

核裂变扩散模型 Kramers 定态解的理论分析*

冯仁发 吴锡真 卓益忠

(中国原子能科学研究院 北京 102413)

1992年9月28日收到

摘 要

在核裂变动力学扩散模型理论的框架内,严格求解 Fokker-Planck 方程.用所得到的结果对 Kramers 定态解进行了分析,指出其成功之处和存在的局限性.

关键词 核裂变, 扩散模型, 定态解, 耗散过程, 粘滞性.

1 引 言

原子核裂变现象的发现已经有五十多年的历史了.在这一重要的核物理现象发现后不久, N. Bohr 和 J. A. Wheeler 随即提出了核裂变的平衡态统计理论^[1];第二年, H. A. Kramers 提出了用布朗运动的观点来研究粒子越过位垒的逃脱问题的方法——Kramers 的扩散模型定态解方法^[2].由于玻尔理论在解释诸多实验现象方面获得了巨大成功等原因,致使 Kramers 定态解方法没有受到应有的重视达四十年之久.但是,随着裂变领域的实验和理论工作的深入, Bohr-Wheeler 的平衡态统计理论在描述核裂变这一实际上是非平衡态现象的物理过程中的弱点逐渐显露出来了.七十年代末,一些理论工作者又相继重新回到 Kramers 开创的扩散模型的观点上来研究核裂变^[3-5],因得益于近代数值方法与计算技术的进步,近十几年来核裂变动力学扩散模型理论的发展极为迅速^[6-13].

由于 Kramers 的定态解方法是这一非平衡态扩散模型理论的奠基性工作,许多工作都把它作为标准加以比较或加以引用^[3,6,14].但是,应当指出的是 Kramers 这一早期工作存在着许多局限性.我们在严格求解 Fokker-Planck 方程的基础上对 Kramers 的定态解进行了分析,以促进核裂变扩散模型理论的进一步发展.

2 裂变扩散过程的实质

用扩散模型来研究核裂变实质上是把可裂变原子核的变形运动看作布朗粒子在裂变

* 国家自然科学基金资助.

位势中的扩散运动, 而把单粒子自由度与形变自由度之间的耦合比作介质分子对布朗粒子的无规碰撞作用。认为核在形变的过程中, 每一形变状态下都达到某种局部平衡。因此可以把粘滞张量、惯性张量和核温度等都看成是形变坐标的函数。经推导此类扩散运动服从 Fokker-Planck 方程^[7]。

要严格求解多维 Fokker-Planck 方程仍然相当困难。但一维(形变坐标)裂变动力学的进展比较快, 通过多种近似解法^[5,6]和数值严格求解一维 Fokker-Planck 方程^[7-9], 一维核裂变动力学扩散过程的物理图象已基本搞清, 简述如下:

核裂变扩散过程是一个从初始态(受激的可裂变原子核复合核体系)出发, 经过鞍点态向断点态扩散的非平衡输运过程。从复合核初始态起, 到复合核初始态和断点态之间达到准稳态分布为止的整个趋向平衡的过程中都有发射粒子与裂变的竞争。而且该体系具有的粘滞性、惯性张量、核温度和裂变位垒参数等特性都决定着整个趋向平衡的扩散过程。

3 Kramers 定态解的分析

在某些特定的条件下, 采用简化方法求解 Fokker-Planck 方程是人们常常采取的办法, Kramers 的定态解是其中之一。

3.1 Kramers 定态解^[2]

仅考虑位垒高度比核温度大很多的简单情况, 可把越过位垒的泄漏问题看作准稳态来处理。认为基态附近的粒子达到平衡分布, 而在整个 x 区域并未达到平衡, 在鞍点之外, 粒子的几率密度比平衡值小得多。因此将有一个缓慢且稳定的粒子扩散流从基态位垒越过鞍点向外扩散开。Kramers 给出基态附近的粒子几率分布为

$$W_{kr.}(x, v) = C \exp[-m(v^2 + \omega_\lambda^2 x^2)/(2kT)], \quad (1)$$

和鞍点上的几率分布为

$$W_{kr.}(x = x_c, v) = C e^{-v_F^2/4T} \cdot \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(A^{1/2}v)\right]. \quad (2)$$

由此 Kramers 求得裂变宽度为

$$\Gamma_f = \Gamma_f^0 [(1 + (\gamma/(2\omega_c))^2)^{1/2} - \gamma/(2\omega_c)], \quad (3)$$

Γ_f^0 是 Bohr-Wheeler 平衡态统计理论的结果。

3.2 Kramers 定态解的成功

与 Bohr-Wheeler 平衡态统计理论不同, Kramers 定态解理论首先通过核粘滞性把耗散机制引入核裂变, 并可给出与粘滞性有关的裂变宽度公式(3)。核粘滞性质的存在是发展核大振幅非平衡态输运理论的关键, 因而 Kramers 的这一工作被人们公认为是核裂变动力学输运理论奠基性的工作。

