

# 多维 Kramers 公式的研究

钟云霄 胡济民

(北京大学技术物理系 北京 100871)  
1993年6月21日收到

## 摘 要

本文研究了鞍点附近多维的位能曲面及鞍点所在位置;并用 Werner Wheeler 及无旋液体等两种方法计算了多维的质量系数与粘滞系数,然后用多维 Kramers 公式计算了裂变速率。发现裂变速率随着维数的增加而适当增大。不同的形变参量以及不同的计算质量和粘滞系数方法对计算核裂变速率影响不大。从结果看,采用三维计算裂变几率已足够准确。

**关键词** 多维位能曲面,质量与粘滞性,Kramers 公式,裂变速率。

## 1 引 言

对研究核裂变问题,Kramers 公式具有重要的意义,一方面它常常成为研究核裂变的其它方法在稳定状态下的参考<sup>[1,2]</sup>;另一方面,不少方法是从 Kramers 结果出发的,即把鞍点的稳定状态作为初始状态来研究裂变时的质量分布及其它性质<sup>[3,4]</sup>。在有些研究中,常常采用一维的结果,这显然是不够的。我们在1980年曾经得出普遍的多维 Kramers 公式<sup>[5]</sup>,卓益忠等也推出了两维的公式<sup>[6]</sup>,1984年 Weidenmuller<sup>[7]</sup> 得出了更简洁漂亮的多维 Kramers 公式。此后也有人应用多维公式计算过裂变几率,但是对于增加维数裂变速率是增加还是减少,结论是不一致的<sup>[8-11]</sup>。另外还有人研究过量子修正对裂变速率的影响<sup>[12,13]</sup>,不过当激发能较高时,量子修正的影响不大。为了比较不同维数对于核裂变速率的影响,确定用多少维来计算裂变几率比较合理,本文对 <sup>235</sup>At 核用两种形变参量计算了一维,二维,三维,四维的位能,并用 Werner Wheeler 公式和无旋液体等<sup>[14]</sup>两种方法计算了质量和用一体耗散机制<sup>[15]</sup>计算了粘滞系数,发现鞍点的高度随着维数的增加而减低,鞍点的位置随着维数的增加而变化使核形状略有增长;裂变速率则随着维数的增加而适当变大。两种不同形变参数和两种不同计算质量及粘滞系数方法所得结果有所不同,但计算所得裂变几率相差不大,用  $(c, h, a)$  三维形变参量来计算裂变速率较为合理。

## 2 公式及计算结果

### 2.1 裂变速率公式

Weidenmuller<sup>[7]</sup> 的裂变公式为:

$$R = (H/2\pi)\{(\det\bar{W})/|\det\varphi|\}^{1/2}\exp(-U/kT), \quad (1)$$

这里,  $R$  为裂变速率,  $\bar{W}$  为球形核的折合位能, 即:

$$\det\bar{W} = (\det W)/(\det M_0). \quad (2)$$

若以  $x_1, x_2, \dots, x_n$  代表形变参量, 则在球形核附近, 位能曲面由下式给出:

$$V = (1/2)\Sigma W_{ij}x_ix_j, \quad (3)$$

动能

$$E_k = (1/2)\Sigma M_{0ij}x_ix_j. \quad (4)$$

必须注意,  $M_0$  为球形核时的质量张量, 文献[7]里误为鞍点时的质量张量, 这是不正确的, 若用公式(2), 则(1)式与文献[5]的公式完全相同, 文献[8]已注意到这一点. 公式(1)中的  $U$  为鞍点高度,  $kT$  为核温度, 在计算中, 取  $kT = 1\text{MeV}$ ,

$$\det(\varphi) = \det(V)/\det(M), \quad (5)$$

$M$  为鞍点质量张量, 鞍点附近, 位能  $V$  为:

$$V = U + (1/2)\Sigma V_{ij}x_ix_j, \quad (6)$$

动能

$$E_k = (1/2)\Sigma M_{ij}x_ix_j. \quad (7)$$

$Z$  为粘滞系数张量,  $H$  由下式解出:

$$\det \begin{pmatrix} \gamma + HI & -I \\ \varphi & HI \end{pmatrix} = 0, \quad (8)$$

其中  $I$  为单位矩阵,  $Z$  为粘滞系数矩阵, 而:

$$\gamma = (M^{1/2})Z(M^{1/2}). \quad (9)$$

## 2.2 位能的计算

位能用 Finite range liquid drop model 的公式计算<sup>[6]</sup>, 当核表面形状用  $(c, h, \alpha)$  参数表示时, 表面公式为:

$$\rho^2 = (c^2 - z^2)(A + Bz^2/c^2 + \alpha z/c + Dz^4/c^4), \quad (10)$$

这里, 形变参量除了  $c, h, \alpha$  外, 为了扩大形变的自由度, 我们引进了第四个参量  $D$ , 为了保证在形变时体积守恒, (10)式中的  $A$  及  $B$  为:

$$A = 1/c^3 - 0.4h - 0.1(c - 1) - 6D/70, B = 2h + 0.5(c - 1). \quad (11)$$

位能的鞍点的位置及高度  $D$  和相应的形变参量, 如表 1 所示, 从表上可见, 引入参量  $D$ , 对鞍点位置及位垒高度有相当大的影响.

