

10 维超引力模型的稳定紧致化

颜 骏 胡诗可

(四川大学物理系, 成都 610064)

摘 要

本文导出了具有单圈 Casimir 修正的 10 维紧致超引力模型的等效势. 对于 10 维的 Kalb-Ramond 模型, 表明了不存在稳定的紧致比, 而对于具有费米子凝聚的 10 维超引力模型, 却可能达到一种稳定的紧致化. 还讨论了这些模型与暴胀宇宙学的联系.

一、引 言

长期以来, 高维的 Kaluza-Klein 超引力作为一种统一引力和规范作用的模型曾受到人们的广泛关注^[1]. 事实上, $SO(32)$ 超弦或 $E_8 \otimes E_8$ 杂交弦的点场极限就对应于 $N=1$ 的 10 维超引力耦合超对称 Yang-Mills 场^[2-5]. 而这些超弦模型能提供解决高维引力中的手征费米子(反常)和发散困难的各种方案. Kaluza-Klein 超引力中的另一个重要课题就是通过等效势函数的导出来研究紧致化中的稳定性问题^[6-9]. 对这些势函数的研究还可能澄清超弦或超引力模型与暴胀宇宙学之间的自洽性^[10,11]. 通常, 用于分析经典稳定解的物质场的能量-动量张量包含了 Kalb-Ramond 轴子场、宇宙常数以及标量场的量子 Casimir 修正的贡献. 本文主要研究了一种更为精细的修正, 即考虑了 Casimir 效应对应的单圈零温自由能中对数项的贡献, 并由此出发推导了 10 维 Kalb-Ramond 模型和超引力模型中的等效势函数, 同时分析了体系的稳定性质. 这里所导出的势函数还可以应用于对更为现实的暴胀宇宙模型的研究.

二、理论的基本形式

先给出将要研究的模型的一般形式. 假定 $4+D$ 维时空流形紧致为 $M^{4+D} = R \otimes S^3 \otimes \prod_{i=1}^{\alpha} S_i^d$, 这里, S^3 与 S_i^d 分别是 3 维和 d 维的球, 并且 $D = \alpha d$ (α 是内部紧致球的个数). 时空度规的分块形式是^[12,13]:

$$T_{m,n}^{(m)} = \frac{1}{2}(d-1)! \left[\left(\frac{h_0^{(i)}}{b_i^d} \right)^2 - \sum_{j \neq i} \left(\frac{h_0^{(j)}}{b_j^d} \right)^2 \right] g_{m,n,i}. \quad (2.10)$$

在这类模型中,除了反对称张量场 $H_{MP\dots Q}$ 的作用之外,能量-动量张量中还可能包含标量真空起伏引起的单圈 Casimir 修正的贡献,这类修正通常可用 ζ 函数正规化方法来计算.(这一方法来源于 Candelas 和 Weinberg,见文献[15]).对于紧致的 $4+D$ 维流形 $R \otimes S^3 \otimes S^D$,在 $a \rightarrow \infty$ 与零温极限的假设下,单圈 Casimir 效应对应的自由能可以表示为^[11,13]

$$U_{(\text{单圈})} = V_3 \cdot \frac{A}{b^4}, \quad (2.11)$$

式中, A 是数值常数, $V_3 = 2\pi^2 a^3$ 是 S^3 的体积. 在 Accetta 和 Kolb 等人的文章中,研究了自由能取成(2.11)时模型的稳定性质. 但更高阶的计算表明单圈自由能中还包含一个对数项的贡献^[16,17]:

$$\Delta U_{(\text{单圈})} = V_3 \cdot \frac{B \ln(2\pi\rho^2)}{b^4}, \quad (2.12)$$

式中, B 是可以计算出的数值常数, $\rho^2 = \mu b^2$ (μ 是常数).

