

有限温度阿贝尔格点规范理论 相变的解析研究

刘文生 崔建营 杨金民 万陵德

(河南师范大学物理系 新乡 453002)

1993年5月19日收到

摘 要

应用变分累积展开方法系统地研究了(2+1)维和(3+1)维的 $Z(2)$ 、 $Z(3)$ 、 $U(1)$ 阿贝尔格点规范理论在有限温度下的相变. 所得结果同已有的严格结果及 Svetitsky 和 Yaff 的理论预言相符合.

关键词 相变, 变分累积展开, 阿贝尔格点规范.

1 引 言

格点规范理论通过对 Wilson 圈真空期待值的分析, 已经证明非阿贝尔规范理论具有禁闭性质. 表明不可能以动力学方法分离出自由夸克, 这是没有考虑热运动时的结论. 人们早就猜测: 在高温情况下, 非阿贝尔规范理论可能发生解除禁闭的相变形成夸克-胶子等离子体. 对这一相变作深入分析很有意义. 根据文献 [1], $d+1$ 维的 $SU(N)$ 和 $Z(N)$ 有限温度规范理论同属于与 d 维 $Z(N)$ 自旋模型相对应的普适类. 所以研究 $Z(N)$ 规范理论将有助于对 $SU(N)$ 非阿贝尔规范理论的理解. 已有文献用 MC 方法^[2,3], 平均场方法^[4,5], 研究了 $Z(N)$ 和 $U(1)$ 规范理论的相变. 本文将用近些年发展起来的变分累积展开方法^[6,7]对有限温度下的 $Z(N)$ 、 $U(1)$ 阿贝尔规范理论的相变作系统的研究.

2 计算过程

考虑定义于 $d+1$ 维超立方点阵上的阿贝尔规范理论. 其 Wilson 作用量为

$$S = \beta \left[\sum_{\{P_\tau\}} \cos \theta_{P_\tau} + \sum_{\{P_\sigma\}} \cos \theta_{P_\sigma} \right]. \quad (1)$$

这里 $\{P_\tau\}$ 、 $\{P_\sigma\}$ 分别表示对所有类时和类空块求和, 且

$$\theta_P = \theta_{n,\mu} + \theta_{n+\mu,\nu} - \theta_{n+\nu,\mu} - \theta_{n,\nu}. \quad (2)$$

对 $Z(N)$ 群

$$\theta_{n,\mu} = \frac{2n\pi}{N}, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \quad (3)$$

对 $U(1)$ 群

$$\theta_{n,\mu} \in [-\pi, \pi]. \quad (4)$$

格点系统在时间方向上满足周期条件:

$$\cos \theta_{n,i} = \cos \theta_{n+N_{\tau},i}. \quad (5)$$

即系统在时间方向上的周期为 N_{τ} .

选取 Polyakov 线 $\langle L \rangle$ 作为序参量

$$L = \cos \left(\sum_{i=0}^{N_{\tau}-1} \theta_{n+i,\tau} \right). \quad (6)$$

系统的配分函数为

$$Z = e^{-F} = \int [d\mu] e^S. \quad (7)$$

其中 F 为系统的自由能.

为了进行解析计算, 按照变分累积展开方法引入试探作用量

$$S_0 = J \sum_{\{I_{\tau}\}} \cos \theta_{I_{\tau}} + K \sum_{\{I_{\sigma}\}} \cos \theta_{I_{\sigma}} \quad (8)$$

其中 $\{I_{\sigma}\}, \{I_{\tau}\}$ 分别表示对所有类空和类时键求和, J, K 为引入的变分参数. 设系统中类时、类空键的总数各为 \bar{N}_{τ} 和 \bar{N}_{σ} , 则有

$$\begin{aligned} Z_0 &= e^{-F_0} = \int [d\mu] e^{S_0} \\ &= [f(J)]^{\bar{N}_{\tau}} \cdot [f(K)]^{\bar{N}_{\sigma}} \end{aligned} \quad (9)$$

