第18卷 第3期　　高能物理与核物理　　Vol. 18, No. 3
1994年3月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1994

带有质量的 Wilson 费米子的格点 Schwinger 模型中 M_v 对 m 的变化率的计算*

江俊勤　　许国材
(广东教育学院物理系,广州 510303)

陈启洲
(中山大学物理系,广州 510275)

1992年12月15日收到

摘　　要

用变分法计算带有质量的 Wilson 费米子的格点 Schwinger 模型中矢量介子的质量 M_v,从而求出 M_v 对费米子质量 m 的变化率 $\partial M_v/\partial m(m=0$ 处),结果与连续理论的准确解十分接近.

关键词　格点,Schwinger 模型,有质量的 Wilson 费米子,质量变化率.

1 引　言

近年来,我们用变分法计算了带无质量 ($m=0$) 的费米子的格点 Schwinger 模型中手征对称自发破缺序参数 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 及矢量介子的质量 M_v,取得了较好结果[1-7]. 本文在以前工作的基础上,进一步考虑 $m\neq 0$ 的情况,有质量 ($m\neq 0$) 的 Schwinger 模型不是准确可解模型,$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 及 M_v 对 m 的变化规律是复杂的,但在 $m=0$ 处,M_v 对 m 的变化率 $\partial M_v/\partial m$ 却是有准确解的[8]. 本文用变分法计算了 M_v 随 m 的变化规律,从而求出矢量介子质量 M_v 对费米子质量 m 的变化率 $\partial M_v/\partial m$ ($m=0$ 点处),取得了与准确值 ($e^{\gamma}=1.78$) 十分接近,而且有良好的标度行为,以及几乎不依赖于 Wilson 参数 r 的重要结果.

带有质量的 Wilson 费米子的 Schwinger 模型的哈密顿量为[2]

$$H=\frac{g^2}{2a}\sum_x E_j^2(x)+\frac{1}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k)$$

* 中山大学高等学术中心和国家自然科学基金资助.

$$+m\sum_{x}\bar{\phi}(x)\phi(x)+\frac{r}{2a}\sum_{x,k}[\bar{\phi}(x)\phi(x)-\bar{\phi}(x)U(x,k)\phi(x+k)]. \tag{1}$$

其中 $E_j(x)$ 为 $U(1)$ 规范群的生成元，$U(x,k)$ 为点阵 x 在 k 方向的规范链变量，$k=\pm 1$，$j=1$，$\gamma_{-k}=-\gamma_k$ 为泡利矩阵:

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \gamma_5=i\gamma_0\gamma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

a、r，m 分别为格距，Wilson 参数，fermion 质量，$g=ea$ 为无量纲的裸耦合常数，e 为带质量量纲的裸耦合常数。二分量旋量场 $\phi(x)$ 表示为:

$$\phi(x)=\begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta^{\dagger}(x)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

裸真空定义为 $\xi(x)|0\rangle=\eta(x)|0\rangle=E_1(x)|0\rangle=0$.

取带有质量的费米子的规范场系统的物理真空态 $|\Omega\rangle$:[2]

$$|\Omega\rangle=e^{i\theta_1 s_1+i\theta_2 s_2}|0\rangle. \tag{4}$$

其中，

$$s_1=i\sum_{x,k}\phi^{\dagger}(x)\gamma_k U(x,k)\phi(x+k),$$

$$s_2=i\sum_{x,k}\phi^{\dagger}(x)\gamma_k U(x,2k)\phi(x+2k). \tag{5}$$

θ_1，θ_2 为独立变分参数，利用真空能量

$$\varepsilon_{\Omega}=\frac{a}{N_l}\langle\Omega|H|\Omega\rangle, \tag{6}$$

N_l 为总格点数。

取极小值的条件

$$\frac{\partial\varepsilon_{\Omega}}{\partial\theta_1}=0,\quad \frac{\partial\varepsilon_{\Omega}}{\partial\theta_2}=0. \tag{7}$$

