第 18 卷 第 7 期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 7
1994 年 7 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1994

单胶子交换梯形近似下 Bethe-Salpeter 方程赝标解

卞建国
(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

王家慧
(北京农业大学 北京 100094)

1993 年 3 月 5 日收到

摘 要

将在动量空间具有积分形式的单胶子交换梯形近似下 Bethe-Salpeter 方程化为微分方程,求出该方程在四动量为零时的赝标解全部分量,其中第一分量为已知的 Goldstein 解.

关键词 Bethe-Salpeter 方程,赝标解,单胶子交换.

1 引 言

Bethe-Salpeter 方程[1]是研究夸克-反夸克束缚态性质唯一的相对论方程. 由于该方程在动量空间具有积分形式,并且它的旋量结构很复杂,这就使得计算它的解析解的工作变得特别困难. 目前的精确解是对一些特殊的势函数(例如无质量玻色子交换[2]、谐振子势[3],方阱势[4]和 delta 函数势[5]),且在系统四动量为零时取得的 (delta 函数势情况除外). 在无质量玻色子交换梯形近似下,核子-核子的 B-S 方程赝标解是 Goldstein 求出的[2], 这一方程当本征值(相互作用耦合常数)在一定范围内取值时有连续谱解; 随后, B-S方程的轴矢-张量解[6]和标量-矢量解[7]都被求出. Higashijima等人[8]给出了Goldstein 解的物理解释,他们证明了 Goldstein 解对应于重整化后的赝标顶角函数.

但等质量费米子-反费米子 B-S 方程的赝标解有四个分量. Goldstein 解仅是其中的一个,即旋量部分为 γ_5 的分量. 本文将求出其余三个分量.

B-S 方程当系统四动量和组成子质量都为零时的解对应于 Goldstone 粒子,而 Goldstone 粒子的衰变常数(π 介子衰变常数的一个好的近似)和波函数中旋量部分为 $\not p$ 和 $\not k$ 的两个分量联系在一起的,这里 p_μ 和 k_μ 分别为系统四动量和两个组成子的相对动量. 因此我们的讨论对于研究 Goldstone 粒子的实现是有意义的.

在文献[9],我们将单胶子交换梯形近似下的 B-S 方程解 $\chi_p(q)$ 作为一个整体,引进了一个辅助函数

$$I_p(k) = \int \frac{1}{(k-q)^2} \chi_p(q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$

然后再用数学恒等式 $\Box \frac{1}{k^2} = -4\pi^2\delta^4(k)$ 将 B-S 方程化为以 $I_p(k)$ 为未知量的微分方程,并求出了第一分量. 在本文,将对 B-S 方程赝标解的每个分量引进一个辅助函数,即

$$I_i(p,k) = \int \frac{1}{(k-q)^2} \chi_i(p,q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \quad i = 1, \cdots, 4,$$

然后将它化为关于 $I_i(p,k)$ 的联立微分方程,并求出解的全部分量.

2 微分方程和边界条件

在量子色动力学理论中,单胶子交换梯形近似下夸克-反夸克 B-S 方程经 Wick 转动后在质心系中可写为

$$\chi_p(k) = -\frac{4}{3} g^2 \frac{1}{\left(\frac{p}{2}+ik_0\right)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k} - m} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k-q)^2} \cdot \gamma^\mu \chi_p(q) \gamma_\mu \frac{1}{\left(-\frac{p}{2}+ik_0\right)\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k} - m}, \tag{2.1}$$

这里 p 是系统总能量, m 为夸克(反夸克)质量, g 为强相互作用耦合常数, 如果仅讨论方程(2.1)的赝标解,则波函数 $\chi_p(k)$ 的一般形式是

$$\chi_p(k) = \gamma_5\chi_1(p,k) + \not{p}\gamma_5\chi_2(p,k) + i\not{\bar{k}}p\cdot k\chi_3(p,k) + \varepsilon_{abcd}p^a\bar{k}^b\sigma^{cd}\chi_4(p,k), \tag{2.2}$$

