第18卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 2
1994年2月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Feb., 1994

超对称自对偶杨-Mills 模型的 Hamilton 约化

赵 柳
(西北大学现代物理所 西安 710069)

1992年7月28日收到

摘 要

本文研究了4维超对称自对偶杨-Mills 模型的 Hamilton 约化. 在左右对称的常约束下导出了4维超对称非阿贝尔 Toda 模型、相应的作用量以及线性系统. 在主阶化下的1阶约束条件下,得到了4维超对称 Toda 模型. 本文的约化对任意李超代数都成立,并不特别要求李超代数具有纯奇素根系.

关键词 超对称,自对偶,杨-Mills, Hamilton 约化,超 Toda 场.

1 引 言

建立经典及量子场论的非微扰理论是当今理论和数学物理学的主要奋斗目标之一. 在过去十年里,2维可积场论的研究取得了长足的进展,特别是关于无穷多守恒律、对称代数及其约化的研究,使得2维可积模型的构造、求解有了一套系统的、有规可循的办法,与此相联系的 Yang-Baxter 代数、量子群及 Dressing 对称性甚至还成了数学家们活跃的研究课题.

与2维可积系统的研究中所得的丰富成果相比较, 4维真实物理时空中可积场论的研究显得薄弱得多. 一个主要的困难在于,目前已知的4维可积模型很少,以至于我们不能从各种不同模型中总结出4维可积性的共性来. 与此同时, 我们又缺少一个系统地构造4维可积系的办法.

在文[1]中, 作者根据自对偶杨-Mills 模型的作用量与2维 WZNW 作用量的相似性,将熟知的2维共形 Hamilton 约化方法推广到4维情形, 从自对偶杨-Mills 模型约化出一批4维可积模型,特别是4维 Toda 模型. 在文[2]中, 我们又将自对偶杨-Mills 模型推广到超对称情形, 结果发现超对称自对偶杨-Mills 模型的作用量与2维超对称 WZNW 模型的作用量具有相似的形式. 本文的意图则是继[1]和[2]之后,讨论超对称自对偶杨-Mills 模型的 Hamilton 约化问题.

2 超对称自对偶杨-Mills 模型

我们先对自对偶杨-Mills 模型作一简单的描述。这一模型是在 4 维 $N=1$ 超空间中构造出来的。沿用文[2]中的约定，该空间中的超协变导数为

$$\begin{aligned}&\partial_\gamma,\quad \gamma = y,\bar{y},z,\bar{z},\ (\text{偶})\\ &D_\Gamma,\quad \Gamma = Y,\bar{Y},Z,\bar{Z},\ (\text{奇})\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 y、$\bar{y}$,z,$\bar{z}$ 就是通常的复数化欧氏时空中的光锥坐标，而 D_Γ 的定义为

$$\begin{aligned}&D_Y = \frac{\partial}{\partial\theta_y} + i\theta_z\partial_y,\quad D_{\bar{Y}} = \frac{\partial}{\partial\theta_{\bar{y}}} - i\theta_{\bar{z}}\partial_{\bar{y}},\\ &D_Z = \frac{\partial}{\partial\theta_z} + i\theta_y\partial_z,\quad D_{\bar{Z}} = \frac{\partial}{\partial\theta_{\bar{z}}} + i\theta_{\bar{y}}\partial_{\bar{z}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

这些奇协变导数满足以下反对易关系:

$$\begin{aligned}&[D_\Gamma,D_{\Gamma'}]_+ = 0,\ \text{当}\ (\Gamma\Gamma') \neq (YZ),\ (\bar{Y}\bar{Z}),\\ &[D_Y,D_Z]_+ = i(\partial_y + \partial_z),\ [D_{\bar{Y}},D_{\bar{Z}}]_+ = i(\partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{y}}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

我们将采用文 [2] 给出的 J 形式来描述超对称自对偶杨-Mills 模型。 在这一形式下，模型的运动方程为

$$D_{\bar{Y}}B_Y + D_{\bar{Z}}B_Z = 0,\ D_YB_{\bar{Y}} + D_ZB_{\bar{Z}} = 0, \tag{2.4}$$