Kramers 给出的鞍点上的粒子几率分布(公式(2)) 是一个与粘滞性有关的偏向正动量方向的超前式分布, 从而克服了平衡态统计理论所遇到的困难。我们进行的 Fokker-Planck 方程的局域谐振子方法数值解(模型及参数同文献[8])的计算结果表明: Kramers 早期给出的鞍点上粒子几率的准稳态分布是接近真实的(见图 1(c)), 且粘滞性越大, 愈接近数值解结果。正是鞍点上这种偏向正动量方向的不对称几率分布(图 1(c)、(d)), 才提供了一个稳定的衰变几率流。

3.3 Kramers 定态解的局限性

第一、Kramers 的定态解只适合于 $kT \ll V_F$ 的情况, 这是其定态解的简化前提。而在 $kT > V_F$ 时, 裂变速率会出现 Overshooting 新现象及不同于定态解的结果, 因而在分析及引用 Kramers 定态解时要加以注意。

第二、近年来发展的核裂变扩散模型理论指出: 一个具有粘滞性的受激裂变系统从初始态出发, 经过鞍点态向断点态扩散, 直到在整个相空间建立起准稳态分布要经历一个趋向平衡的输运过程(称之为瞬态过程)。在这个瞬态过程中, 裂变宽度值也是一个从零逐渐变化到准稳态值的时间有关量, 而 Kramers 的定态解只是给出了这个非平衡态输

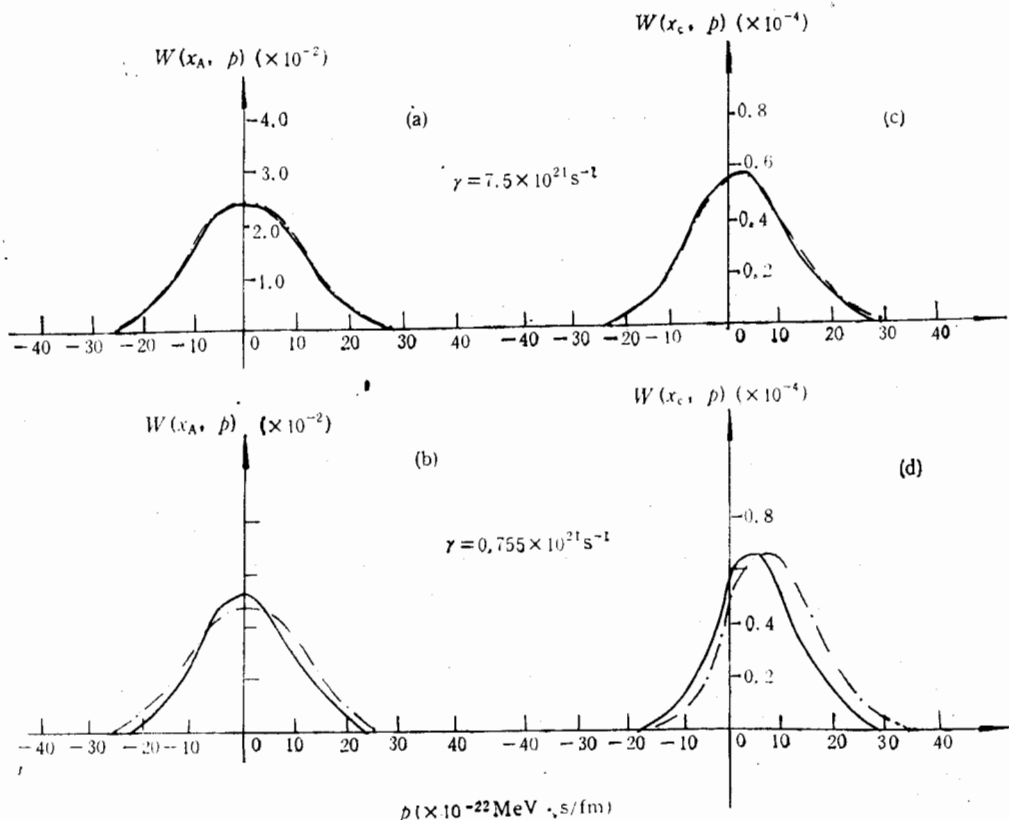


图 1 基态 A 和鞍点 C 上准稳态几率分布的比较
点划线是 Kramers 定态解, 实线为扩散方程的数值解。

运过程终点值的一部分,而对在整个输运过程中相空间粒子几率分布的变化则没有也不可能给出恰当的描述。

第三、Kramers 的定态解把裂变宽度的计算放在鞍点的位置上,认为原子核形变达到鞍点态即发生裂变。事实上,原子核形变从鞍点到达断点要经历一段时间。我们的计算表明,粒子到达断点前仍然有返回的几率流。因而用近期提出的核裂变断点模型来考虑裂变扩散过程是必须的。前面指出的 Kramers 定态解局限性的三点,正是近期发展的核裂变扩散模型理论在整个扩散过程中考虑了粘滞性有关的耗散作用的结果。其中瞬态过程和鞍点到断点输运过程成为近年来解释实验上发现的裂变前发射中子多重性增强现象的重要理论依据。