本文的主要目的就是通过考虑 $\Delta U_{(\text{单圈})}$ 的作用来研究 10 维紧致超引力模型的稳定性. 希望能回答下面两个问题: 1. 修正情况下所导出的等效势函数的临界点是否发生移动? 2. 模型的稳定性质是否发生变化? 在下面的具体计算中,假定系数 A, B 在每个紧致空间上都取成一样,并且标度因子 $2\pi\mu = 1$. 与单圈 Casimir 自由能有关的能量密度和压力可以由下面的公式计算:

$$\rho_c = \frac{1}{V_3 \prod_{i=1}^d V_d^{(i)}} (U_{(\text{单圈})} + \Delta U_{(\text{单圈})}), \quad (2.13)$$

$$P_c = - \frac{1}{3V_3 \prod_{i=1}^d V_d^{(i)}} \left(a \frac{\partial(U_{(\text{单圈})} + \Delta U_{(\text{单圈})})}{\partial a} \right), \quad (2.14)$$

$$P_c^{(i)} = - \frac{1}{dV_3 \prod_{i=1}^d V_d^{(i)}} \left(b_i \frac{\partial(U_{(\text{单圈})} + \Delta U_{(\text{单圈})})}{\partial b_i} \right), \quad (2.15)$$

这里, $V_d^{(i)} = \frac{(2\pi)^{\frac{d+1}{2}} b_i^d}{\Gamma(\frac{1}{2}(d+1))}$ 是 d 维球的体积.

三、10 维 Kalb-Ramond 模型

在这节中,先分析一个 10 维的引力耦合 2 阶反对称张量场 $\beta_{\mu\nu}$ 的简单模型. 10 维流形紧致为 $M^{10} = R \otimes S^3 \otimes S^3 \otimes S^3$ (即 $D=6, \alpha=2$), 轴子场 $B_{\mu\nu}$ 对应的场强应取成 3-指标的 Kalb-Ramond 场强 H_{MNP} . 当考虑了 Kalb-Ramond 场和单圈 Casimir 效应的共同作用之后,根据 Freund-Rubin ansatz(2.7), (2.8) 以及公式(2.13)–(2.15),即可导出如下的总能量密度和压力:

$$\rho = \frac{2A'}{b^{10}} + \frac{2C}{b^6} + \frac{2B' \ln b^2}{b^{10}} = -P, \quad (3.1)$$

$$P_1 = P_2 = \frac{4A'}{3b^{10}} + \frac{2B'(2\ln b^2 - 1)}{3b^{10}}, \quad (3.2)$$

这里, 系数 $A' = \frac{A}{4\pi^4}$, $B' = \frac{B}{4\pi^4}$, $C = (h_0)^2$. 为了明确起见, 在导出上面公式时假定了内部球的半径相等, 即 $b_1 = b_2 = b$, 并且 $C^{(1)} = C^{(2)} = C$. 将(3.1)和(3.2)式代入 Einstein 场方程(2.3)和(2.5)后即得到:

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} + 6 \frac{\dot{b}}{b} = - \left[\frac{2A'}{b^{10}} + \frac{C}{b^6} + \frac{B' \ln b^2}{b^{10}} + \frac{B'}{2b^{10}}(2\ln b^2 - 1) \right], \quad (3.3)$$

$$\frac{\dot{b}}{b} + 5 \frac{\dot{b}^2}{b^2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \cdot \frac{\dot{b}}{b} = - \frac{2}{b^2} + \frac{4A'}{3b^{10}} + \frac{C}{b^6} + \frac{B'}{6b^{10}}(8\ln b^2 - 1). \quad (3.4)$$

方程(3.3), (3.4)中与 B' 有关的项是计入了单圈 Casimir 自由能中对数部分贡献后的修正项. 如果在上面的场方程中令 $a = a_0$, $b = b_0$ (a_0, b_0 均是和时间无关的常数). 那么有:

$$\frac{2A'}{b_0^{10}} + \frac{C}{b_0^6} + \frac{B'}{2b_0^{10}}(4\ln b_0^2 - 1) = 0, \quad (3.5)$$

$$- \frac{2}{b_0^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{A'}{b_0^{10}} + \frac{C}{b_0^6} + \frac{B'}{6b_0^{10}}(8\ln b_0^2 - 1) = 0. \quad (3.6)$$