其中，奇联络

$$B_Y = J^{-1}D_YJ,\ B_Z = J^{-1}D_ZJ,\ B_{\bar{Y}} = D_{\bar{Y}}JJ^{-1},\ B_{\bar{Z}} = D_{\bar{Z}}JJ^{-1}, \tag{2.5}$$

其中 J 为定义在超空间上的矩阵函数。

方程(2.4)可作为如下作用量的 Euler-Lagrange 方程得到，

$$I[J] = \int dzd\bar{z}d\theta_zd\theta_{\bar{z}}S_Y[J] + \int dyd\bar{y}d\theta_yd\theta_{\bar{y}}S_Z[J], \tag{2.6a}$$

其中 $S_Y[J]$ 与 $S_Z[J]$ 形式上与 2 维超 WZNW 作用量相同(但超对称含义不同[2])

$$\begin{aligned}S_Y[J] = \frac{\kappa}{2}\Big[&\int dyd\bar{y}d\theta_yd\theta_{\bar{y}}\langle J^{-1}D_{\bar{Y}}JJ^{-1}D_YJ\rangle\\ &+ \int dyd\bar{y}d\theta_yd\theta_{\bar{y}}dt\langle J^{-1}\partial_tJ[J^{-1}D_{\bar{Y}}JJ^{-1}D_YJ]_+\rangle\Big],\end{aligned} \tag{2.6b}$$

$$S_Z[J] = S_Y[J]\text{with } Y\longleftrightarrow Z,\ \bar{Y}\longleftrightarrow\bar{Z},\ y\longleftrightarrow z,\ \bar{y}\longleftrightarrow\bar{z}. \tag{2.6c}$$

在本文中，我们将不考虑模型自身可能对 J 的取值提出的物理限制，而认为 J 取值在某个超李群上。这时 (2.6b—c) 中的$\langle,\rangle$就是相应超李代数的超 Killing 型。

根据超 WZNW 作用量熟知的特性

$$S[JK] = S[J] + S[K] + \kappa\int d^2xd^2\theta\langle J^{-1}DJ\bar{D}KK^{-1}\rangle, \tag{2.7}$$

可以立即得出超自对偶杨-Mills 作用量的相应等式，

$$\begin{aligned}I[JK] = &I[J] + I[K]\\ &+ \kappa\int dyd\bar{y}dzd\bar{z}d\theta_yd\theta_{\bar{y}}d\theta_zd\theta_{\bar{z}}\langle J^{-1}D_YJD_{\bar{Y}}KK^{-1} + J^{-1}D_ZJD_{\bar{Z}}KK^{-1}\rangle.\end{aligned} \tag{2.8}$$

这一公式在后文处理 Hamilton 约化的手征规范实现时将要用到。

在本节最后，我们将给出超对称自对偶杨-Mills 方程的线性系．在 J 形式下，它们写为[2]

$$\begin{cases} D_{\bar{Z}}\Psi = \lambda(D_Y + J^{-1}D_Y J)\Psi, \\ D_{\bar{Y}}\Psi = -\lambda(D_Z + J^{-1}D_Z J)\Psi, \end{cases} \tag{2.9}$$

和

$$\begin{cases} D_Z\bar{\Psi} = -\dfrac{1}{\lambda}[D_{\bar{Y}} - D_{\bar{Y}}JJ^{-1}]\bar{\Psi}, \\ D_Y\bar{\Psi} = \dfrac{1}{\lambda}[D_{\bar{Z}} - D_{\bar{Z}}JJ^{-1}]\bar{\Psi}. \end{cases} \tag{2.10}$$

这一对线性系统的自治性条件分别给出(2.4)中前后两个运动方程．

3　左右对称的常约束

现在我们考虑模型(2.4)的 Hamilton 约化问题． 和通常的 2 维 WZNW 与 4 维自对偶杨-Mills 模型的约化[3,1]相似，我们首先要在超李代数的整数阶化下引入适当的约束条件．为简单起见，我们将只考虑左右对称的常约束的情形．非对称及非常数的约束也是允许的(在 2 维 WZNW 模型中，这类约束已在文[4]和[5]中研究过)，但本文不去讨论它们．

