mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}_2} e^{-r_1} \frac{1}{r_2} e^{-\frac{r}{2}} F(-i\eta, 1, i[\mathbf{q}_f r_2 + \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}_2]) F(i\eta, 1, i[\mathbf{q}_f \mathbf{r} + \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}]) \quad (28)$$

$$B_M^{(1)} = \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_1 e^{i\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{r}_2} e^{-i\mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}_2} e^{-r_1} \frac{1}{r_1} e^{-\frac{r}{2}} F(-i\eta, 1, i[\mathbf{q}_f r_2 + \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}_2]) F(i\eta, 1, i[\mathbf{q}_f \mathbf{r} + \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}]) \quad (29)$$

直接用(28)和(29)来计算 $A_M^{(1)}$ 和 $B_M^{(1)}$ 是六重积分问题, 颇为困难. 利用作者下一文^[6]中所描述的技巧, (28)和(29)可简化为一重和二重积分, 数值计算变得相当容易. 为此, 把(28)和(29)变成如下形式的积分:

$$A_M^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3} \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_2} \frac{e^{-\lambda_1 r_2}}{r_2} F(-i\eta, 1, i[\mathbf{q}_f r_2 - \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}_2]) e^{-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}} \frac{e^{-\lambda_2 r}}{r} F(i\eta, 1, i[\mathbf{q}_f \mathbf{r} - \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}]) \frac{e^{-\lambda_3 r_1}}{r_1} \quad (30)$$

$$B_M^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_2} \frac{e^{-\lambda_1 r_2}}{r_2} F(-i\eta, 1, i[\mathbf{q}_f r_2 - \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}_2]) e^{-i\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}} \frac{e^{-\lambda_2 r}}{r} F(i\eta, 1, i[\mathbf{q}_f \mathbf{r} - \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{r}]) \frac{e^{-\lambda_3 r_1}}{r_1} \quad (31)$$

其中

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_f; \quad \mathbf{P}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{q}_i \quad (32)$$

λ_1, λ_2 和 λ_3 是临时性参数, 完成运算后, 它们取下面的数值:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_3 = 1 \quad (33)$$

采用文[6]的办法, $A_M^{(1)}$ 和 $B_M^{(1)}$ 可简化为:

$$A_M^{(1)} = D_1(t=0) + \frac{\operatorname{sh}(\pi\eta)}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{(1+i\eta)\eta}}{1+e^y} [D_1(t) - D_1(t=0)] \quad (34)$$

$$B_M^{(1)} = D_2(t=0) + \frac{\operatorname{sh}(\pi\eta)}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{(1+i\eta)\eta}}{1+e^y} [D_2(t) - D_2(t=0)] \quad (35)$$

其中

$$t = \frac{1}{1+e^y} \quad (36)$$

$$D_1(t) = 16\pi^2 \int_0^\infty ds \frac{\partial^2}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3} \left[\frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \sigma_1} \right)^{i\eta} \right] \quad (37)$$

$$D_2(t) = 16\pi^2 \int_0^\infty ds \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \left[\frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0 + \sigma_1} \right)^{i\eta} \right] \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0 = & \{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 2[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{q}_f - i(\lambda_1 + \lambda_2)q_f]t\} \\ & (s^2 + 2\lambda_3 s) + 2s[\tilde{\lambda}_1(\lambda_3^2 + \lambda_2^2 + P_2^2) + \lambda_2(\lambda_3^2 + \tilde{\lambda}_1^2 + Q_1^2)] \\ & + [(\tilde{\lambda}_1 + \lambda_3)^2 + Q_1^2][(\lambda_2 + \lambda_3)^2 + P_2^2] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & 2[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{q}_f - iq_f(\lambda_1 + \lambda_2)](s^2 + 2\lambda_3 s) \\ & + 2s[2\tilde{\lambda}_1(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_f - i\lambda_2 q_f) - iq_f(\lambda_3^2 + Q_1^2 + \tilde{\lambda}_1^2)] \\ & + 2[(\tilde{\lambda}_1 + \lambda_3)^2 + Q_1^2][\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_f - i(\lambda_2 + \lambda_3)q_f] \end{aligned} \quad (40)$$

Q 和 $\tilde{\lambda}_1$ 规定为:

$$Q_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_f t \quad (41)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - iq_f t \quad (42)$$

用同样的方法,可求出一级 Born 近似的结果,具体为:

$$T_B^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} D_B(t=0) \quad (43)$$

其中

$$D_B(t) = 16\pi^2 \int_0^\infty ds \left[\frac{\mathcal{F}}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3} - \frac{\mathcal{F}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right] \left[\frac{1}{\sigma_0} \right] \quad (44)$$

σ_0 已由(39)给出.