表 1 位能的鞍点与维数的关系

维数及所用参量	鞍点所在位置	鞍点高度
一维, $c$	$c = 1.74355$	$U = 10.028$
二维, $c, \alpha$	$c = 1.74355, \alpha = 0$	$U = 10.028$
二维, $c, h$	$c = 1.76401, h = -0.034578$	$U = 9.8822$
三维, $c, h, \alpha$	$c = 1.76401, h = -0.034578, \alpha = 0$	$U = 9.8822$
三维, $c, h, D$	$c = 1.77416, h = 0.000607, D = -0.17277$	$U = 9.7047$
四维 $c, h, D, \alpha$	$c = 1.77416, h = 0.000607, D = -0.17277, \alpha = 0$	$U = 9.7047$

四维的位能张量(鞍点与球形核)分别为:

$$V = \begin{pmatrix} c & h & \alpha & D \\ -97.70 & -73.55 & 0.00 & -23.61 \\ -73.55 & 178.29 & 0.00 & 28.57 \\ 0.00 & 0.00 & 487.37 & 0.00 \\ -23.60 & 28.57 & 0.00 & 14.95 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} c & h & \alpha & D \\ 137.51 & 36.58 & 0.00 & 11.10 \\ 36.58 & 35.26 & 0.00 & 7.39 \\ 0.00 & 0.00 & 15.45 & 0.00 \\ 11.10 & 7.39 & 0.00 & 2.39 \end{pmatrix}.$$

当核表面公式以球坐标  $r, \theta$  表示时,用球谐函数展开如下:

$$r = \lambda R f(x), x = \cos(\theta), \quad (12)$$

$$f(x) = 1 + a_2 P_2(x) + a_3 \phi_3(x) + a_4 P_4(x) + a_6 P_6(x), \quad (13)$$

其中  $a_2, a_3, a_4, a_6$ , 为形变参量,  $P_i(x)$  为球谐函数,  $\phi_3(x)$  的定义见(15)式, 用此公式代入相同模型计算时,位能的鞍点高度与所在位置为:

$$a_2 = 0.830283, a_3 = 0, a_4 = 0.262604, a_6 = -0.027689, U = 9.840840. \quad (14)$$

比较两种参量的位垒高度,可见,用  $(c, h, \alpha)$  三参量已相当用  $(a_2, a_3, a_4, a_6)$  四参量,说明用  $(c, h, \alpha)$  参量更优越些.为了便于比较,将鞍点及球形核的位能张量给出如下:

$$V = \begin{pmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & a_3 \\ 31.90 & -91.00 & 27.92 & 0.00 \\ -91.00 & 116.95 & -18.33 & 0.00 \\ 27.92 & -18.33 & 172.62 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 21.54 \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} 121.32 & -0.094 & -0.088 & 0.00 \\ -0.094 & 554.73 & -0.114 & 0.00 \\ -0.088 & -0.114 & 605.39 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 61.68 \end{pmatrix}.$$

### 2.3 质量和粘滞系数矩阵的计算

本文用两种方法计算质量与粘滞系数矩阵,当用  $c, h, \alpha, D$  为形变参量时,用 Werner Wheeler 方法计算,鞍点的质量系数矩阵  $M$  与粘滞系数矩阵  $Z$  分别为:

$$M = \begin{pmatrix} c & h & \alpha & D \\ 10985.9 & 11418.1 & 0.000 & 3533.4 \\ 11418.1 & 13244.9 & 0.000 & 3847.7 \\ 0.000 & 0.000 & 16595.4 & 0.000 \\ 3533.4 & 3847.7 & 0.000 & 1179.3 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 2735.5 & 2733.3 & 0.000 & 875.22 \\ 2733.3 & 3565.8 & 0.000 & 992.76 \\ 0.000 & 0.000 & 6192.9 & 0.000 \\ 875.22 & 992.76 & 0.000 & 314.31 \end{pmatrix}.$$

球形核时的质量系数矩阵为:

$$M = \begin{pmatrix} 3576.4 & 787.6 & 0.000 & 260.2 \\ 787.53 & 227.3 & 0.000 & 66.64 \\ 0.000 & 0.000 & 68.50 & 0.000 \\ 260.2 & 66.64 & 0.000 & 21.39 \end{pmatrix}.$$

注意,这里用的单位是: 能量为 MeV, 时间单位为  $10^{-22}$ s, 对只有  $c, h, \alpha$  三维时的相应数值在这里就不去多写了.