设 $\mathscr{G}$ 为场 J 所取值的超李群的超李代数．给定 $\mathscr{G}$ 的一个整数阶化，

$$\mathscr{G} = \bigoplus_{n=-m}^{m} \mathscr{G}^n, \tag{3.1}$$

我们用 $\mathscr{G}_d(\mathscr{G}_{-d})$ 来表示由阶数 $\geqslant d(\leqslant -d)$ 的元素构成的子代数，它们显然都是幂零的，

$$\mathscr{G}_d = \bigoplus_{n\geqslant d} \mathscr{G}^n,\ \mathscr{G}_{-d} = \bigoplus_{n\leqslant -d} \mathscr{G}^n. \tag{3.2}$$

代数 $\mathscr{G}$ 可以作如下的线性空间分解，

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_{-d} \oplus \mathscr{G}_{(-d,d)} \oplus \mathscr{G}_d, \tag{3.3}$$

其中

$$\mathscr{G}_{(-d,d)} = \bigoplus_{n=-d+1}^{d-1} \mathscr{G}^n, \tag{3.4}$$

它一般不构成一个子代数．注意在李超代数 $\mathscr{G}$ 中一旦引入超 Killing 型，那么 $\mathscr{G}_{(-d,d)}$ 与 $\mathscr{G}_{-d}\oplus\mathscr{G}_d$ 将是正交的，而且 $\mathscr{G}_d$ 与 $\mathscr{G}_{-d}$ 分别是自正交的．

根据在 2 维情形积累的经验，为使 Hamilton 约化得以进行，引入的约束必须是正规的．李超代数中一个 d 阶正规元素 U 是指满足如下条件的元素，

$$\mathrm{Ker}(adU) \cap \mathscr{G}_d = \{0\},\ U \in \mathscr{G}^{-d}. \tag{3.5}$$

其中 ad 表示超伴随作用，$adU \cdot W \equiv [U,W]_s$，$s = +,-$．我们将假定在所考虑的情形下，正规元素是存在的．

在 $\mathscr{G}^{\pm d}$ 中各选两个正规奇元素

$$U,V \in \mathscr{G}^{-d},\ \bar{U},\bar{V} \in \mathscr{G}^{d}, \tag{3.6a}$$

$$U = \sum u^b E_b^{-d} + \sum u^f E_f^{-d},\ V = \sum v^b E_b^{-d} + \sum v^f E_f^{-d}, \tag{3.6b}$$

$$\bar{U} = \sum \bar{u}^b E_b^{d} + \sum \bar{u}^f E_f^{d},\ \bar{V} = \sum \bar{v}^b E_b^{d} + \sum \bar{v}^f E_f^{d}, \tag{3.6c}$$

其中 $E_b^{\pm d}$ 表示 $\mathscr{G}^{\pm d}$ 中的偶基底，$E_f^{\pm d}$ 表示 $\mathscr{G}^{\pm d}$ 中的奇基底，u^b, $\bar{u}^b$, v^b, $\bar{v}^b$ 为任意奇 Grassman 常数，u^f, $\bar{u}^f$, v^f, $\bar{v}^f$ 为任意偶 Grassman 常数，式中求和要使得 $U,V,\bar{U},\bar{V}$ 均为正规元素.

根据以上约定，我们将超对称自对偶杨-Mills 方程中的奇联络 $B_Y,B_Z,B_{\bar{Y}}$, $B_{\bar{Z}}$ 约束为

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{G}_d, B_Y - U\rangle = \langle \mathscr{G}_d, B_Z - V\rangle = 0,\\ \langle \mathscr{G}_{-d}, B_{\bar{Y}} - \bar{U}\rangle = \langle \mathscr{G}_{-d}, B_{\bar{Z}} - \bar{V}\rangle = 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

这组约束与文[1]对通常的自对偶杨-Mills 方程引入的约束完全平行. 同时，与 2 维中对超 WZNW 进行约化的情形比较，我们并不特别要求超李代数 $\mathscr{G}$ 具有一个纯粹的奇素根系[6]. 这一改善来源于奇参数 u^b, $\bar{u}^b$, v^b, $\bar{v}^b$ 的引入. 实际上这种讨论完全可以转移到 2 维情形去.

