

# 对称性对三体系统结构的影响

阮文英 鲍诚光  
(中山大学物理系 广州 510275)

1992年6月8日收到

## 摘 要

文中研究三全同费米子体系在具有排斥芯和吸引尾的短程两体力作用下的几何结构和内部运动模式,并与玻色体系作比较。

**关键词** 少体问题, 三体系统结构, 对称性。

## 1 引 言

研究束缚态少体系统的结构和内部运动模式是少体物理的基本任务之一。当粒子之间的关联足够强时,体系将维持在特定的几何结构上,粒子的运动互相牵连,从而形成特定的运动模式。显然,体系的结构和运动是由相互作用以及波函数的对称性决定的。当相互作用或对称性改变时,结构和运动将随之改变。

不久前,我们通过对三玻色系统的结构和运动模式的研究<sup>[1]</sup>,发现体系的基态是一个正三角形结构,而激发态还会出现等腰三角形,共线等对称度较低的结构。与这些结构相联系,基态的运动是围绕平衡位置的微振动,而激发态由于多种结构共存,其相应的运动方式有折叶模式、呼吸模式和共线振动等。设想将玻色子改换成费米子但不改变体系的其它方面,体系的结构和运动模式将会如何变化? Pauli 原理对此会作出哪些限制? 这显然是个有趣的问题。本文的目的正是要弄清对称性的变化对结构和运动的影响。

## 2 方法与步骤

我们的模型由三个带自旋  $\frac{1}{2}$  的费米子组成。为便于与文献[1]的结果比较,突出对称性效应,我们取相同的粒子质量 ( $m = 3728\text{MeV}$ ) 和形式上完全一样的两体力

$$V(r) = V_0[-e^{-r^2/2.105^2} + 2e^{-r^2/1.408^2}]. \quad (1)$$

(能量单位: MeV, 距离单位: fm, 下同)

在两体势中包含排斥芯和吸引尾两部分。其最小值在  $r_0 = 2.32\text{fm}$  处。  $r_0$  与体系的大小相联系。

本文仅限于总角动量  $L=0$ , 宇称为偶的态, 总自旋分  $S=\frac{1}{2}$  和  $\frac{3}{2}$  两种. 对三体系统而言, 空间的全反射等价于转动  $180^\circ$ , 因此不可能有  $L=0$  的奇宇称态. 对于总自旋  $S=\frac{1}{2}$  的态, 波函数的空间部分对粒子交换是混合对称的, 对  $S=\frac{3}{2}$  的态则是反对称的. 我们将在相同的动力学条件下, 对具有  $\square$ 、 $\mathbb{P}$  和  $\mathbb{D}$  对称的态作比较.

体系的哈密顿量  $H$  在由谐振子乘积基所张开的空间中对角化<sup>[2]</sup>

$$\mathcal{A}\{[\phi_{n_a}(\mathbf{r})\phi_{n_b}(\mathbf{R})]_{L=0}x_\zeta^S\}. \quad (2)$$

其中  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{R}$  为三体 Jacobi 坐标, 如图 1 所示,  $x_\zeta^S$  为自旋波函数,  $S$  为总自旋,  $\zeta$  是由粒子 1、2 构成的子系统的自旋,  $\mathcal{A}$  是反对称化算符. 谐振子宽度  $\omega$  作为变分参数, 给定一种对称性, 调整  $\omega$  使最低态的能量取极小值. (2) 式中反对称化可以借助于三体 Talmi-Moshinsky 系数来实现<sup>[3,4]</sup>. 在计算中,  $S=\frac{1}{2}$  的态用了 94 个反对称基,  $S=\frac{3}{2}$  的态用了

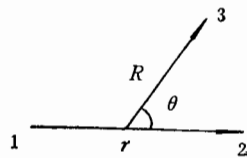


图 1 三体 Jacobi 坐标

102 个, 分别满足  $2(n_a + n_b + l) \leq 20$  和 30.