这里 $\bar{k}_\mu = (ik_0, k_1, k_2, k_3)$, $\chi_i(p,k) = \chi_i((p\cdot k)^2, k^2)$, $i = 1、2、3、4$. 将 (2.2) 式代入 (2.1)式,可得

$$\chi_1(p,k) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{4}p^2 - k^2 - m^2\right)^2 + (p\cdot k)^2} \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4}{3} g^2 \frac{1}{(k-q)^2} \cdot [(-p^2 - 4k^2 - 4m^2)\chi_1(p,q) + 2mp^2\chi_2(p,q) - 2m(p\cdot q)^2\chi_3(p,q)], \tag{2.3a}$$

$$\chi_2(p,k) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{4}p^2 - k^2 - m^2\right)^2 + (p\cdot k)^2} \times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4}{3} g^2 \frac{1}{(k-q)^2} \cdot \left[-4m\chi_1(p,q) + 2\left(\frac{1}{4}p^2 + m^2 - k^2\right)\chi_2(p,q)\right.$$

$$+\frac{1}{(p\cdot k)^2-p^2k^2}\Big(-(p\cdot k)^2p\cdot q+\frac{1}{2}p\cdot k\ k\cdot qp^2$$
$$-2m^2p\cdot k\ k\cdot q+\frac{1}{2}k^2p^2p\cdot q+2k^2p\cdot k\ q\cdot k$$
$$-2k^4p\cdot q+2m^2k^2p\cdot q\Big)p\cdot q\chi_3(p,q)\Big], \tag{2.3b}$$

$$p\cdot k\chi_3(p,k)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}p^2-k^2-m^2\right)^2+(p\cdot k)^2}$$
$$\times\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{4}{3}g^2\frac{1}{(k-q)^2}\cdot\Big[-4p\cdot k\chi_2(p,q)$$
$$+\frac{2}{(p\cdot k)^2-p^2k^2}\Big(\Big(-\frac{1}{4}p^2-k^2+m^2\Big)p\cdot kp\cdot q$$
$$+\Big(\frac{1}{4}p^2-k^2-m^2\Big)p^2k\cdot q$$
$$+2(p\cdot k)^2q\cdot k\Big)p\cdot q\chi_3(p,q)\Big], \tag{2.3c}$$

$$\chi_4(p,k)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{4}p^2-k^2-m^2\right)^2+(p\cdot k)^2}$$
$$\times\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{4}{3}g^2\frac{1}{(k-q)^2}\Big[-2\chi_1(p,q)$$
$$+2m\chi_2(p,q)+\frac{2mp\cdot q}{(p\cdot k)^2-p^2k^2}$$
$$\cdot(p\cdot qk^2-p\cdot kk\cdot q)\chi_3(p,q)\Big]. \tag{2.3d}$$

现在将积分方程 (2.3) 化为微分方程。令

$$I_1(p,k)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k-q)^2}\chi_1(p,q), \tag{2.4a}$$

$$I_2(p,k)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k-q)^2}\chi_2(p,q), \tag{2.4b}$$

$$I_3(p,k)k^\mu k^\nu+\bar{I}_3(p,k)g^{\mu\nu}=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k-q)^2}\chi_3(p,q)q^\mu q^\nu, \tag{2.4c}$$

这里 $I_i(p,k)=I_i((p\cdot k)^2,k^2)$, $i=1,2,3$; $\bar{I}_3(p,k)=\bar{I}_3((p\cdot k)^2,k^2)$.

利用恒等式 $\Box\frac{1}{k^2}=-4\pi^2\delta^4(k)$, (2.5)

可得 (2.4) 式的逆关系

$$\chi_1(p,k)=-4\pi^2\Box I_1(p,k), \tag{2.6a}$$
$$\chi_2(p,k)=-4\pi^2\Box I_2(p,k), \tag{2.6b}$$

$$p\cdot kk^{\nu}\chi_3(p,k)=-4\pi^2\Big[\Box(p\cdot kI(p,k))k^{\nu}+2p^{\nu}\frac{\partial}{\partial p\cdot k}(p\cdot kI_3(p,k))$$
$$+4k^{\nu}\frac{\partial}{\partial k^2}(p\cdot kI_3(p,k))+p^{\nu}\Box\bar{I}_3(p,k)\Big].\qquad(2.6c)$$

比较(2.6c)式两边可得

$$\Box\bar{I}_3(p,k)=-2\frac{\partial}{\partial p\cdot k}(p\cdot kI_3(p,k)),\qquad(2.6d)$$

$$p\cdot k\chi_3(p,k)=-4\pi^2\Big[\Box(p\cdot kI_3(p,k))+4p\cdot k\frac{\partial}{\partial k^2}I_3(p,k)\Big].\qquad(2.6e)$$