4 约化的实现

现在我们来看如何根据约束(3.7)来实现对模型(2.4)的约化. 根据(3.3)式，可以将群元 J 在单位元附近写为

$$J = J_< J_= J_>,\ J_< \in \exp(\mathscr{G}_{-d}),\ J_= \in \exp(\mathscr{G}_{(-d,d)}),\ J_> \in \exp(\mathscr{G}_d). \tag{4.1}$$

(4.1)代入(2.5)，我们有

$$B_Y = J_>^{-1}\mathrm{D}_Y J_> + J_>^{-1}J_=^{-1}\mathrm{D}_Y J_= J_> + J_>^{-1}J_=^{-1}J_<^{-1}\mathrm{D}_Y J_< J_= J_>, \tag{4.2a}$$

$$B_{\bar{Y}} = \mathrm{D}_{\bar{Y}} J_< J_<^{-1} + J_< \mathrm{D}_{\bar{Y}} J_= J_=^{-1} J_<^{-1} + J_< J_= \mathrm{D}_{\bar{Y}} J_> J_>^{-1} J_=^{-1} J_<^{-1}, \tag{4.2b}$$

以及相应于 $B_Z,B_{\bar{Z}}$ 的两个类似等式.

以 $B_{\bar{Y}}$ 为例. 据 $\mathscr{G}$ 的阶化分解，(4.2b)中前两项中不含阶 $\geqslant d$ 的分量. 因此，(4.2b)代入(3.7)的结果为

$$(J_< J_= \mathrm{D}_{\bar{Y}} J_> J_>^{-1} J_=^{-1} J_<^{-1})^{\geqslant d} = \bar{U}. \tag{4.3}$$

采用类似于文[7]的归纳过程，可以证明

$$\mathrm{D}_{\bar{Y}} J_> J_>^{-1} = J_=^{-1} \bar{U} J_=. \tag{4.4a}$$

类似可得

$$\mathrm{D}_{\bar{Z}} J_> J_>^{-1} = J_=^{-1} \bar{V} J_=, \tag{4.4b}$$

$$J_<^{-1}\mathrm{D}_Y J_< = J_= U J_=^{-1}, \tag{4.4c}$$

$$J_<^{-1}\mathrm{D}_Z J_< = J_= V J_=^{-1}. \tag{4.4d}$$

另一方面，将(4.1)代入(2.4)，并分别用 $J_>$ 和 $J_<^{-1}$ 作共轭变换，我们有

$$\begin{aligned}&D_{\bar{Y}}(J_> B_Y J_>^{-1}) - [\mathrm{D}_{\bar{Y}} J_> J_>^{-1}, J_> B_Y J_>^{-1}]_+\\ &\quad + \mathrm{D}_{\bar{Z}}(J_> B_Z J_>^{-1}) - [\mathrm{D}_{\bar{Z}} J_> J_>^{-1}, J_> B_Z J_>^{-1}]_+ = 0,\end{aligned} \tag{4.5a}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}_Y(J_<^{-1} B_{\bar{Y}} J_<) + [J_<^{-1}\mathrm{D}_Y J_<, J_<^{-1} B_{\bar{Y}} J_<]_+\\ &\quad + \mathrm{D}_Z(J_<^{-1} B_{\bar{Z}} J_<) + [J_<^{-1}\mathrm{D}_Z J_<, J_<^{-1} B_{\bar{Z}} J_<]_+ = 0.\end{aligned} \tag{4.5b}$$

将(4.2)和(4.4)代入 (4.5a—b)，则结果在 $\mathscr{G}_{(-d,d)}$ 上的投影为

$$\begin{aligned}&D_{\bar{Y}}(J_=^{-1}D_Y J_=) + D_{\bar{Z}}(J_=^{-1}D_Z J_=) - [J_=^{-1}\bar{U}J_=, U]_+ - [J_=^{-1}\bar{V}J_=, V]_+ = 0\\&D_Y(D_{\bar{Y}}J_= J_=^{-1}) + D_Z(D_{\bar{Z}}J_= J_=^{-1}) + [J_= U J_=^{-1}, \bar{U}]_+ + [J_= V J_=^{-1}\bar{V}]_+ = 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