由这两个等式可算出系统 A' 和 C , 即

$$A' = \frac{B'}{2}(1 - 2\ln b_0^2) - 3b_0^8, \quad (3.7)$$

$$C = 6b_0^4 - \frac{B'}{2b_0^4}. \quad (3.8)$$

为了导出模型中的等效势函数, 引入一个对数变量 $\phi = \ln(\frac{b}{b_0})$, 这里 ϕ 可视为一种等效的标量真空场. 将 ϕ 代入(3.4)后有:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + (5\dot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a})\dot{\phi} = & - \frac{2}{b_0^2} [e^{-2\phi} + 2e^{-10\phi} - 3e^{-6\phi}] \\ & + \frac{B'}{6b_0^{10}} [(16\phi + 3)e^{-10\phi} - 3e^{-6\phi}]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

注意此时还允许将方程(3.9)式左边写成 $-\frac{\mathcal{H}(\phi)}{\partial\phi}^{[11,13]}$, 在物理上可将 $V(\phi)$ 解释成真空场 ϕ 对应的等效势, 所以有:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}(\phi)}{\partial\phi} = & \frac{2}{b_0^2} [e^{-2\phi} + 2e^{-10\phi} - 3e^{-6\phi}] \\ & - \frac{B'}{6b_0^{10}} [(16\phi + 3)e^{-10\phi} - 3e^{-6\phi}]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

对(3.10)关于 ϕ 积分后可导出:

$$\begin{aligned} V(\phi) = & \frac{2}{b_0^2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2\phi} - \frac{1}{5}e^{-10\phi} + \frac{1}{2}e^{-6\phi} \right] \\ & - \frac{B'}{6b_0^{10}} \left[-\frac{4}{25}e^{-10\phi}(10\phi + 1) - \frac{3}{10}e^{-10\phi} + \frac{1}{2}e^{-6\phi} \right] + C_V. \end{aligned} \quad (3.11)$$

这就是本文所导出的 10 维紧致 Kalb-Ramond 模型的等效势的表达式. (3.11) 式中第二项是新的修正项, C_V 是积分常数. 从 (3.10) 不难看出, 当 $\phi_c=0$ 时, $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}=0$, 即 $\phi_c=0$ 是势函数 $V(\phi)$ 的一个临界点. 所以当考虑了单圈 Casimir 自由能中对数部分的修正后, 势函数的临界点并没有发生移动, 这反映了模型的某种对称性质. 为了研究稳定性问题, 需计算 $V(\phi)$ 在临界点 ϕ_c 的二阶导数:

$$\left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_c=0} = -\frac{8}{b_0^2} - \frac{2B'}{3b_0'^2}. \quad (3.12)$$

对于正的数值常数 ($B' > 0$), 恒有 $\left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_c=0} < 0$. 所以在临界点 $\phi_c=0$ 处 $V(\phi)$ 总取极大. 在物理上可将这种现象解释为不能同时得到一个等效的四维零宇宙常数和稳定的内部半径. 因此我们说这种模型的紧致化是不稳定的. 在下节中, 研究一个较复杂的超引力模型, 不同于简单的 Kalb-Ramond 模型, 将得到一种稳定的紧致化.

四、具有费米子凝聚的 10 维超引力模型

现在将对 $N=1$ 的 10 维超引力模型进行讨论, 这种模型对应于杂交弦或类型 I 超弦的点场极限^[18]. 为了获得稳定的背景几何, 可在超引力拉氏量中加入费米子凝聚项. 费米子凝聚的思想曾被 Witten 和 Nanopoulos 等人用来阐述超弦紧致化中的零宇宙常数和超对称破缺等问题^[19].