利用(2.4)式和(2.6)式，可将方程(2.3)化为微分方程

$$\Box I_1(p,k)\left[\left(\frac{1}{4}p^2-k^2-m^2\right)^2+(p\cdot k)^2\right]$$
$$=\alpha[(-p^2-4k^2-4m^2)I_1(p,k)+2mp^2I_2(p,k)$$
$$-2m(p\cdot k)^2I_3(p,k)-2mp^2\bar{I}_3(p,k)],\qquad(2.7a)$$

$$\Box I_2(p,k)\left[\left(\frac{1}{4}p^2-k^2-m^2\right)^2+(p\cdot k)^2\right]$$
$$=\alpha\Big[-4mI_1(p,k)+2\left(\frac{1}{4}p^2+m^2-k^2\right)(I_2(p,k)$$
$$-\bar{I}_3(p,k))-(p\cdot k)^2I_3(p,k)\Big],\qquad(2.7b)$$

$$\left[\Box(I_3(p,k)p\cdot k)+4p\cdot k\frac{\partial}{\partial k^2}I_3(p,k)\right]$$
$$\times\left[\left(\frac{1}{4}p^2-k^2-m^2\right)^2+(p\cdot k)^2\right]$$
$$=\alpha\Big[-4p\cdot kI_2(p,k)+4p\cdot k\bar{I}_3(p,k)$$
$$+2\left(-\frac{1}{4}p^2+k^2+m^2\right)p\cdot kI_3(p,k)\Big],\qquad(2.7c)$$

这里 $\alpha=\frac{1}{3}\frac{g^2}{\pi^2}$.

方程(2.6d)和(2.7a—c)构成了求解 I_1、I_2、I_3 和 $\bar{I}_3$ 的联立方程。从(2.3d)可以看出，χ_4 不是一个独立分量。I_3 和 $\bar{I}_3$ 由于 (2.4c) 或 (2.6d) 式的约束，两个中只有一个是独立的，所以在微分方程中独立分量仍然是三个。

I_1、I_2 和 I_3 的边界条件隐含在下式中，

$$(-p^2-4k^2-4m^2)I_1(p,k)+2mp^2I_2(p,k)-2m(p\cdot k)^2I_3(p,k)$$
$$-\frac{2mp^2}{3}\int\frac{d^4q}{4\pi^2}\frac{1}{(k-q)^2}\left[\Box(p\cdot qI_3(p,q))+4p\cdot q\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(p,q)\right]$$
$$\times\frac{1}{p\cdot q}\left(\frac{(q\cdot k)^2}{k^2}-q^2\right)+\int\frac{d^4q}{4\pi^2}\frac{1}{(k-q)^2}\Big[(-p^2-4k^2-4m^2)$$

$$\times \Box I_1(p,q) + 2mp^2\Box I_2(p,q) - 2mp\cdot q\Big(\Box(p\cdot q I_3(p,q))$$
$$+ 4p\cdot q\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(p,q)\Big)\Big] = 0, \tag{2.8a}$$

$$-4mI_1(p,k) + 2\left(\frac{1}{4}p^2 + m^2 - k^2\right)I_2(p,k)$$
$$-(p\cdot k)^2 I_3(p,k) - 2\left(\frac{1}{4}p^2 + m^2 - k^2\right)$$
$$\cdot\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{4\pi^2}\frac{1}{(k-q)^2}\left[\Box(p\cdot q I_3(p,q)) + 4p\cdot q\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(p,q)\right]$$
$$\times\frac{1}{p\cdot q}\left(\frac{(q\cdot k)^2}{k^2} - q^2\right) + \int\frac{\mathrm{d}^4q}{4\pi^2}\frac{1}{(k-q)^2}\Big[-4m\Box I_1(p,q)$$
$$+ 2\left(\frac{1}{4}p^2 + m^2 - k^2\right)\Box I_2(p,q) + \frac{1}{(p\cdot k)^2 - p^2k^2}$$
$$\times\Big(-(p\cdot k)^2 p\cdot q + \frac{1}{2}p\cdot kk\cdot qp^2 - 2m^2p\cdot kk\cdot q + \frac{1}{2}k^2p^2p\cdot q$$
$$+ 2k^2p\cdot kq\cdot k - 2k^4p\cdot q + 2m^2k^2p\cdot q\Big)\Big(\Box(p\cdot q I_3(p,q))$$
$$+ 4p\cdot q\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(p,q)\Big)\Big] = 0, \tag{2.8b}$$