其中 F_0 是 S_0 系统的自由能, Z_0 是相应的配分函数, 并且

$$f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-x}, & \text{对 } Z(2) \\ e^x + 2e^{-x/2}, & \text{对 } Z(3) \\ I_0(x), & \text{对 } U(1). \end{cases} \quad (10)$$

这里 I_0 为零阶变型贝塞耳函数. 为了以后应用, 先做如下定义:

$$\begin{aligned} \xi_n &= \langle \cos(n\theta_{I_{\tau}}) \rangle_0 \\ \omega_n &= \langle \cos(n\theta_{I_{\sigma}}) \rangle_0 \end{aligned} \quad (11)$$

它们可以按下式计算

$$\begin{aligned} \xi_1 &= [f(J)]^{-1} \frac{\partial f(J)}{\partial J} \\ \omega_1 &= [f(K)]^{-1} \frac{\partial f(K)}{\partial K} \\ \xi_2 &= \frac{2}{f(J)} \cdot \frac{\partial^2 f(J)}{\partial J^2} - 1 \\ \omega_2 &= \frac{2}{f(K)} \cdot \frac{\partial^2 f(K)}{\partial K^2} - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

.....

现在把系统的配分函数作如下处理:

$$\begin{aligned}
 Z &= \int [d\mu] e^S = \int [d\mu] e^{S-S_0} e^{S_0} \\
 &= Z_0 \langle e^{S-S_0} \rangle_0 \\
 &= Z_0 \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} k_n/n!\right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$k_n = \langle (S - S_0)^n \rangle_c. \tag{14}$$

上式中 $\langle x^* \rangle_c$ 表示累积平均, 它可以按下式表示为 S_0 系统中的统计平均 $\langle x^* \rangle_0$:

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle_c &= \langle x \rangle_0 \\
 \langle xy \rangle_c &= \langle xy \rangle_0 - \langle x \rangle_0 \langle y \rangle_0 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

系统的自由能为

$$F = F_0 - \sum_{n=1}^{\infty} k_n/n! \tag{16}$$

在实际的计算中上式只能取有限项, 以 F_m 表示 F 的第 m 级近似, 则

$$F_m = F_0 - \sum_{n=1}^m k_n/n! \tag{17}$$

变分参数 J, K 由以下条件确定:

$$\frac{\partial F_m}{\partial J} = \frac{\partial F_m}{\partial K} = 0. \tag{18}$$

在变分累积展开方法中, 为了计算 $\langle L \rangle$, 要用到如下公式^[7]:

$$\langle L \rangle = \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n/n! \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}
 L_n &= \sum_{l=0}^n C_l^! (-1)^l \sum_{\lambda=0}^l C_l^! \left[J^{l-\lambda} \frac{\partial^{l-\lambda}}{\partial J^{l-\lambda}} \right] \\
 &\quad \cdot \left[K^\lambda \frac{\partial^\lambda}{\partial K^\lambda} \right] \langle LS^{n-l} \rangle_c.
 \end{aligned} \tag{20}$$

为计算方便, 引入如下图形标记:

$$\begin{aligned}
 \text{⊙} &= \cos \theta_{I_r} \\
 \text{⋄} &= \cos \theta_{I_\sigma} \\
 \square &= \cos \theta_{P_r} \\
 \text{◻} &= \cos \theta_{P_\sigma}
 \end{aligned} \tag{21}$$

$N_r = 1, 2, 3, \dots$ 时的 Polyakov 线 L 用图形分别表为

$$| \cdot | \cdot | \cdot | \dots \quad (22)$$

图中竖线两端的点表示 L 闭合; 用虚线表示类空键所满足的周期条件, 如 $N_\tau = 1$ 时,

$$\begin{aligned} &= \cos(\theta_{n,i} + \theta_{n+i,\tau} - \theta_{n+\tau,i} - \theta_{n,\tau}) \\ &= \cos(\theta_{n+i,\tau} - \theta_{n,\tau}) \end{aligned} \quad (23)$$