当用  $a_2, a_3, a_4, a_6$  为参量时, 用无旋液体的方法计算, 为了保证形变时质心不动, 将公式(13)中的  $\psi_3(x)$  定义为:

$$\psi_3(x) = x^3 - (r_1/r_2)x, \quad (15)$$

其中

$$r_1 = \int f^3(x)x^4 dx, r_2 = \int f^3(x)x^2 dx, \quad (16)$$

这样减少了与  $a_3$  有关的质量系数的计算误差, 计算结果, 鞍点的质量及粘滞系数张量分别为:

$$M = \begin{pmatrix} a_2 & a_4 & a_6 & a_3 \\ 2323.4 & 1262.3 & 476.3 & 0.000 \\ 1262.3 & 1601.6 & 839.7 & 0.000 \\ 476.3 & 839.7 & 809.6 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 268.98 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 618.8 & 223.3 & 127.9 & 0.000 \\ 223.3 & 647.3 & 321.9 & 0.000 \\ 127.9 & 321.9 & 533.3 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1061.5 \end{pmatrix}.$$

球形核的质量张量为:

$$M = \begin{pmatrix} 3196.7 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 888.0 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 409.8 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 234.6 \end{pmatrix}.$$

表2 不同参量下的  $H$  与裂变速率

维数及所用参量	$H$	裂变速率 $R(10^{16}s^{-1})$
一维, $c$	0.03008	0.450
二维, $c, \alpha$	0.03008	1.33
二维, $c, h$	0.03164	0.941
三维, $c, h, \alpha$	0.03164	2.58
三维, $c, h, D$	0.03260	1.313
四维, $c, h, D, \alpha$	0.03260	3.637
三维, $a_2, a_4, a_6$	0.03125	1.503
四维, $a_2, a_4, a_6, a_3$	0.03125	2.673

## 2.4 裂变速率的计算

有了质量系数及粘滞系数,就可以从(4)式计算  $H$ , 然后用(1)式计算裂变速率,计算结果如表 2 所示.

由此可见,(1)柱坐标  $(c, \alpha)$  相当于球坐标  $(a_2, a_3, a_4)$ , 而用柱坐标  $(c, h, \alpha)$  相当于用球坐标  $(a_2, a_3, a_4, a_6)$ ; (2) 虽然前后不对称的形变  $\alpha$  及  $a_3$  对于位垒高度及鞍点位置没有影响,但是对裂变速率则影响较大,不可忽略。(3)用 Werner Wheeler 方法计算质量张量已是足够好的近似。当然,对于鞍点以后更大的形变,则此方法与无旋液体方法差别会大一些。

## 参 考 文 献

- [1] P. Grange, Li Jun qing and H. A. Weidenmuller, *Phys. Rev.*, **C27**(1983) 2063.
- [2] 钟云霄,高能物理与核物理, **9**(1985)108.
- [3] F. Scheuter, C. Gregoire, H. Hofmann and J. R. Nix, *Phys. Lett.*, **149B**(1984) 303.
- [4] G. D. Adeev, I. I. Gonchar, V. V. Pashkevich, N. I. Pischasov, and O. I. Serdyuk, *Sov. J. Part. Nucl.*, **19**(1988) 529.
- [5] 胡济民、钟云霄,高能物理与核物理, **4**(1980)368.
- [6] 吴锡真、卓益忠,原子核物理, **2**(1980)257.
- [7] H. A. Weidenmuller and Zhang Jing Shang, *J. of statistical Phys.*, **34**(1984) 191.
- [8] J. D. Bao, Y. Z. Zhuo and J. S. Zhang, *Z. Phys.*, **A335**(1990) 213.
- [9] P. Frobrich and G. R. Tillack, *Nucl. Phys.*, **A540**(1992) 353.
- [10] Jingdong Bao, Yizhong Zhuo and Xizhen Wu, *Commun. Theor. Phys.*, **17**(1992) 216.
- [11] 包景东,博士论文,(1992)原子能科学院.
- [12] M. Abe, *Phys. Rev.*, **C41**(1990) 2451.
- [13] 包景东、卓益忠、吴锡真,高能物理与核物理, **17**(1993)362.
- [14] K. T. R. Davice, A. J. Sierk and J. R. Nix, *Phys. Rev.*, **C13**(1976) 2385.
- [15] R. Nix, and A. J. Sierk, *Nucl. Phys.*, **A428**(1984) 161.
- [16] P. Moller and J. R. Nix, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **39**(1988) 213.

## Study of the Multidimensional Kramers' Equation

Zhong Yunxiao Hu Jimin

(Dept of Tech. Phys., Peking University Beijing 100871)

Received on June 21, 1993

### Abstract

The position of saddle point and potential energy surface near the saddle point are studied for a given fissioning system. Multidimensional inertia and viscosity tensors are calculated with both irrotational flow and Werner Wheeler approximation, and the fission rate is calculated with multidimensional Kramers' formula. It is found that the fission rate increases reasonably with the number of dimensions considered and changes only slightly with the assumptions used in kinetic energy calculations. The results of calculations indicate that a suitable three dimensional calculation will be sufficient to yield accurate fission rates.

**Key words** multidimensional potential energy surface, Inertia and viscosity, Kramers' formula, fission rate.