$$-4p\cdot kI_2(p,k) + 2\left(-\frac{1}{4}p^2 + k^2 + m^2\right)p\cdot kI_3(p,k)$$
$$+ \frac{4p\cdot k}{3}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{4\pi^2}\frac{1}{(k-q)^2}\left[\Box(p\cdot q I_3(p,q)) + 4p\cdot q\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(p,q)\right]\frac{1}{p\cdot q}$$
$$\times\left(\frac{(q\cdot k)^2}{k^2} - q^2\right) + \int\frac{\mathrm{d}^4q}{4\pi^2}\frac{1}{(k-q)^2}\Big[-4p\cdot k\Box I_2(p,q)$$
$$+ \frac{2}{(p\cdot k)^2 - p^2k^2}\Big(\left(-\frac{1}{4}p^2 - k^2 + m^2\right)p\cdot kp\cdot q$$
$$+ \left(\frac{1}{4}p^2 - k^2 - m^2\right)p^2k\cdot q + 2(p\cdot k)^2q\cdot k\Big)\Big(\Box(p\cdot q I_3(p,q))$$
$$+ 4p\cdot q\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(p,q)\Big)\Big] = 0, \tag{2.8c}$$

边界条件是这样得到的，将方程（2.6a、b、e）代入方程(2.3a—c)中，然后将方程（2.3a—c）分别减去方程（2.7a—c），并考虑到 $\bar{I}_3$ 可用 I_3 来表示，则差值就是边界条件．由于 I_i 是 $p\cdot q$ 的函数，在没有求出 I_i 的具体形式前，无法完成对 q 的积分，所以写不出明显的边界条件，但我们将看到，当 $p=0$ 时 I_i 的边界条件很容易写出．对于 $x_i(p,k)$而言，方程(2.6—2.8)等价于方程(2.3)．

3　$p=0$ 时 B-S 方程解

虽然将积分方程变成了微分方程，但后者也不是容易求解的，一个可行的方案是将

$I_i(p,k)$ 以 $(p\cdot k)^2$ 作幂级数展开，然后逐级求解系数．但本文不作这一尝试，这里仅求 $p=0$ 的 B-S 方程解．$p=0$ 时，方程 (2.6d) 和 (2.7a—c) 简化为，

$$\Box \bar{I}_3(k)+2I_3(k)=0, \tag{3.1a}$$

$$\Box I_1(k)(k^2+m^2)^2=-4\alpha I_1(k), \tag{3.1b}$$

$$\Box I_2(k)(k^2+m^2)^2=\alpha[-4mI_1(k)+2(m^2-k^2)(I_2(k)-\bar{I}_3(k))], \tag{3.1c}$$

$$\begin{aligned}&\left(\Box I_3(k)+8\frac{\partial}{\partial k^2}I_3(k)\right)(k^2+m^2)^2\\&=\alpha[-4I_2(k)+4\bar{I}_3(k)+2(k^2+m^2)I_3(k)],\end{aligned} \tag{3.1d}$$

进一步从(3.1)式可得 $I_3(k)$ 满足的方程，

$$\begin{aligned}&(k^2+m^2)\left\{\Box I_3(k)\left[k^2\left(-\frac{6}{\alpha}\right)+m^2\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)\right]\right.\\&+\frac{\partial}{\partial k^2}I_3(k)\left[k^2\left(-\frac{48}{\alpha}\right)+m^2\left(4-\frac{32}{\alpha}\right)\right]\\&-\Box^2 I_3(k)\frac{1}{4\alpha}(k^2+m^2)^2-\Box\frac{\partial}{\partial k^2}I_3(k)\frac{2}{\alpha}(k^2+m^2)^2\\&-\frac{\partial}{\partial k^2}\Box I_3(k)\frac{4}{\alpha}(k^2+m^2)k^2\\&\left.-\frac{\partial}{\partial k^2}\frac{\partial}{\partial k^2}I_3(k)\frac{32}{\alpha}(k^2+m^2)k^2\right\}+I_3(k)[k^2(2+\alpha)\\&+m^2(2-\alpha)]=m\Box I_1(k).\end{aligned} \tag{3.2}$$

$I_3(k)$ 和 $\chi_3(k)$ 的关系为

$$I_3(k)=\frac{1}{24\pi^2}\int_0^k\frac{q^7}{k^6}\mathrm{d}q\chi_3(q)+\frac{1}{24\pi^2}\int_k^\infty q\mathrm{d}q\chi_3(q). \tag{3.3}$$