这两个方程正是文[1]中得出的 4 维非阿贝尔 Toda 模型的超对称形式．应该指出，这种模型的 2 维形式至今尚未见到．应用与本文类似的约束，可以容易地从 2 维超对称 WZNW 模型约化出相应的 2 维超对称非阿贝尔 Toda 模型．这是本文引入的约束的一个优点．

5　等效的手征规范理论

与通常的 2 维[3]及 4 维[1]中的 Hamilton 约化一样，4 维超对称自对偶杨-Mills 模型的 Hamilton 约化也可以用等效的手征规范理论来实现．重复应用公式(2.8)，不难证明如下的规范化作用量

$$\begin{aligned}I_{\text{gauged}}[J, A_Y, A_Z, A_{\bar{Y}}, A_{\bar{Z}}] = I[J] + \kappa \int & dy d\bar{y} dz d\bar{z} d\theta_y d\theta_{\bar{y}} d\theta_z d\theta_{\bar{z}}\\ \cdot \langle & A_Y D_{\bar{Y}} J J^{-1} + A_Z D_{\bar{Z}} J J^{-1} + A_{\bar{Y}} J^{-1} D_Y J + A_{\bar{Z}} J^{-1} D_Z J\\ &+ A_Y J A_{\bar{Y}} J^{-1} + A_Z J A_{\bar{Z}} J^{-1} - A_Y \bar{U} - A_Z \bar{V} - A_{\bar{Y}} U - A_{\bar{Z}} V\rangle\end{aligned} \tag{5.1}$$

是规范不变的，式中，$A_Y, A_Z \in \exp(\mathscr{G}_{-d}), A_{\bar{Y}}, A_{\bar{Z}} \in \exp(\mathscr{G}_d)$ 是 Grassman 奇规范场，相应的规范变换为

$$\begin{aligned}&J \to \alpha J, \alpha \in \exp(\mathscr{G}_{-d}); \quad J \to J\beta^{-1}, \beta \in \exp(\mathscr{G}_d);\\&A_Y \to \alpha A_Y \alpha^{-1} + \alpha D_Y \alpha^{-1}, \quad A_{\bar{Y}} \to \beta A_{\bar{Y}} \beta^{-1} + D_{\bar{Y}}\beta\beta^{-1},\\&A_Z \to \alpha A_Z \alpha^{-1} + \alpha D_Z \alpha^{-1}, \quad A_{\bar{Z}} \to \beta A_{\bar{Z}} \beta^{-1} + D_{\bar{Z}}\beta\beta^{-1}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

相应于(5.1)式的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{aligned}&D_Y(D_{\bar{Y}}JJ^{-1} + JA_{\bar{Y}}J^{-1}) + [A_Y, D_{\bar{Y}}JJ^{-1} + JA_{\bar{Y}}J^{-1}]_+ - D_{\bar{Y}}A_Y\\&\quad + D_Z(D_{\bar{Z}}JJ^{-1} + JA_{\bar{Z}}J^{-1}) + [A_Z, D_{\bar{Z}}JJ^{-1} + JA_{\bar{Z}}J^{-1}]_+ - D_{\bar{Z}}A_Z = 0,\end{aligned} \tag{5.3a}$$

$$\begin{aligned}&D_{\bar{Y}}(J^{-1}D_Y J + J^{-1}A_Y J) - [J^{-1}D_Y J + J^{-1}A_Y J, A_{\bar{Y}}]_+ - D_Y A_{\bar{Y}}\\&\quad + D_{\bar{Z}}(J^{-1}D_Z J + J^{-1}A_Z J) - [J^{-1}D_Z J + J^{-1}A_Z J, A_{\bar{Z}}]_+ - D_Z A_{\bar{Z}} = 0,\end{aligned} \tag{5.3b}$$

$$\langle \mathscr{G}_{-d}, D_{\bar{Y}}JJ^{-1} + JA_{\bar{Y}}J^{-1} - \bar{U}\rangle = 0, \tag{5.3c}$$