可以确定 θ_1，θ_2 对 $1/g^2$，r 和 m 的依赖关系。

为计算 $\partial M_v/\partial m(m=0$ 处)，引入介子波函数:

$$|V\rangle=\Big[A\sum_{x,k}\phi(x)\gamma_1 U(x,k)\phi(x+k)+B\sum_{x,k}\bar{\phi}(x)\gamma_1 U(x,2k)\phi(x+2k)+C\sum_{x}\bar{\phi}(x)\gamma_1\phi(x)\Big]|\Omega\rangle. \tag{8}$$

A，B，C 为变分参数，这里同时考虑了 0、1、2 链波函数，比文献 [5] 多了 2 链波函数。

利用矢量介子质量

$$M_v=\frac{\langle V|H|V\rangle}{\langle V|V\rangle}-\frac{\langle\Omega|H|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle}, \tag{9}$$

取极小值的条件

$$\frac{\partial M_v}{\partial A}=0,\ \frac{\partial M_v}{\partial B}=0,\ \frac{\partial M_v}{\partial C}=0. \tag{10}$$

可以确定 M_v 所满足的久期方程。解方程求出 M_v 对 m、r 和 $1/g^2$ 的关系，从而求出 $m=0$ 处 $\partial M_v/\partial m$ 对 $1/g^2$ 和 r 的关系。

2 变分计算

把(1)式和(4)式代入(6)式，经计算得:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{1}{2} g^2\tilde{A}_1 - \frac{1}{2}\tilde{A}_2 - (r+ma)\tilde{A}_3 + \frac{r}{2}\tilde{A}_4. \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 = & \frac{1}{2}(2\theta_1)^2 - \frac{1}{4}(2\theta_1)^4 + \frac{5}{144}(2\theta_1)^6 \\
& + (2\theta_2)^2 - \frac{1}{2}(2\theta_2)^4 + \frac{5}{72}(2\theta_2)^6, \\
\tilde{A}_2 = & 2(2\theta_1) - 2(2\theta_1)(2\theta_2)^2 - (2\theta_1)^3 + \frac{1}{2}(2\theta_1)(2\theta_2)^4 \\
& + \frac{5}{6}(2\theta_1)^3(2\theta_2)^2 + \frac{1}{6}(2\theta_1)^5, \\
\tilde{A}_3 = & 1 - (2\theta_1)^2 - (2\theta_2)^2 + (2\theta_1)^2(2\theta_2)^2 + \frac{1}{4}(2\theta_1)^4 \\
& + \frac{1}{4}(2\theta_2)^4 - \frac{1}{36}(2\theta_1)^6 - \frac{1}{36}(2\theta_2)^6 \\
& - \frac{1}{4}(2\theta_1)^2(2\theta_2)^4 - \frac{5}{24}(2\theta_1)^4(2\theta_2)^2, \\
\tilde{A}_4 = & -2(2\theta_1)(2\theta_2) + (2\theta_1)(2\theta_2)^3 + \frac{2}{3}(2\theta_1)^3(2\theta_2) \\
& - \frac{1}{6}(2\theta_1)(2\theta_2)^5 - \frac{1}{3}(2\theta_1)^3(2\theta_2)^3 \\
& + \frac{1}{12}(2\theta_1)^5(2\theta_2).
\end{aligned}$$

从(7)式可求得 θ_1, θ_2 依赖于 $1/g^2$，r 和 ma 的值:

$$\theta_i = \theta_i(1/g^2,\ r,\ ma),\ (i=1,\ 2). \tag{12}$$

把(1)式和(8)式代入(9)式经计算得:

$$\begin{aligned}
a\cdot M_v = & 2D_0 + 8\Big[D_1(A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4) \\
& + D_2\left(A_0A_2 + \frac{1}{2}A_1^2 + A_1A_3 + A_2A_4\right) \\
& + D_3(A_0A_3 + A_1A_2 + A_1A_4) \\
& + D_4\left(A_0A_4 + A_1A_3 + \frac{1}{2}A_2^2\right)\Big]\Big/ F \\
& + g^2\Big\{A_1^2 + 2A_2^2 + 3A_3^2 + 4A_4^2 \\
& - (2\theta_1)^2\left[\frac{1}{2}A_0^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2\right]\Big\}\Big/ F.
\end{aligned} \tag{13}$$