通常, 包含了 gluino 和 subgravitino 耦合的超引力模型的玻色拉氏量可表示为^[10,11,13]:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{10}Z \sqrt{-g^{(10)}} [R + \frac{3}{2} e^{-\sigma} (H_{MNP} - e^{\frac{\sigma}{2}} (\text{Tr} \bar{\chi} \Gamma_{MNP} \chi))^2 + \frac{1}{2} e^{-\frac{\sigma}{2}} (\text{Tr} G_{MN} G^{MN}) + \frac{1}{2} \partial_M \sigma \partial^M \sigma + (\text{Tr} \bar{\chi} \Gamma_{MNP} \chi) (\bar{\lambda} \Gamma^{MNP} \lambda)], \quad (4.1)$$

这里, R 是 10 维的标量曲率, G_{MN} 是 Yang-Mills 场强, σ 是标量场. 修正的 3-指标场 H_{MNP} 可以由 Kalb-Ramond 场 $B_{\mu\nu}$, Yang-Mills-Chern-Simons 3-形式 ω_{3Y} , 与 Lorentz 群 Chern-Simons 3-形式 ω_{3L} 表示, 即

$$H = dB - \omega_{3Y} + \omega_{3L}, \quad \omega_{3Y} = \text{Tr}(A \cdot G - \frac{1}{3} A^3),$$

$$\omega_{3L} = \text{Tr}(\omega R - \frac{1}{3} \omega^3). \quad (4.2)$$

为了简单起见, 先假定 Yang-Mills 场 G_{MN} 在整个 10 维流形上取为 0, 且标量真空场不随时间变化 ($\sigma = \sigma_0$), 那么根据拉氏量 (4.1) 可导出如下的真空场方程, 即:

$$e^{-\sigma_0} (H_{MNP})^2 = \frac{3}{2} e^{-\sigma_0/2} H_{MNP} (\text{Tr} \bar{\chi} \Gamma^{MNP} \chi). \quad (4.3)$$

引入新的 Kalb-Ramond 场强 $\mathcal{H}_{MNP} = e^{-\frac{\sigma_0}{2}} H_{MNP}$, 根据 (4.1) (4.3) 可导出如下的场方程:

$$R_{MN} = \frac{9}{2} \mathcal{H}_{MPQ} \mathcal{H}_{N}^{PQ} - \frac{1}{2} \mathcal{H}_{PQR} \mathcal{H}^{PQR} g_{MN} - \frac{1}{8} (\text{Tr} \bar{\chi} \Gamma_{PQR} \chi).$$

$$(\bar{\lambda}\Gamma^{PQR}\lambda)g_{MN} - \frac{3}{16}(\text{Tr}\bar{\chi}\Gamma_{PQR}\chi)(\text{Tr}\bar{\chi}\Gamma^{PQR}\chi)g_{MN} + \frac{9}{2}\mathcal{H}_M^{PQ} \cdot (\text{Tr}\bar{\chi}\Gamma_{NPQ}\chi). \quad (4.4)$$

为了得到一种自然的紧致化,可以对 3-指标场和费米子凝聚项统一采用 Freund-Rubin ansatz(2.7),即这些场仅取值于内部空间 $S^3 \otimes S^3$. 同时,引入常数 h_0, χ_0 和 λ_0 , 分别对应于 Kalb-Ramond 场 \mathcal{H}_{MNP} , gluino 场 χ 和 Subgravitino 场 λ . 此时,仍采用内部球半径相等($b_1=b_2=b$)的假定. 当考虑了单圈 Casimir 自由能的贡献后, Einstein 场方程(2.3), (2.5)变为:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\ddot{b}}{b} = -\left[\frac{2A'}{b^{10}} - \frac{C}{b^6} + \frac{B'}{2b^{10}}(4\ln b^2 - 1)\right], \quad (4.5)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + 5\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 3\frac{\dot{a}}{a} \cdot \frac{\dot{b}}{b} = -\frac{2}{b^2} + \frac{4}{3}\frac{A'}{b^{10}} + \frac{c'}{b^6} + \frac{B'(8\ln b^2 - 1)}{6b^{10}}. \quad (4.6)$$