引入图形标记后, (20) 式中的 $\langle S^{-1}L \rangle_c$ 即可表为一些连接图形累积平均值之和. 在累积展开中有些图形结构相似, 其累积平均值相等, 这类等价图形的数目称为对称因子. 以 $L_{n,i}$ 表示 $\langle L \rangle$ 的第 n 级修正中第 i 个不等价连接图形, $\langle L_{n,i} \rangle_c$ 表示其累积平均值, $\alpha_{n,i}$ 表示相应的对称因子, 那么

$$\langle LS^{-1} \rangle_c = \sum_i \beta^n \alpha_{n,i} \langle L_{n,i} \rangle_c \quad (24)$$

我们的计算只作到累积展开的第二级修正, 下面给出计算 $\langle L \rangle$ 至第二级修正所需连接图形及其在 S_0 系统中的平均值.

$N_\tau = 3$ 时计算 $\langle L \rangle$ 之连接图 ($d+1$ 维)

n	i	$L_{n,i}$	$\alpha_{n,i}$	$\langle L_{n,i} \rangle_c$
0	1		1	ξ_1^3
1	1		$3 \times 2d$	$\frac{1}{2} (1 + \xi_2) \xi_1^3 \omega_1^2$
2	1		$3 \times 2d$	$\frac{1}{2} \xi_1^2 \left[\xi_1 + \frac{1}{2} \xi_2 \omega_2^2 (\xi_1 + \xi_3) \right]$
	2		$6 \times 2d(2d-1)$	$\frac{1}{4} (1 + \xi_2)^2 \xi_1^3 \omega_1^4$
	3		$3 \times 2d(2d-1)$	$\frac{1}{4} (\xi_3 + 3\xi_1) \xi_1^4 \omega_1^4$
	4		$6 \times 2d(2d-1)$	$\frac{1}{4} (1 + \xi_2)^2 \xi_1^3 \omega_1^4$
	5		$4 \times 2d$	$\frac{1}{8} (1 + \omega_2) (1 + \xi_2)^2 \omega_1^2 \xi_1^3$
	6		$2 \times 2d$	$\frac{1}{8} (1 + \omega_2) (1 + \xi_2)^2 \omega_1^2 \xi_1^3$
	7		$12 \times 2d(2d-2)$	$\frac{1}{4} (1 + \xi_2) (1 + \omega_2) \xi_1^3 \omega_1^4$

当 $N_r = 1$ 时,由(23)式可以看出,类时块中仅含有类时键变量,此时 S 退耦为一个 d 维自旋模型和一个 d 维的规范模型,即

$$S = S_1 + S_G \quad (25)$$

其中 S_G 仅含有类空键变量,相应于 d 维规范模型,它与 $d+1$ 维的有限温度下规范理论退禁闭相变无关;同这一相变相关的应为自旋模型 S_1 , S_1 仅含有类时键变量. 对于 $Z(2)$ 、 $Z(3)$ 、 $U(1)$ 群, S_1 分别相应于 d 维 Ising 模型,三态 Potts 模型和 XY 模型. $N_r = 1$ 时,变分参数 J, K 由两个独立的方程确定. 由于 S_G 不含类时键变量,为了研究它的相变,另取单位元格内能 E 作序参量

$$\begin{aligned} E &= 1 - \frac{1}{N_p} \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ &= 1 - \langle \cos \theta_p \rangle \end{aligned} \quad (26)$$

其具体计算同 $\langle L \rangle$ 的计算类似. 当 $N_r \geq 2$ 时,类空块与类时空相耦合,此时 J, K 需由方程组(18)决定.

3 结果及讨论

图1是阿贝尔规范理论在高温极限下 ($N_r = 1$) 序参量随 β 的变化行为. 图2—图4是其相图,具体的临界耦合 β_c . 则在表1—表4中给出.