在把体系的哈密顿量对角化之后, 就可以得到本征能量  $E_i$  和本征波函数  $\Psi_i$ . 对后者的分析就可以获取关于结构和内部运动的定性知识. 在现在的情况下, 虽然相互作用不依赖自旋, 但粒子关联却与极化方向有关. 因此有必要把我们在文献[1]中定义的形状密度作一推广.

将波函数作如下展开

$$\Psi_i = \sum_{\mu_1 \mu_2} f_{\mu_1 \mu_2}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \xi_{\mu_1}(1) \zeta_{\mu_2}(2) \xi_{\mu_3}(3) \quad (3)$$

$$\mu_3 = M_s - \mu_1 - \mu_2$$

其中  $\mu_i$  是第  $i$  粒子自旋的  $z$  分量,  $\xi_\mu$  是单个粒子自旋波函数.  $M_s$  是总自旋的  $z$  分量. 我们仅限于考查  $M_s = S$  的态. 换言之,  $S=\frac{1}{2}$  的态有两个自旋朝上, 一个朝下, 结果有三个分量  $f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, f_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ . 类似于文献[1]的分析, 我们把自旋相关的形状密度定义为

$$\rho_{\mu_1 \mu_2} = r^2 R^2 \sqrt{r^2 + R^2} \sin \theta |f_{\mu_1 \mu_2}|^2. \quad (4)$$

满足归一化条件

$$1 = \sum_{\mu_1 \mu_2} \int d\mathbf{S} d\mathbf{R} \rho_{\mu_1 \mu_2}. \quad (5)$$

其中  $d\mathbf{S}$  代表体系的无穷小形变,  $d\mathbf{R}$  代表无穷小转动. 不难看出, 包含在各个分量  $\rho_{\mu_1 \mu_2}$  内的信息实质上是相同的. 我们将着重分析  $\rho_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ , 它是体系处于某种形状, 在空间取一定方向而且  $\mathbf{r}$  矢径两端上粒子自旋朝上的几率密度. 对于目前的  $L=0$ ,  $\rho_{\mu_1 \mu_2}$  是各向同性的.

### 3 总势分析与对称化产生的节线

体系的总势能为

$$V(r, R, \theta) = \sum_{i < j}^3 V(|r_i - r_j|). \quad (6)$$

图2给出  $V$  随  $R$  和  $\theta$  变化的等位线图,  $r$  固定为  $r_0 = 2.32$ . 图2的极小值对应于一个等边三角形, 每对粒子的距离正好是平衡距离  $r_0 = 2.32$ . 围绕极小值点有两条势能谷, 其中一条对应于折叶模式, 如文献[1]的图3所示. 在折叶模式中  $r$  的增大伴随  $R$  的减小, 并且总是使  $\theta$  保持为  $90^\circ$ . 总势的另一条谷对应于摆动模式, 即  $\theta$  围绕  $90^\circ$  的来回变化, 见图2. 若单纯从动力学考虑, 体系将选择正三角形, 以便结合得紧一些. 当体系被激发时, 很可能会沿势能谷运动起来. 事实上, 在研究  $\square$  对称的玻色系时就已发现,  $0_1^+$  态倾向正三角形结构而  $0_2^+$  态则是沿着折叶谷的往复振动. 但下面将会看到  $\square$  和  $\square$  目对称的态会出现另外的情况.

在量子力学中, 对称性对体系结构有重要影响. 容易看出图2的  $y$  轴是  $f_{\frac{3}{2}^+}$  的一根节线. 因此, 以两个自旋朝上粒子为底的等腰三角形是被禁戒的,  $\square$  和  $\square$  目的态的几何特征将与  $\square$  态有很大差别. 此外与正三角形、等腰三角形相联系的呼吸模式、折叶模式也将不复存在于  $\square$  和  $\square$  目的态. 对于  $\square$  目对称的态, 情况还更糟, 不论以哪一对粒子为底, 任何等腰三角形都要受禁戒. 因此, 对于  $\square$  目对称的态,  $f_{\frac{3}{2}^+}$  除  $y$  轴外还有另外两根节线, 它们是分别以底边两个粒子为圆心,  $r$  为半径的圆. 如果  $r$  变, 它们也将会变. 波函数的这些节线体现了对称性的限制. 在这些限制下, 体系将会作出何种选择? 且看以下结果.