其中，$F = A_0^2 + 2(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2)$,

$$D_0 = (2\theta_1)\left[1 - \frac{1}{2}(2\theta_1)^2\right][1 - (2\theta_2)^2]$$

$$+ (r + ma)\left[1 - (2\theta_1)^2 - (2\theta_2)^2 + (2\theta_1)^2(2\theta_2)^2 + \frac{1}{4}(2\theta_1)^4\right]$$

$$- (2\theta_1)\left[-(2\theta_2) + \frac{1}{3}(2\theta_1)^2(2\theta_2)\right] r,$$

$$D_1 = \frac{1}{2}(2\theta_2)\left[1 - (2\theta_1)^2 + \frac{5}{24}(2\theta_1)^4\right] + (r + ma)\left[-(2\theta_1)(2\theta_2)\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{3}(2\theta_1)^3(2\theta_2)\right] - \left[1 - \frac{1}{2}(2\theta_1)^2 - (2\theta_2)^2\right.$$

$$\left.+ \frac{3}{4}(2\theta_1)^2(2\theta_2)^2 + \frac{1}{12}(2\theta_1)^4\right]\frac{r}{2},$$

$$D_2 = -\frac{1}{2}(2\theta_1)\left[1 - \frac{2}{3}(2\theta_1)^2\right] + (r + ma)(2\theta_1)^2\left[\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.- \frac{1}{4}(2\theta_2)^2 - \frac{1}{6}(2\theta_1)^2\right] + \frac{1}{6}(2\theta_1)^3(2\theta_2)\frac{r}{2},$$

$$D_3 = -\frac{1}{2}(2\theta_2)\left[1 - \frac{3}{2}(2\theta_1)^2 + \frac{3}{8}(2\theta_1)^4\right]$$

$$+ (r + ma)(2\theta_1)(2\theta_2)\left[1 - \frac{1}{2}(2\theta_1)^2\right] - \frac{1}{4}\left[(2\theta_1)^2\right.$$

$$\left.+ (2\theta_2)^2 - \frac{3}{2}(2\theta_1)^2(2\theta_2)^2 - \frac{1}{4}(2\theta_1)^4\right] r,$$

$$D_4 = -\frac{1}{12}(2\theta_1)^3 + \frac{1}{2}(r + ma)\left[\frac{1}{12}(2\theta_1)^4 + (2\theta_2)^2 - (2\theta_1)^2(2\theta_2)^2\right]$$

$$- \frac{1}{2}(2\theta_1)(2\theta_2)\left[1 - \frac{1}{3}(2\theta_1)^2\right] r,$$

$A_0 = B_0A + B_1B + B_2C$, $A_1 = B_3A + B_4B + B_5C$,
$A_2 = B_6A + B_7B + B_8C$, $A_3 = B_9A + C_0B + C_1C$,
$A_4 = C_2A + C_3B + C_4C$,

$$B_0 = -2(2\theta_1)(2\theta_2) + \frac{2}{3}(2\theta_1)^3(2\theta_2),$$

$$B_1 = (2\theta_1)^2\left[1 - \frac{1}{3}(2\theta_1)^2\right], \qquad B_2 = 1 - (2\theta_1)^2 + \frac{1}{4}(2\theta_1)^4,$$

$$B_3 = 1 - \frac{1}{2}(2\theta_1)^2 + \frac{1}{12}(2\theta_1)^4, \qquad B_4 = -\frac{1}{6}(2\theta_1)^3(2\theta_2),$$

$$B_5 = -(2\theta_1)(2\theta_2)\left[1 - \frac{1}{3}(2\theta_1)^2\right], \qquad B_6 = B_4,$$

$$B_7 = 1 - (2\theta_1)^2 + \frac{7}{24}(2\theta_1)^4, \qquad B_8 = \frac{1}{2}(2\theta_1)^2\left[1 - \frac{1}{3}(2\theta_1)^2\right],$$

$$B_9=\frac{1}{2}(2\theta_1)^2\left[1-\frac{1}{4}(2\theta_1)^2\right],\quad C_0=(2\theta_1)(2\theta_2)\left[-1+\frac{1}{2}(2\theta_1)^2\right],$$

$$C_1=(2\theta_1)(2\theta_2)\left[1-\frac{1}{2}(2\theta_1)^2\right],\ C_2=-B_5,$$

$$C_3=B_8,\qquad\qquad C_4=\frac{1}{24}(2\theta_1)^4.$$

把(13)式代入(10)式求得 M_v 所满足的久期方程为:

$$\begin{vmatrix} F_0M_va+K_2 & F_1M_va+K_3 & F_2M_va+K_4 \\ F_1M_va+K_3 & F_3M_va+K_5 & F_4M_va+K_6 \\ F_2M_va+K_4 & F_4M_va+K_6 & F_5M_va+K_7 \end{vmatrix}=0, \tag{14}$$

