

从始态到准稳态过程的数学描述

顾建中 凌寅生

(苏州大学物理系, 215006)

摘 要

本文应用数值方法, 求解了有限区间非齐次边条件的 F-P 方程, 描述了从始态发展到准稳态的裂变过程. 对任何核温度, 都能得到稳定的非零裂变速率.

原子核诱发裂变是一种重要而复杂的过程. 许多研究表明, 原子核诱发裂变, 是一种从非平衡态向准稳态发展的过程, 这一过程可用扩散模型进行研究.^[1-5]

在裂变的扩散模型中, 几率密度 $W(x, v, t)$ 服从 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -v \frac{\partial W}{\partial x} + \gamma W + \gamma v \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\Phi(x)}{m} \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\gamma kT}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \quad (1)$$

这里, x 为形变坐标, v 为共轭速度, $\Phi(x)$ 为裂变势, γ 为粘滞系数, m 为惯性参量, kT 为核温度. 根据几率归一化的要求, 无穷远处应加上自然边条件:

$$\text{当 } |x|, |v| \rightarrow \infty \text{ 时, } W(x, v, t) \rightarrow 0. \quad (2)$$

在本文中, 采用图 1 形式的裂变势. 为了满足无穷远处的边条件, 在图 1 的右方应想像有一无穷高的势壁. 图中 x_c 为鞍点坐标, x_{sc} 为断点坐标.

在裂变统计模型开创性的工作中, Kramers 导出了准稳态时鞍点 c 处的裂变速率^[1,2]

$$\lambda_{kr} = \frac{\omega_0}{2\pi\omega_c} \left\{ \left[\omega_c^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\gamma}{2} \right\} \exp\left(-\frac{V_f}{kT}\right), \quad (3)$$

这里, ω_0 与 ω_c 为势曲线在 O 点与 c 点处的谐振子角频率, V_f 为鞍点处的势垒高度. 许多作者试图通过求解 Cauchy 问题(1)、(2)来详细描述从开始裂变到准稳态的发展过程^[2-5]. 事实上, 方程(1)满足边条件(2)的稳态解为

$$W_{st}(x, v) = N \exp\left[-\frac{\Phi(x)}{kT} - \frac{mv^2}{2kT}\right], \quad (4)$$

通过鞍点 c 的裂度速率

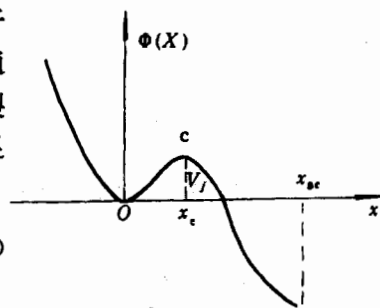


图 1 光滑垒势场

$$\lambda_c(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v W(x_c, v, t) dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, v, t) dx dv}, \quad (5)$$

将(4)代入(5)可知,稳态时没有几率流.应用本征函数法可以证明,仅当核温度 $kT \ll V_c$ 时,鞍点处才可有稳定的非零几率流.为了在任意的核温度范围内都能仔细地描述从开始裂变发展到准稳态的过程,我们提出下列模型.

在准稳态时, O 点附近的核子仅仅受势的谐振部分的影响.鞍点 c 的外部发现粒子的几率密度很小.根据准稳态的这两个特性,描述开始裂变发展到准稳态过程的数学模型可以提出如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial t} = -v \frac{\partial W}{\partial x} + \gamma W + \gamma_v \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\Phi'(x)}{m} \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\gamma kT}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \quad \left(\begin{array}{l} 0 < x < x_{sc} \\ -\infty < v < +\infty \end{array} \right) \quad (6.1) \\ W(0, v, t) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \frac{v^2}{\tau^2}\right], \quad (6.2) \\ W(x_{sc}, v, t) = 0 \quad (6.3) \\ W(x, v, 0) = \frac{1}{\pi a_x a_v} \exp\left(-\frac{x^2}{a_x^2} - \frac{v^2}{a_v^2}\right), \quad (6.4) \end{array} \right.$$

其中

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle, \quad \tau^2 = \langle v^2 \rangle, \quad \rho\sigma\tau = \langle xv \rangle; \quad (7.1)$$

$$a_x^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}, \quad a_v^2 = \frac{\hbar \omega_0}{m}. \quad (7.2)$$

(7.1)式中的平均,均为在谐振子势场中的平均,具体表式见文献[1].在本文的计算中,断点坐标均取为 $x_{sc} = 2x_c$.