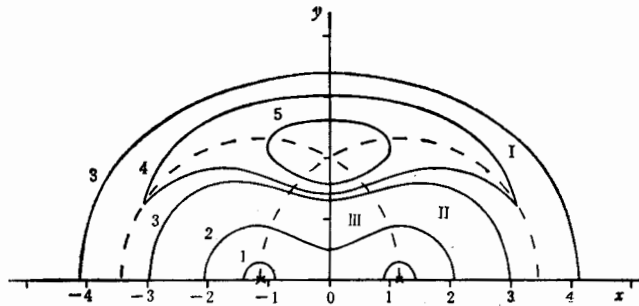


图2  $r$  取  $2.32\text{fm}$  时总势能  $V$  随  $\theta$  和  $R$  变化的等位线图

定义  $x = R \cos \theta$ ,  $y = R \sin \theta$ .

粒子1,2在  $x$  轴上的位置用  $\times$  号标出. 折线是目态波函数由于反对称化产生的节线, 与等位线1,2,3,4,5对应的势能分别是  $0.64$ ,  $0.25$ ,  $-0.28$ ,  $-0.34$ ,  $-0.42V_0$ . 折线和坐标轴将  $1/4$  平面分成 I, II, III 三个区.

### 4 计算结果

在文献[1]  $V_0 = 300\text{MeV}$ . 但从计算中我们发现  $V_0$  取  $300\text{MeV}$  时不足以形成  $\square$  目对称的束缚态. 因此在本文的计算中  $V_0$  改取  $600\text{MeV}$ , 这时文献[1]的定性结论不变. 从

计算中我们还发现,对于 $\Pi$ 对称性,高能态的内部运动与低能态相似,只是运动更剧烈,幅度更大而已。对于 $\Sigma$ 对称性亦有相同的结论,因此下面仅就每一种对称性的最低能态给出计算结果。

将体系的哈密顿量对角化之后得到本征能量和波函数。三种对称性最低能态的本征值为以 MeV 为单位

|         | $\Pi$   | $\Sigma$ | $\Sigma$   |
|---------|---------|----------|------------|
| $0_1^+$ | -186.06 | -158.02  | -78.94 MeV |

由此看到,具有 $\Sigma$ 对称性的态的能量远高于其他对称性的态。

将求得的波函数作如下展开

$$\Psi_i = \sum_l (F_l^0(r, R)x_l^0 + F_l^1(r, R)x_l^1)[Y_l(\hat{r})Y_l(\hat{R})]_0 \quad (7)$$

定义分波道权重为

$$W_l = \int dr dR r^2 R^2 [|F_l^0|^2 + |F_l^1|^2]. \quad (8)$$

这些量列于表 1。

表 1  $0_1^+$ 态分波道权重(%)

| $l$<br>态 $w_l$ | 0     | 1     | 2     | 3     | 4    | 5    |
|----------------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| $\Pi 0_1^+$    | 34.24 | 28.04 | 12.97 | 19.36 | 2.55 | 2.50 |
| $\Sigma 0_1^+$ | 0     | 66.5  | 0     | 25.4  | 0    | 7.25 |

值得注意的是,在 $\Pi$ 对称的态中, $l=0$ 分波占 90%以上<sup>[5]</sup>,而现在 $l=0$ 分波不是那么重要了。这意味着在 $\Pi$ 对称的态中, $S$ 分波振动的耦合(尤其是折叶模式和呼吸模式)是主要的运动模式,如在 $\Sigma$ 和 $\Sigma$ 对称的态中粒子间的相对转动将变得重要。