式中, $F_i(i=0,1,2,3,4,5)$ 和 $K_j(j=2,3,4,5,6,7)$ 为 $B_i(i=0,1,2,\cdots,9),C_j$ 和 $D_j(j=0,1,2,3,4)$ 的函数。

将(12)式代入(14)式,求得 M_va 与 ma 的关系曲线(见图1, 2),由图1和图2

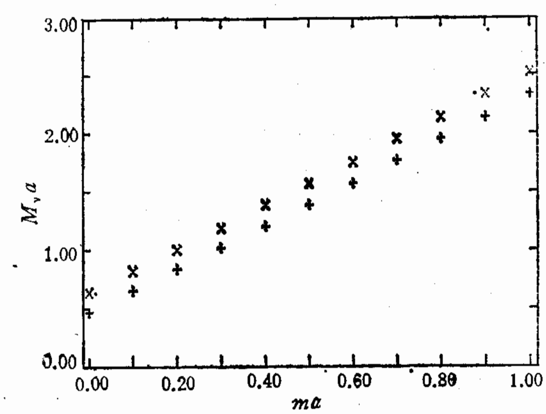

图1 $1/g^2=3$ 时, M_va 与 ma 的关系
×表示 $R=1$ 的情况 +表示 $R=0.2$ 的情况。

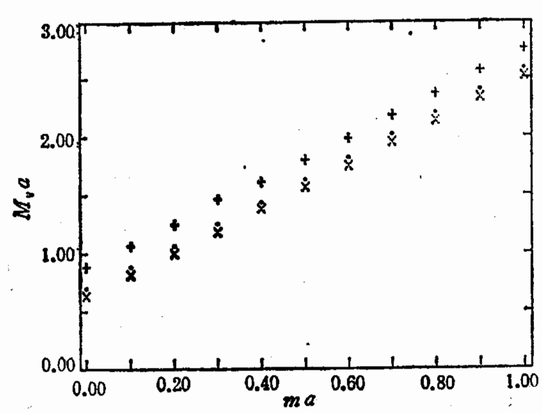

图2 $R=1$ 时, M_va 与 ma 的关系
×, ●, +分别表示 $1/g^2=3,2,1$ 的情况。

知，对应于不同的 r 值（r 取 0.2 和 1）及不同的 $1/g^2$ 值（分别取 1，2，3），M_v 与 m 的关系曲线相近，而且在较小的 m 值时都接近线性关系。

3 结论与讨论

（1）由于 M_v 和 m 之间存在极复杂的隐函数关系，不能用解析法直接求出 $\partial M_v/\partial m$ （$m = 0$ 处）的表达式，我们采用如下近似计算：

$$\left.\frac{\partial M_v}{\partial m}\right|_{m=0} = \left.\frac{\partial(M_v/e)}{\partial(m/e)}\right|_{m=0} \approx \frac{\Delta(M_v/e)}{\Delta(m/e)} = \frac{aM_v(\Delta ma) - aM_v(0)}{\Delta(ma)}, \tag{15}$$

取 $\Delta(m/e) = 0.01/g$，即 $\Delta(ma) = 0.01$（这样做的可靠性在后面讨论），经计算得 $\partial M_v/$