$$\langle \mathscr{G}_{-d}, D_{\bar{Z}}JJ^{-1} + JA_{\bar{Z}}J^{-1} - \bar{V}\rangle = 0, \tag{5.3d}$$

$$\langle \mathscr{G}_{d}, J^{-1}D_Y J + J^{-1}A_Y J - U\rangle = 0, \tag{5.3e}$$

$$\langle \mathscr{G}_{d}, J^{-1}D_Z J + J^{-1}A_Z J - V\rangle = 0. \tag{5.3f}$$

选定规范条件 $A_Y = A_Z = A_{\bar{Y}} = A_{\bar{Z}} = 0$，(5.3) 就退化为运动方程 (2.4) 与约束条件 (3.7)．除上述规范外，还可以选规范条件为

$$J = J_=, \tag{5.4}$$

在这一规范中 (5.3c—f) 给出

$$\begin{aligned}&A_{\bar{Y}} = J_=^{-1}\bar{U}J_=, \quad A_{\bar{Z}} = J_=^{-1}\bar{V}J_=,\\&A_Y = J_= U J_=^{-1}, \quad A_Z = J_= V J_=^{-1}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

将(5.4)、(5.5)代入 (5.3a—b)，就得到方程(4.6)．将(5.4)、(5.5)代入(5.1)，还可得到 4

维非阿贝尔超对称 Toda 模型的有效作用量

$$I_{\text{eff}}[J_{=}] = I[J_{=}] - \kappa \int \mathrm{d}y\mathrm{d}\bar{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}\theta_y\mathrm{d}\theta_{\bar{y}}\mathrm{d}\theta_z\mathrm{d}\theta_{\bar{z}} \cdot \langle J_{=}^{-1}\bar{U}J_{=}U + J_{=}^{-1}\bar{V}J_{=}V\rangle, \tag{5.6}$$

式中 $I[J_{=}]$ 就是将(2.6)中的 J 换成 $J_{=}$所得的作用量.

6 线 性 系 统

在本节中,我们将从超对称自对偶杨-Mills 模型的线性系统(2.9)与(2.10)约化出方程(4.6)的线性系统. 利用(4.1)式,定义

$$T = J_{>}\Psi, \ \bar{T} = J_{<}^{-1}\Psi, \tag{6.1}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\bar{Z}}T &= \mathrm{D}_{\bar{Z}}(J_{>}\Psi) = (\mathrm{D}_{\bar{Z}}J_{>}J_{>}^{-1})(J_{>}\Psi) + J_{>}\mathrm{D}_{\bar{Z}}\Psi \\
&= (\mathrm{D}_{\bar{Z}}J_{>}J_{>}^{-1})(J_{>}\Psi) + \lambda J_{>}(\mathrm{D}_Y + J^{-1}\mathrm{D}_Y J)\Psi \\
&= (\mathrm{D}_{\bar{Z}}J_{>}J_{>}^{-1})(J_{>}\Psi) + \lambda[\mathrm{D}_Y(J_{>}\Psi) - (\mathrm{D}_Y J_{>}J_{>}^{-1})(J_{>}\Psi) \\
&\quad + J_{>}(J^{-1}\mathrm{D}_Y J)J_{>}^{-1}(J_{>}\Psi)] \\
&= [J_{=}^{-1}\bar{V}J_{=} + \lambda(\mathrm{D}_Y + J_{=}^{-1}\mathrm{D}_Y J_{=} + U)]T,
\end{aligned} \tag{6.2}$$