三、结果和讨论

以上面的公式为基础,可以数值地计算出微分截面和积分截面.在多重散射展开的形式下,计算归结为一重和二重积分问题;在一级 Born 近似的形式下,计算则归结为只是一重积分.数值积分用双精度和高斯积分方法.高斯点的数目和积分区间的选取足以保证计算误差小于5%.典型的例子是:对 y 的积分区间取 $[-10, 50]$,高斯点数目为160;对 s 的积分区间取 $[0, 100]$,高斯点数目为320.

图2至图6是部分结果.入射反质子能量分别为1, 2.5, 5, 10, 100keV.图的横坐标是反应后反氢原子的出射角,纵坐标是微分截面,采用原子单位,即 $[a_0^2/\text{sr}]$, a_0 是玻耳半径.图中的虚线代表一级 Born 近似的结果,实线代表一级多重散射近似的结果.图7是积分截面与入射反质子能量的关系.

从以上的结果可以得到如下的启示:

1. 利用反应(2)来制备反氢原子的截面是比较大的,比核物理和粒子物理的典型截面大多了.所以,反应(2)可能是在实验室中制备反氢原子的可取途径之一.这里的关键问题是要有足够数量的 P 和 Ps.

2. 反应(2)的积分截面随入射能量减低而增加(注意反应(2)是放能反应).所以,采用低能反质子束是有利的;但从角分布来考虑,随着能量的降低,角分布朝前的倾向又变弱,这对反氢原子的诊断和充分利用并不有利.

3. 对于入射能量较低的情况,一级 Born 近似和一级多重散射近似的差别是比较大的,但随着能量增高,例如100keV,两者又基本一致,除深谷附近以外.