另外, Kramers 认为基态附近粒子的准稳态分布是平衡分布,这一点也与我们的数值结果不相符合。数值计算表明:即使在 $kT \ll V_F$ 条件下,也仅当粘滞系数大时($\gamma \geq 2\omega_0$),基态附近粒子的准稳态分布才接近平衡分布(图1(a));而当粘滞性小时($\gamma < 2\omega_0$),基态附近的粒子准稳态分布要比平衡分布偏窄(图1(b))。因为按照扩散模型理论,粒子在 x, p 相空间的扩散是由相互关联在一起的 x, p 两个方向的扩散决定的。粘滞性大时,粒子在 x 方向的扩散变慢而在 p 方向的扩散加快。因而基态附近大动量的粒子向鞍点扩散变慢;另外由于耗散快,大动量的粒子补充得也快,基态附近能给出一个接近平衡分布的准稳态分布。粘滞性小时,基态附近大动量的粒子跑得快而难以得到足够的补充,造成基态附近粒子的准稳态分布比 Kramers 假定的平衡分布要窄。其结果是:在 $kT \ll V_F$ 时, Kramers 裂变宽度的定态值在 $\gamma > 2\omega_0$ 时,与数值解结果相一致;而在 $\gamma < 2\omega_0$ 的小粘滞性区域, Kramers 的定态值 Γ_f 要比数值解的相应值偏大(见图2)。

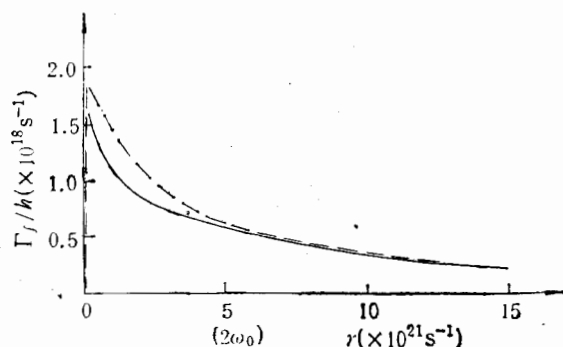


图2 $kT < V_F$ 时, Kramers 定态解和数值解的 Γ_f 的比较
点划线是 Kramers 定态解,实线是扩散方程的数值解。

而当粘滞性小时 ($\gamma < 2\omega_0$),基态附近的粒子准稳态分布要比平衡分布偏窄(图1(b))。因为按照扩散模型理论,粒子在 x, p 相空间的扩散是由相互关联在一起的 x, p 两个方向的扩散决定的。粘滞性大时,粒子在 x 方向的扩散变慢而在 p 方向的扩散加快。因而基态附近大动量的粒子向鞍点扩散变慢;另外由于耗散快,大动量的粒子补充得也快,基态附近

能给出一个接近平衡分布的准稳态分布。粘滞性小时,基态附近大动量的粒子跑得快而难以得到足够的补充,造成基态附近粒子的准稳态分布比 Kramers 假定的平衡分布要窄。其结果是:在 $kT \ll V_F$ 时, Kramers 裂变宽度的定态值在 $\gamma > 2\omega_0$ 时,与数值解结果相一致;而在 $\gamma < 2\omega_0$ 的小粘滞性区域, Kramers 的定态值 Γ_f 要比数值解的相应值偏大(见图2)。

参 考 文 献

- [1] N. Bohr and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **56**(1939) 426.
- [2] H. A. Kramers, *Physica*, **7**(1940) 284.
- [3] 吴锡真、卓益忠,第三次核物理会议文集,(1978), P105; 高能物理与核物理,**4**(1980)113.
- [4] 胡济民等,高能物理与核物理,**4**(1980)368.
- [5] P. Grange et al., *Z. Physik*, **A296** (1980) 107.
- [6] 冯仁发等,高能物理与核物理,**8**(1984)453.
- [7] Wu Xizhen et al., *Commun. in Theor. Phys.*, **1**(1982) 769.
- [8] 冯仁发等,原子核物理,**10**(1988)16.
- [9] 冯仁发等,原子核物理,**10**(1988)120.
- [10] Xizhen Wu, et al., *J. Phys. G. Nucl. Phys.*, **14**(1988) 1049.
- [11] 孙喆民等,原子核物理,**10**(1988)307.

- [12] Wu Xizhen, et al., *Chiness Phys. Lett.*, 5(1988) 41.
[13] Yizhong Zhuo, et al., *Nuclear Data for Science and Technology (1988 MITO)*, 667.
[14] P. Grange, et al., *Phys. Rev.*, C34(1986) 209.

On Theoretical Analysis of Kramers' Stationary Solution in the Diffusion Model of Fission

Feng Renfa Wu Xizhen Zhuo Yizhong

(*Institute of Atomic Energy, Beijing 102413*)

Received on September 28, 1992

Abstract

According to the non-equilibrium diffusion model of nuclear fission, the fission process can be described by the Fokker-Planck equation (F-P eq.). Through comparison of the exact solution of F-P eq. numerically with the Kramers' stationary results, the success and drawback of Kramers' stationary solution have been pointed out.

Key words Nuclear fission, Diffusion model, Stationary result, Dissipative process, Viscosity.