式中我们利用了(4.2)和(4.4)式. 用这种方法,可将(2.9)和(2.10)化为

$$\begin{cases}
\mathrm{D}_{\bar{Z}}T = [J_{=}^{-1}\bar{V}J_{=} + \lambda(\mathrm{D}_Y + J_{=}^{-1}\mathrm{D}_Y J_{=} + U)]T, \\
\mathrm{D}_{\bar{Y}}T = [J_{=}^{-1}\bar{U}J_{=} - \lambda(\mathrm{D}_Z + J_{=}^{-1}\mathrm{D}_Z J_{=} + V)]T;
\end{cases} \tag{6.3}$$

$$\begin{cases}
\mathrm{D}_Z\bar{T} = -[J_{=}VJ_{=}^{-1} + \dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{D}_{\bar{Y}} - \mathrm{D}_{\bar{Y}}J_{=}J_{=}^{-1} - \bar{U})]\bar{T}, \\
\mathrm{D}_Y\bar{T} = -[J_{=}UJ_{=}^{-1} - \dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{D}_{\bar{Z}} - \mathrm{D}_{\bar{Z}}J_{=}J_{=}^{-1} - \bar{V})]\bar{T}.
\end{cases} \tag{6.4}$$

(6.3)与(6.4)就是(4.6)相应的线性系统.

注意在(6.3)与(6.4)式中出现的谱参数是从约化前的超对称自对偶杨-Mills 模型遗传下来的,而在[2]中,我们已经知道,谱参数 λ 实际上是相应于超对称自对偶杨-Mills 模型的超平面的一个参数. 因此,和 2 维超对称模型不同, 4 维超对称线性系中的谱具有直接的几何意义,但它并不意味着对称群的扩张(在 2 维情形, 线性系中出现谱参数常常意味着对称群从有限李群扩展为 loop 群). 这一点也与通常的自对偶杨-Mills 模型的情形相似[1].

7 主阶化的情形: $d=1$ 的约束

到目前为止,我们一直在讨论李超代数 $\mathscr{G}$ 的任一整数阶化下任意 d 阶常约束所导致的约化. 为使读者对上述抽象的约化有一直观的印象, 我们现在考虑一个特殊情形: 主阶化下的 1 阶约束, 在这一具体情形下,对所有李超代数 $\mathscr{G}$, 正规元素均存在,这些元素就是素根根矢的超线性组合,

$$
\begin{aligned}
U &= \sum u^b F_b + \sum u^f F_f, \quad V = \sum v^b F_b + \sum v^f F_f, \\
\bar{U} &= \sum \bar{u}^b E_b + \sum \bar{u}^f E_f, \quad \bar{V} = \sum \bar{v}^b E_b + \sum \bar{v}^f E_f,
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

式中各系数与 (3.6b—c) 中相同，E_b，E_f 分别为偶、奇素根根矢量，F_b，F_f 为它们在 Cartan 对合下的象.

在主阶化且 $d=1$ 情形下,(3.3)就变成了通常的 Cartan 分解，相应地(4.1)中 J_∞ 将取值在超李群 G 的 Cartan 子群上. 引入参数化

$$
J_\infty = \exp(-\Phi) \equiv \exp(-\sum \Phi^a H_a), \tag{7.2}
$$

其中 Φ^a 为超标量场,则方程(4.6)变为

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{D_Y D_{\bar{Y}}} + \mathrm{D_Z D_{\bar{Z}}})\Phi &+ \sum_{\alpha_b \mathrm{even}} [\bar{u}^b u^b + \bar{v}^b v^b] \exp(\alpha_b \cdot \Phi) H_{\alpha_b} \\
&+ \sum_{\alpha_f \mathrm{odd}} [\bar{u}^f u^f + \bar{v}^f v^f] \exp(\alpha_f \cdot \Phi) H_{\alpha_f} = 0,
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

这正是 4 维超对称 Toda 模型. 利用第五、六节的步骤,容易得到 (7.3) 相应的有效作用量与线性系统.

作用量为

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{Toda_s}}[\Phi] = \kappa \int & \mathrm{d}y\mathrm{d}\bar{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}\theta_y \mathrm{d}\theta_{\bar{y}} \mathrm{d}\theta_z \mathrm{d}\theta_{\bar{z}} \Bigg[\sum_{\alpha_b \mathrm{even}} (\mathrm{D_Y}\Phi^{\alpha_b}\mathrm{D_{\bar{Y}}}\Phi^{\alpha_b} + \mathrm{D_Z}\Phi^{\alpha_b}\mathrm{D_{\bar{Z}}}\Phi^{\alpha_b} \\
& - (\bar{u}^b u^b + \bar{v}^b v^b)\exp(\alpha_b \cdot \Phi)) \\
& + \sum_{\alpha_f \mathrm{odd}} (\mathrm{D_Y}\Phi^{\alpha_f}\mathrm{D_{\bar{Y}}}\Phi^{\alpha_f} + \mathrm{D_Z}\Phi^{\alpha_f}\mathrm{D_{\bar{Z}}}\Phi^{\alpha_f} - (\bar{u}^f u^f + \bar{v}^f v^f)\exp(\alpha_f \cdot \Phi)) \Bigg].
\end{aligned}
$$