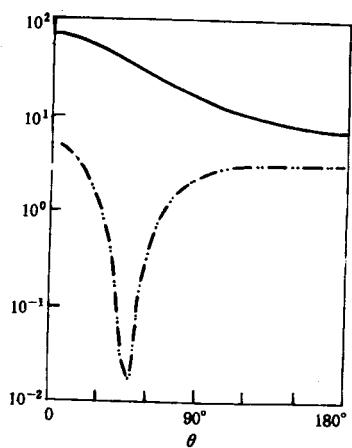


图2 反氢原子形成的微分截面 (a_0^2/sr), 入射反质子能量1keV
虚线为一级 Born 近似的结果, 实线为一级多重散射近似的结果

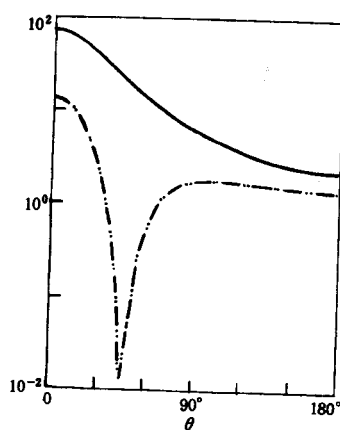


图3 同图2, 但能量为2.5keV

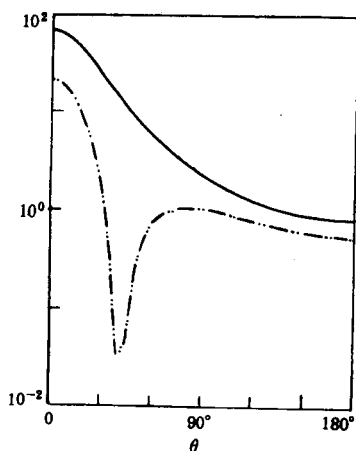


图4 同图2, 但能量为5keV

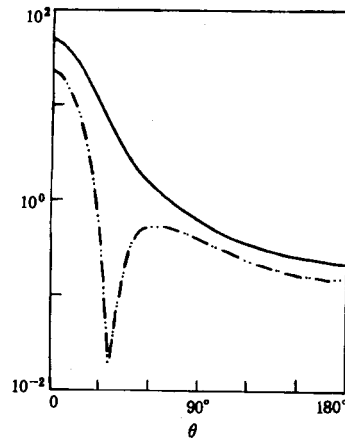


图5 同图2, 但能量为10keV

4. 一级 Born 近似的角分布都有深谷特征, 但一级多重散射近似的角分布则没有, 至少是不明显. 那个对呢? 最终要由未来的实验来判定, 不过现在也能作一些判断. 反应(2)类似于电荷反应, 例如 $H^+ + H(1s) \rightarrow H(nl) + H^+$, 都属于重排反应. 一级 Born 近似用于电荷交换反应的角分布, 也出现深谷特征, 但比较精确的理论并不给出深谷的存在, 特别是实验结果也不存在深谷特征. 由此看来, 深谷现象并不实际存在, 而是一级 Born 近似本身的缺陷引起的. 多重散射的结果可能更接近真实情况.

5. 一级多重散射近似得到的截面比一级 Born 近似的结果大不少, 尤其是对于低能情况, 这对人们力图在实验室中制备反氢原子的努力自然是有利的.

6. 在实验室中制备反氢原子的工作自然是一项困难和复杂的事, 需要专门研究. 至于 Ps, 由于它是不稳定的; 而且从实验的观点来看, 其寿命相当短. 因此, 人们只能边制备 Ps

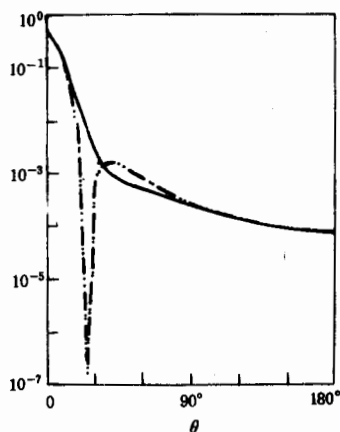
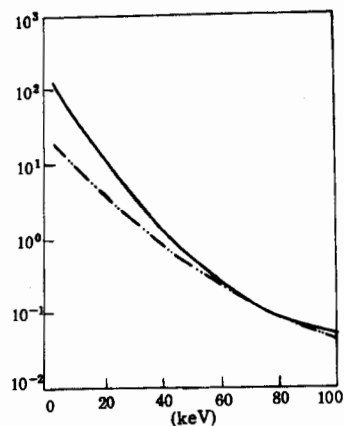


图6 同图2,但能量为100keV

图7 反氢原子形成的积分截面 (α_0^2)与入射反质子能量的关系。虚线为一级 Born 近似的结果,实线为一级多重散射近似的结果

边利用. 利用电子与原子碰撞而形成 Ps 是一种可行的办法. 这一问题将在下一篇文章中^[6]专门讨论.

作者对北京大学胡济民教授对这一工作的关心表示感谢.

参 考 文 献

- [1] R. Neuman, H. Poth, A. Winnacker and A. Wolf, *Z. Phys.*, **A313**(1983),253.
- [2] J. W. Humberston, M. Chalton, F. M. Jacobsen and B. Deutch, *J. Phys.*, **B20**(1987),L25.
- [3] D. Belkic, R. Gayet and A. Salin, *Phys. Rep.*, **56**(1979),279.
- [4] X. J. Chen (陈学俊), *Phys. Rev.*, **A40**(1989),1795.
- [5] C. J. Joachain, *Quantum Collision Theory* (Amsterdam: North-Holland, 1975).
- [6] 文兵、许跃武、王东斌、陈学俊,“电子偶数的形成”,物理学报,待发表.

Study of Antihydrogen Atom Formation in Collisions of Antiprotons with Positronium

CHENG ZITAO, QIAN QING, FU YUNCHANG CHEN XUEJUN

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

ABSTRACT

Properties of antihydrogen atom formation in collisions of antiprotons with Positronium have been studied theoretically. The possibility of producing antihydrogen atoms in a laboratory is also discussed.