为了计算简便,只考虑大阻尼情况.在大阻尼情况下,定解问题(6)转化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\gamma m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi'(x) P + kT \frac{\partial P}{\partial x} \right], \quad (0 < x < x_{sc}), \quad (8.1) \\ P(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma(t)}, \quad (8.2) \\ P(x_{sc}, t) = 0 \quad (8.3) \\ P(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_x} \exp\left(-\frac{x^2}{a_x^2}\right). \quad (8.4) \end{array} \right.$$

其中

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, v, t) dv, \quad (9)$$

从(8.1)可知,通过任一点的流

$$J(x, t) = -\frac{1}{\gamma m} \Phi'(x) P(x, t) - \frac{kT}{\gamma m} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (10)$$

因此,鞍点 c 处的裂变速率

$$\lambda_c(t) = \frac{-\frac{kT}{\gamma m} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=x_c}}{\int_0^{x_c} P(x,t) dx} \quad (11)$$

图 2 给出了立方非谐势场

$$\Phi(x) = 3V_f \left[\left(\frac{x}{x_c} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{x_c} \right)^3 \right] \quad (-\infty < x < x_{sc}) \quad (12)$$

中鞍点 c 处的裂变速率. 图 3 给出了倒挂谐振子势场

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 & (-\infty < x < x_1) \\ V_f - \frac{1}{2} m \omega_c^2 (x - x_c)^2 & (x_1 < x < x_{sc}) \end{cases} \quad (13)$$

中鞍点 c 处的裂变速率. 在我们的模型中,纵使达到了稳态,鞍点 c 处非谐势的影响也一并加以了考虑. 在立方非谐势中,稳态时的裂变速率和 Kramers 公式的偏离,可以认为是考虑了鞍点 c 处非谐势影响的结果.

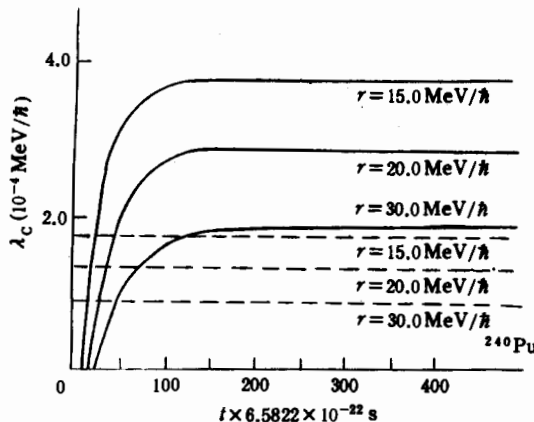


图 2 $\Phi(x) = 3V_f \left[\left(\frac{x}{x_c} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{x_c} \right)^3 \right]$
时鞍点处的裂变速率
虚线为 Kramers 准稳态的结果. $kT = 1.5 \text{ MeV}$,
 $m = 72 \text{ amu}$, $\hbar\omega_0 = 1.017 \text{ MeV}$, $\hbar\omega_c = 1.017 \text{ MeV}$,
 $V_f = 6.0 \text{ MeV}$, $x_c = 4.49 \text{ fm}$.

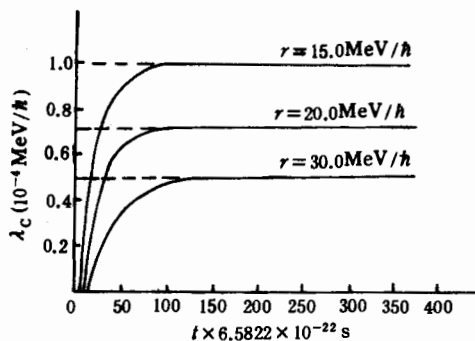


图 3 倒挂谐振子势场中鞍点处的裂变速率
 $kT = 1.5 \text{ MeV}$, $m = 60 \text{ amu}$, $\hbar\omega_0 = 1.64 \text{ MeV}$,
 $\hbar\omega_c = 1.16 \text{ MeV}$, $V_f = 8.0 \text{ MeV}$, $x_c = 3.52 \text{ fm}$.

本工作得到原子能研究院卓益忠教授热心的指导. 在准备本文的过程中,作者和冯仁发、吴锡真、金星南、徐躬耦、李盘林、贺泽君等人进行过有益的讨论,在此一并致谢.

参 考 文 献

- [1] 冯仁发,卓益忠,李君清,高能物理与核物理,8(1984),453.
- [2] P. Grange, Li Junqing, Phys. Rev., C27(1983),2063.

- [3] 冯仁发, 吴锡真, 卓益忠, 原子核物理, **10**(1988), 16.
[4] Wu Xizhen, Feng Renfa, Zhuo Yizhong, *Chinese Phys. Lett.*, **5**(1988), 41.
[5] H. A. Weidenmuller, Zhang Jiangshang, *Phys. Rev.*, **C29**, (1984), 879.

Mathematical Description of the Process from Initial State to Quasi-Stationary State

GU JIANZHONG LING YINSHENG

(Suzhou University, 215006)

ABSTRACT

The process from initial state to quasi-stationary state is described by using the Fokker-Planck equation in bounded region with inhomogeneous boundary condition. The non-zero fission rate is obtained in the stationary limit for all nuclear temperature cases.