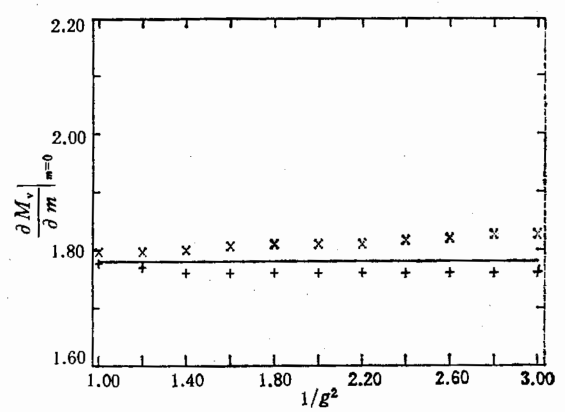

图 3　$\partial M_v/\partial m$ 随 $1/g^2$ 的变化关系

×，+分别表示 $R = 1.0, 0.2$ 的情况，实线表示准确解。

∂m（$m = 0$ 处）对 $1/g^2$ 和 r 的依赖关系曲线（见图 3），由图 3 可见，我们的结果与连续理论的准确值（1.78）[8]十分接近，而且标度行为好（标度区间为 $1 \leqslant 1/g^2 \leqslant 3$）几乎不依赖 Wilson 参数 r：

当 $r = 0.2$ 时

$$\left.\frac{\partial M_v}{\partial m}\right|_{m=0} \approx 1.76$$

比准确值低 1.1%；

当 $r = 1.0$ 时

$$\left.\frac{\partial M_v}{\partial m}\right|_{m=0} \approx 1.82$$

比准确值高 2.2%

当 $r = 0.5$ 时，$\partial M_v/\partial m$（$m = 0$ 处）的值介于上述两者之间，曲线也介于两曲线之间，由于相差太小，不便在图中画出。

取得如此理想的结果，原因可能是在介子波函数（8）式中同时考虑了 0、1，2 链的贡献。

(2) 上述计算中,取 $\Delta(ma)=0.01$,这样做是否合理呢?为了考察其可靠程度,取 $\Delta(ma)=0.001$,计算结果与取 $\Delta(ma)=0.01$ 所得到的结果之间的差异小到难以分辨的程度.可见取 $\Delta(ma)=0.01$ 所得到的结果是可靠的.实际上,图 1 和图 2 已表明,在 m 较小时,M_v 与 m 之间接近线性关系,这样取 $\Delta(ma)=0.01$ 计算 $\partial M_v/\partial m$ ($m=0$ 处),产生的误差是很小的.

(3) 格点规范理论不但给出了较好的 $\langle\bar{\Psi}\psi\rangle$ 和 M_v,还给出了理想的 $\partial M_v/\partial m$ ($m=0$ 处)的值,本文的结果和 Kogut 等人用强耦合展开法所得到的结果[8,9]有同样的准确度,这又一次表明本文方法是行之有效的,把它推广到 2+1 维和 3+1 维中去,相信会得到更多有意义的结果.

参 考 文 献

[1] Luo Xiangqian, Chen Qizhou, *J. Phys.*, **G16**(1990), 181.
[2] Chen Qizhou, Luo Xiangqian, *Phys. Rev.*, **D42**(1990), 1293.
[3] 陈启洲、郑维宏、罗向前,方锡岩,高能物理与核物理, **15**(1991),23.
[4] 陈启洲、方锡岩、许国材、刘金明、罗向前,高能物理与核物理, **15**(1991), 518.
[5] Fang Xiyan, Luo Xiangqian, Xu Guocai, Chen Qizhou, *Z. Phys.*, **C54**(1992), 587.
[6] 罗向前、陈启洲,高能物理与核物理, **16**(1992),685.
[7] 许国材、江俊勤、陈启洲,高能物理与核物理, **17**(1993)1011.
[8] T. Banks, J. Kogut, L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 1043.
[9] A. Carroll, J. Kogut, D. K. Sinclair, L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 2270.

The Calculation of $\partial M_v/\partial m$ in the Lattice Schwinger Model with Massive Wilson Fermions

Jiang Junqin Xu Guocai
(*Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou* 510303)

Chen Qizhou
(*Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou* 510275)

Received on December 15, 1992

Abstract

Using the variational method, we calculate the vector meson mass M_v in the Lattice Schwinger model with massive Wilson fermions, and then calculate the rate of change of the vector meson mass M_v with the fermion mass m(at $m=0$). Our results are consistent with the exact value in the continuum.

Key Words Lattice, Schwinger model, Massive Wilson fermions, Mass changing rate.