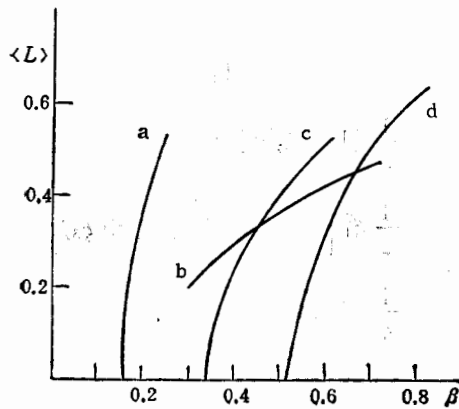


图1 高温极限下 $\langle L \rangle$ 随 β 的变化
a, b, c 各相应于 (3+1) 维 $Z(2)$ 、 $Z(3)$ 、 $U(1)$
d 相应于 (2+1) 维 $U(1)$. b 为一级相变.
a, c, d 表示二级相变

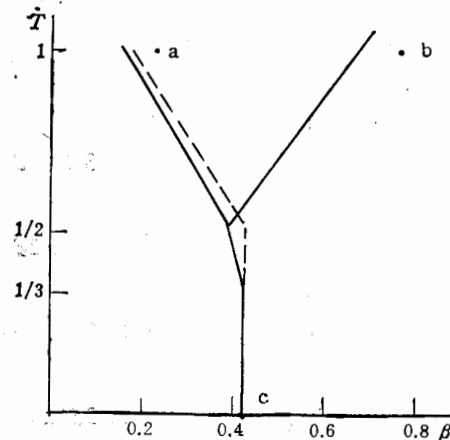


图2 (3+1) 维 $Z(2)$ 理论的相图
虚线是平均场结果^[1] a, b, c 是精确值^[1]

(1) $d = 3$. 对于 3+1 维 $Z(2)$ 、 $Z(3)$ 、 $U(1)$ 理论, 其序参量随 β 的变化行为显示在图1中. 从图中看出, 在小 β 区域 $\langle L \rangle = 0$, 在大 β 区 $\langle L \rangle$ 不等零, 说明系统存在两相. 对于 $Z(2)$ 和 $U(1)$ 理论, $\langle L \rangle$ 在 β_c 处是连续的, 显示出二级相变的特征; 对于 $Z(3)$ 理论, $\langle L \rangle$ 经过 β_c 时有明显的跳跃, 呈现了一级相变的特征. 这说明高温下 $Z(2)$ 、 $Z(3)$ 、 $U(1)$ 理论的确对应着三维的 Ising 模型、三态 Potts 模型和 XY 模型, 这正是文献[1]所预

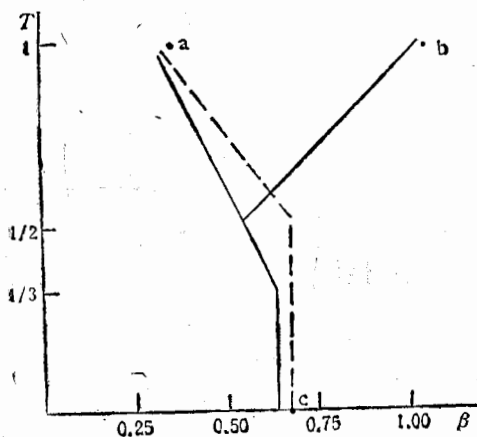


图 3 (3+1) 维 Z(3) 理论的相图
虚线是平均场结果^[5], a, b, c 是严格结果^[9]

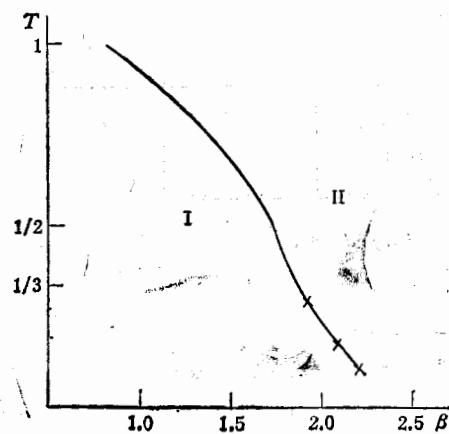


图 4 (2+1) 维 U(1) 理论相图

言的。

图 2、图 3 是 3+1 维的 Z(2)、Z(3) 理论的相图。可以看出，零温下，Z(2)、Z(3) 的相变点分别为 $\beta_c = 0.42, 0.64$ 。低温下相变点都位于 $\beta = \beta_c$ 的直线上，当 $T > \frac{1}{2}$ 时相变线分成两支：左支与自旋模型相应，它同 3+1 维规范理论退禁闭相变有关；右支则相应于三维规范模型，它与退禁闭相变无关。