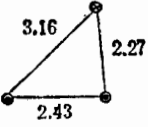
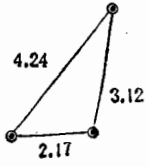
由自旋相关形状密度的极大值所确定的最可几形状列于表 2 中。在每一个顶点上还标出费米子的极性。我们发现对于 $\Sigma$ 和 $\Sigma$ 两种对称性的 $0_1^+$ 态都只有一个最可几形状,而且均为不规则三角形。

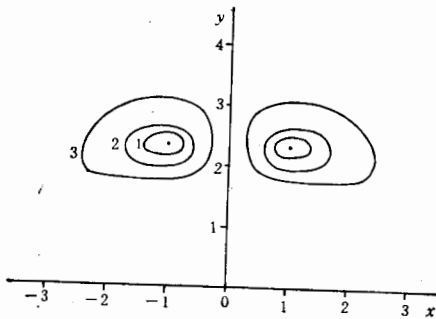
作为 $R$ 和 $\theta$ 的函数, $\Sigma$ 对称 $0_1^+$ 态的自旋相关形状密度在图 3 给出, $r$ 则固定在最可几值 2.43。两个自旋朝上粒子的位置在横轴上标出。由于沿 $y$ 轴有一根节线,自旋朝下的粒子无法再呆在总势的极小值里,被迫在图 2 所示的势能谷里往复摆动,形成摆动模式。在自旋朝下粒子摆动的同时, $r$ (两个自旋朝上粒子的连线)必须朝相反方向转动以保持体系总角动量为零。另外我们还发现在摆动过程中, $r$ 大小的变化很小。

对于 $\Sigma$ 对称性,情况要稍为复杂一些。让我们回到图 2 上来看体系将会采取的内部结构。对于能量最低的态来说,希望波函数尽量分布在总势能低一些的区域,但又尽量避开节线多的地方,因为节线越多运动越剧烈。假定粒子 3 呆在图 2 的 I 区中, $r$ 就得缩短一些(例如 $0_1^+$ 态的 $r=2.17$ ),否则这一区域太远了,总势能就会很高;假定粒子 3 呆

表2  $0_1^+$  态最可几形状和  $\rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  (见(4)式)最大值. 自旋朝上和朝下分别用 $\odot$ 和 $\otimes$ 表示.

长度单位: fm

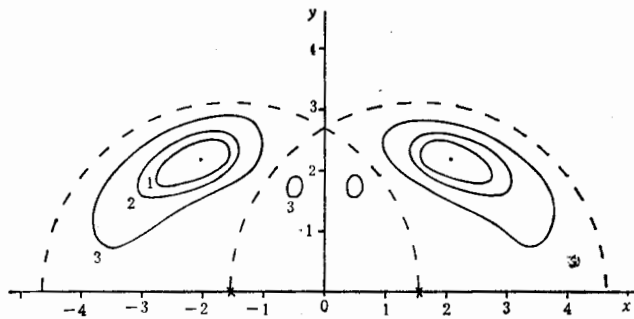
| 态         | 最可几形状   | $\rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\max}$ |
|-----------|---|--|
| 甲 $0_1^+$ |  | 2.06                                   |
| 目 $1_1^+$ |  | 1.86                                   |

图3 甲对称  $0_1^+$  态自旋相关形状密度  $\rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  的等高线图

$\rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  是作为粒子3(自旋朝下)在  $x-y$  平面上位置的函数. 两个自旋朝上的粒子1、2在  $x$  轴上的位置用两个 $\times$ 号标出.  $r$ 取最可几值2.43. 与等高线1、2、3对应  $\rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  分别是  $\rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\max}$  的  $19/25, 14/25, 4/25$ .