其中

$$C = 3(2h_0^2 + \frac{1}{2}\chi_0\lambda_0 + \frac{3}{4}\chi_0^2), \quad (4.7)$$

$$C' = 3(-h_0^2 - 3h_0\chi_0 + \frac{1}{2}\chi_0\lambda_0 + \frac{3}{4}\chi_0^2). \quad (4.8)$$

注意到这里出现了两个不相等的“磁单极”系数 C, C' , 这和上节模型中讨论的情况有所不同.

同样可设 $a=a_0, b=b_0$ (a_0, b_0 与时间无关), 则由(4.5)(4.6)可求出系数 A', C' :

$$2A' = Cb_0^4 - \frac{B'}{2}(4\ln b_0^2 - 1), \quad (4.9)$$

$$C' = 2b_0^4 - \frac{B'}{6b_0^4} - \frac{2}{3}C. \quad (4.10)$$

将(4.9)(4.10)代入(4.6), 同样引进对数变量 $\phi = \ln(b/b_0)$, 那么不难得到等效势 $V(\phi)$ 所满足的方程:

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = \frac{2}{b_0^2} \left[e^{-2\phi} - \frac{C}{3b_0^4} e^{-10\phi} + \left(\frac{C}{3b_0^4} - 1\right) e^{-6\phi} \right] - \frac{B'}{6b_0^{10}} [(16\phi + 1)e^{-10\phi} - e^{-6\phi}], \quad (4.11)$$

对(4.11)关于 ϕ 积分后即得:

$$V(\phi) = \frac{2}{b_0^2} \left[-\frac{1}{2}e^{-2\phi} + \frac{C}{30b_0^4}e^{-10\phi} + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{C}{3b_0^4}\right)e^{-6\phi} \right] - \frac{B'}{6b_0^{10}} \left[-\frac{4}{25}e^{-10\phi}(10\phi + 1) - \frac{1}{10}e^{-10\phi} + \frac{1}{6}e^{-6\phi} \right] + C_V. \quad (4.12)$$

式中第一项正是 Accetta 和 Kolb 等人的文章中所讨论过的, 而第二项则是本文导出的新的修正项. 可明显看出 $\left. \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi_c=0} = 0$, 所以 $\phi_c = 0$ 仍是上面给出的势函数 $V(\phi)$ 的一个临界点, 这一临界点上 $V(\phi)$ 的二阶导数为:

$$\left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_c=0} = \frac{2}{b_0^{10}} [4b_0^8 + \frac{4C}{3}b_0^4 - B']. \quad (4.13)$$

从(4.13)式可以看出, C 取值的正负很重要. 由于 B' 是正的数值常数, 而且 b_0 是很小的紧致球半径, 所以当 $C < 0$ 时, 有 $\left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_c=0} < 0$, 因此模型的紧致化仍不是稳定的. 但是, 当 $c > 0$ 时, 如果

$$B' < 4b_0^8 + \frac{4C}{3}b_0^4. \quad (4.14)$$

那么有 $\left. \frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_c=0} > 0$, 这时 $V(\phi)$ 在 ϕ_c 点可取极小值, 或者说在这种情况下模型的紧致化是稳定的. 因此, 对于具有费米子凝聚的 10 维紧致超引力模型, 有可能得到一种稳定的势函数, 所以我们推广了 Accetta 和 Kolb 等人的结论, 并把获得稳定势函数的约束条件修正为(4.14).