表 1 3+1 维 Z(2) 有限温度理论临界耦合 β_c

N_c	本文结果	MC ^[8]	自对偶模型 ^[9]	平均场近似 ^[5]
1	0.17		0.22	0.20
2	0.38			0.43
3	0.42			0.43
∞	0.42	0.4407	0.4406	0.43

表 2 2+1 维 Z(2) 有限温度理论临界耦合 β_c

N_c	本文结果	MC ^[8]	自对偶模型 ^[9]
1	0.25	0.44	0.44068
2	0.52	0.66	
3	0.56		
∞		0.76	0.76

表 3 3+1 维 Z(3) 有限温度理论临界耦合 β_c

N_c	本文结果	MC ^[8]	自对偶模型 ^[9]	平均场近似 ^[5]
1	0.31		0.367	0.34
2	0.52			0.68
3	0.64			0.68
∞	0.64	0.67	0.6700	0.68

表4 2+1维 $U(1)$ 有限温度理论临界耦合 β_c

N_τ	1	2	3	4	6	8
本文结果	0.52	1.76	1.80			
MC ^[3]				1.83	2.08	2.14

(2) $d=2$. 对 2+1 维的情形, 为了简单仅作出了 $U(1)$ 的相图——图 4. 从图中看, 系统存在两相: 高温相 II 和低温相 I. 低温相是线性禁闭相; 然而应注意高温相并不是非禁闭相, 它是无质量的对数禁闭相^[1]. 我们仅计算了 $T=1, 1/2, 1/3$ 的情况, 而图中 $T=1/4, 1/6, 1/8$ 的数据取自文献的 MC 结果, 可以看出两组数据的变化趋势完全一致, 这也说明 VCE 方法的结果是可靠的. 在利用 VCE 方法进行逐级修正计算时, 高级修正中所包含的连接图形的数目很多, 数图及图形累积平均值的计算都相当繁冗, 不过方法上不存在难题.

参 考 文 献

- [1] B. Svetitsky and L. G. Yaffe, *Nucl. Phys.*, **B210**(1982) 423.
 [2] R. V. Gavai and K. Karsch, *Phys. Lett.*, **B125**(1983) 406. Gyan Bhanot, *Phys. Lett.*, **121B**(1983) 401.
 [3] Paul. D. Coddington et al., *Phys. Lett.*, **B175**(1986) 64.
 [4] V. Alessandrini and Ph. Boucaud, *Nucl. Phys.*, **B235**(1984)599.
 [5] E. Dagotto and A. Moreo, *Phys. Rev.*, **D32**(1985)1004.
 [6] C. M. Wu et al., *Phys. Lett.*, **B216**(1989)381; X. T. Zheng, Chung-I Tan and Chen Tianlun, *Phys. Rev.*, **D26**(1982)2843.
 [7] Chung-I Tan and X. T. Zheng, *Phys. Rev.*, **D39**(1989)623.
 [8] M. Creutz, L. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D20**(1979)1915.
 [9] C. Korthals Altes, *Nucl. Phys.*, **B142**(1978)315.
 [10] S. Wansleben and J. Zittartz, *Nucl. Phys.*, **B280**(1987)108.

The Phase Transitions in Abelian Lattice Gauge Theories at Finite Temperature: An Analytical Analysis

Liu Wensheng Cui Jianying Yang Jinmin Wan Lingde

(Department of physics, Henan Normal University, Xinxiang 453002)

Received on May 19, 1993

Abstract

We investigate the phase transitions of Abelian lattice gauge theories at finite temperature with the variational cumulant expansion. Our results are in good agreement with the exact results and the basic predictions made by Svetitsky and Yaffe.

Key words phase transition, variational cumulant expansion, abelian lattice gauge.