在区域II中,  $r$  就得增大一些(例如  $0_1^+$  态的  $r = 3.12$ ), 否则区域II太窄了, 波函数的分布很陡, 动能就会很大. 若粒子3呆在III区中,  $r$  还得再增大一些(例如  $0_1^+$  态的  $r = 4.24\text{fm}$ ). 这一分析表明粒子3的运动将与  $r$  的振动耦合. 另一方面, 若单纯从几何结构看, 粒子3呆在三个区域中的那一个, 通过调整  $r$  的长度,  $\rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  的最大值均对应于同一个结构, 即表2所示的不规则三角形. 只是粒子3处于同一个三角形的不同顶点而已. 作为例子, 粒子3呆在区域II的几率分布如图4所示.

与甲对称的态一样, 目态的内部运动也是以粒子3相对于另外两个粒子质心的摆动

图4 目对称  $0_1^+$  态  $\rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$  等高线图

$r$ 取最可几值3.12. 其他说明同图3.

为特征。所不同的是现在粒子 3 的摆动伴随  $r$  的剧烈振动。当粒子 3 从 I 区穿过 II 区进入 III 区时, 粒子 1, 2 远离而去 ( $r$  增大), 当粒子 3 穿过  $y$  轴沿着另一侧的  $I \Rightarrow II \Rightarrow III$  远离而去时, 粒子 1、2 相互靠近 ( $r$  缩短), 从而形成目态的运动模式。

## 5 结 论

我们选择了最具代表性的两体力(包含排斥芯和吸引尾), 研究了全同粒子体系所有可能的交换对称性下的几何结构和运动模式, 我们的结论如下:

(I) 四对称的态倾向具有几何对称性的结构(如正三角形、等腰三角形等)。在  $\Pi$  对称的态中这些结构部分地受到禁戒; 正三角形完全不可能, 等腰三角形底边的一对粒子亦不允许具有相同的极性。在目对称的态中正三角形和等腰三角形完全受禁戒, 体系只能处于极不对称的几何构形。

(II) 以  $S$  波为主导的(即  $l_1 = l_2 = 0$ ) 折叶, 呼吸模式是以几何对称结构为基础, 虽然它们被  $\Pi$  态所倾爱, 但由于这些几何结构受制于粒子交换对称性, 它们在  $\Pi$  和目对称的态将不复存在。取而代之的是摆动模式, 该模式以  $p, d$  分波为主。

虽然我们讨论的是一个模型而不是一个真实系统, 但一个重要的发现是体系的几何特征和内部运动的特征主要是取决于两个因素, 即

I) 总位能等位面的拓扑结构。

II) 源于对称性的节面 (nodal surface) 的拓扑结构。

例如当追求一个较为有利的几何构形(等腰形)而不可得时(被对称性禁戒), 就出现了穿越书面的来回摆动, 这意味着不同的动力学系统, 如果它们具有完全相同的对称性, 如果相互作用具有相同的特征(例如既有排斥心, 又有吸引尾), 其结构和内部运动的特征也会相似, 因而我们以上的发现具有一定的普遍性。

## 参 考 文 献

- [1] C.G. Bao, G.C. Qiu, H.D. Cao, Y.P. Gan, L.X. Luo and T.K.Lim, *Few-Body Systems* 2(1987) 81.
- [2] V.C. Aguilera, -Navarro and O. Portilho, *Ann. of Phys.*, 107(1977)126.
- [3] W. Tobocman, *Nucl Phys.*, A357(1981)293.
- [4] Y.P. Gan, M.Z. Gong, C.E. Wu and C.G.Bao *Computer Phys. Comm.*, 34(1985)387.
- [5] Y.W. Duan, Private communication.

## The Effect of Symmetry on The Structures of Three-Body Systems

Ruan Wenying Bao Chengguang

(*Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275*)

Received on June 8, 1992

### Abstract

The geometric structures and modes of internal motion of three identical fermions system are investigated. The fermions are interacting via short-range two body potential having a repulsive core and an attractive tail. The results are compared with those of boson system.

**Key Words** Few-body problems, Structures of 3-body systems, Symmetry.