线性系为

$$
\begin{cases}
\mathrm{D_{\bar{Z}}} T = [\exp(ad\Phi)\bar{V} + \lambda(\mathrm{D_Y} - \mathrm{D_Y}\Phi + U)]T, \\
\mathrm{D_{\bar{Y}}} T = [\exp(ad\Phi)\bar{U} - \lambda(\mathrm{D_Z} - \mathrm{D_Z}\Phi + V)]T;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\mathrm{D_Z}\bar{T} = -\left[\exp(-ad\Phi)V + \dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{D_{\bar{Y}}} + \mathrm{D_{\bar{Y}}}\Phi - \bar{U})\right]\bar{T}, \\
\mathrm{D_Y}\bar{T} = -\left[\exp(-ad\Phi)U - \dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{D_{\bar{Z}}} + \mathrm{D_{\bar{Z}}}\Phi - \bar{V})\right]\bar{T}.
\end{cases}
$$

这些结果与通常的自对偶杨-Mills 模型的 Hamilton 约化中相应结果完全平行.

8 结　论

本文将文[1]中提出的 4 维自对偶杨-Mills 模型的 Hamilton 约化推广到文 [2] 的超对称模型上,约化的结果得到了 4 维(非阿贝尔) Toda 模型,相应的作用量、线性系统也同时得到. 所有讨论均与非超对称情形相平行.

值得注意的是,本文的约束并不要求相应的李超代数具有纯奇素根系,这是对 2 维情形相应工作的一个改善.

参考文献

[1] B. Y. Hou and L. Chao, Hamiltonian reductions of self-dual Yang-Mills theory, *Phys. Lett.*, **B298**(1993) 103.

[2] L. Chao, Supersymmetric self-dual Yang-Mills model, NWU-IMP-920724.

[3] J. Balog, L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Forgacs and A. Wipf, *Phys. Lett.*, **B227** (1989), 214; *Ann. Phys.*, **203**(1991) 76; L. O'Raifeartaigh and A. Wipf, DIAS-STP-90-19; L. O'Raifeartaigh, DIAS-STP-90-43, DIAS-STP-90-45; L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, DIAS-STP-91-03; L. Feher, L. O'Raifeartaigh. P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, DIAS-STP-91-17, DIAS-STP-91-29; L. Feher, DIAS-STP-91-22; B. Y. Hou and L. Chao, NWU-IMP-911115, 911117, 920327.

[4] M. Bershadsky and O. Ooguri, CMP(1990); M. Bershadsky, IASSNS-HEP-90/44 (CMP 1991).

[5] B. Y. Hou and L. Chao, NWU-IMP-priprint, Sincia (in press).

[6] T. Inami, KUNS 1038, HE(TH)90/14.

Hamiltonian Reductions of Supersymmetric Self-Dual Yang-Mills Fields

Zhao Liu

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian* 710069)

Received on July 28, 1992

Abstract

The Hamiltonian reductions of supersymmetric self-dual Yang-Mills theory are analysed. Under the left-right dual constant constraints, this theory is reduced to the four dimensional supersymmetric nonabelian Toda model. The corresponding action and linear systems are also obtained as the result of Hamiltonian reductions. In the case of first order constraints under the principal gradation of the underlying Lie superalgebra, the reduced theory is shown to be the four dimensional supersymmetric Toda model. The reduction procedure apply to any Lie superalgebra without requiring a purely odd simple root system.

Key Words Supersymmetry, Self-dual, Yang-Mills, Hamiltonian reduction, Super Toda field.