五、讨 论

本文所导出的等效势函数 $V(\phi)$ 非常类似于暴胀宇宙学中的“暴胀势”, 因此可以用 $V(\phi)$ 来分析暴胀宇宙学中的一些实际问题. 事实上, 对于具有费米子凝聚的超引力模型, 如果在 $V(\phi)$ 的表达式中令 $B' = 0$ 即得到 Accetta 和 Kolb, Oh 等人讨论过的等效势. 对于很大的 ϕ 场, 他们发现了一个非常平坦的势曲线, 这一结果可用来解释早期宇宙中的视界和平坦性困难^[20]. 当考虑了单圈 Casimir 自由能中对数项的贡献后, 势函数 $V(\phi)$ 也出现了相应的修正, 希望这类修正的势函数能应用于对更现实的暴胀宇宙模型的研究.

感谢陶必友同志所作的有益讨论.

参 考 文 献

- [1] D. Kapetanakis, G. Zoupanos, Unification in higher dimensions, preprint-CERN-TH5641/90.
- [2] M. Green, J. Schwarz, *Phys. Lett.*, **149B**(1984),117; D. Gross, J. Harvey, E. Martinec, R. Rohm, *Nud. Phys.* . . **B256**(1985),253.
- [3] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B258**(1985),46.
- [4] C. Callan, D. Friedan, E. Martinec, M. Perry, *Nucl. Phys.*, **B262**(1985),593.
- [5] Yan Jun, *Chin. Phys. Lett.*, **10**(1987),473; Yan Jun, Li Jiang Nan, Hu Shi Ke, *Chin. Phys. Lett.*, **3**(1989), 141.
- [6] O. Yasuda, *Phys. Rev.*, **D31**(1985),1899.
- [7] Y. Okada, *Phys. Lett.*, **150B**(1985),103.
- [8] L. Mezincescu, P. Townsend, *Ann. Phys.*, **160**(1985),406.
- [9] P. Mazur, *Nucl. Phys.*, **B249**(1987),525;
F. Bais, C. Gomez, V. Rubakov, *Nucl. Phys.*, **B282**(1987),531.
- [10] P. Oh, *Phys. Lett.*, **166B**(1986),292.
- [11] R. Holman, E. Kolb, S. Vadas, Y. Wang, *Phys. Rev.*, **D43**(1991),995.
- [12] M. Gleiser, S. Rajpoot, J. Taylor, *Ann. Phys.*, **160**(1985),299.
- [13] F. Accetta, M. Gleiser, R. Holman, E. Kolb., *Nucl. Phys.*, **B276**(1986),501.
- [14] P. Freund, M. Rubin., *Phys. Lett.*, **97B**(1980),233.
- [15] P. Candelas, S. Weinberg, *Nucl. Phys.*, **B237**(1984),397.

- [16] S. Randjbar-Daemi, A. Salam, J. Strathdee, *Phys. Lett.*, **135B**(1984),388.
- [17] Y. Okada, M. Yoshimura, *Phys. Rev.*, **D33**(1986),2164.
- [18] G. Segre, Low energy physics from superstrings, Lectures delivered at NATO Advanced Study Institute on Particle Physics held in Cargese, France(1985).
- [19] M. Dine, R. Rohm, N. Seiberg, E. Witten, *Phys. Lett.*, **156B**(1985),55; E. Cohen, J. Ellis, C. Gomez, D. Nanopoulos, *Phys. Lett.*, **160B**(1985),62.
- [20] A. Guth, *Phys. Rev.*, **D23**(1981),347.
R. Brandenberger, *Rev. Mod. Phys.*, **57**(1985),1.

The Stable Compactification of Ten-Dimensional Supergravity Model

YAN JUN HU SHI KE

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064)

ABSTRACT

The effective potentials of 10-D supergravity model with one-loop Casimir corrections are derived in this paper. We show that compactification are unstable for Kalb-Ramond model, but in the case of ten-dimensional supergravity model it is possible to achieve a stable compactification by including the contribution of fermionic condensation. The relation of this kind of model with inflation cosmology is discussed.