从方程(2.8)式可得到 $I_3(k)$ 边界条件的隐含式，这个隐含式也可用类似于得到(2.8)式的方法直接从(3.2)式得到，两者应是等价的．我们采用后一种方法，因为它方便一些，这个隐含式是

$$\begin{aligned}&I_3(k)[k^2(2+\alpha)+m^2(2-\alpha)]-\frac{\partial}{\partial k^2}I_3(k)4m^2(k^2+m^2)\\&=(k^2(2+\alpha)+m^2(2-\alpha))\left[\frac{1}{6}\int_0^k\frac{q^7}{k^6}\mathrm{d}q\left(-\Box I_3(q)-8\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(q)\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{6}\int_k^\infty q\mathrm{d}q\left(-\Box I_3(q)-8\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(q)\right)\right]\\&+\frac{2m^2(k^2+m^2)}{k^8}\int_0^k\mathrm{d}q q^7\left(-\Box I_3(q)-8\frac{\partial}{\partial q^2}I_3(q)\right),\end{aligned} \tag{3.4a}$$

完成上式积分，可得 $I_3(k)$ 明显的边界条件，

$$\lim_{q\to 0}q^7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}I_3(q)=0, \tag{3.4b}$$

$$\lim_{q\to 0}[q^4(2+\alpha)+q^2m^2(4-\alpha)+2m^4]\frac{1}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}I_3(q)=0, \tag{3.4c}$$

$$\lim_{q\to\infty}\left[\frac{q}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}I_3(q)-I_3(q)\right]=0, \tag{3.4d}$$

$$\lim_{q\to\infty}[q^2(2+\alpha)+m^2(2-\alpha)]\left[\frac{q}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}I_3(q)-I_3(q)\right]=0, \tag{3.4e}$$

至于第一分量 $I_1(k)$，用算符□作用在（3.1b）式两边，得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[s(s+m^2)\Box I_1(s)]+\alpha\Box I_1(s)=0, \tag{3.5}$$

这里 $s=k^2$. 这正是 Goldstein 方程，$\Box I_1(s)$ 的边界条件已在文献 [2] 中给出. 它的解是超几何函数

$$\begin{aligned}\chi_1(s)&=-4\pi^2\Box I_1(s)\\&\quad-4\pi^2a\int_0^1 t^\beta(1-t)^{-\beta}\left(1+\frac{s}{m^2}t\right)^{\beta-2}\mathrm{d}t\\&=\begin{cases}-4\pi^2aB(\beta,2-\beta)F\left(1+\beta,2-\beta;2;-\dfrac{s}{m^2}\right), & s\in(-m^2,m^2],\\ -\dfrac{4\pi^2}{\beta}a\left\{\dfrac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma(\beta-1)}\left(\dfrac{s}{m^2}\right)^{-\beta-1}F\left(1+\beta,\beta;2\beta;\left[-\dfrac{s}{m^2}\right]^{-1}\right)\right.\\ \left.+\dfrac{\Gamma(2-\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(-\beta)}\left(\dfrac{s}{m^2}\right)^{\beta-2}F\left(\alpha-\beta,1-\beta;2-\alpha\beta;\left[-\dfrac{s}{m^2}\right]^{-1}\right)\right\}, \\ \qquad s\in(-\infty,-m^2)\ \text{和}\ [m^2,\infty),\end{cases}\end{aligned} \tag{3.6}$$

这里 $B(m,n)$ 是 beta 函数；$\Gamma(m)$ 是 gamma 函数；F 是超几何级数；β 与 α 的关系是 $\beta(1-\beta)=\alpha$，它给出 α 的取值范围 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$；$a$ 是任一常数.

方程(3.2)的解包括齐次解和特解. 将(3.6)式代入(3.2)式，解得

$$I_3(s)=\begin{cases}a\phi_{3N}(s)+b\phi_{3H}(s), & s\in[-m^2,m^2], & (3.7\mathrm{a})\\ a\phi_{3N}(s)+c\phi_{3H}(s), & s\in(-\infty,-m^2]\ \text{和}\ [m^2,\infty), & (3.7\mathrm{b})\end{cases}$$

这里 ϕ_{3H} 和 ϕ_{3H} 是齐次解，ϕ_{3N} 和 ϕ_{3N} 是非齐次解(见附录)，由于两个区域的解在公共点应有相同值，可定出 b、c 与 a 的关系

$$b=a\frac{\begin{vmatrix}\phi_{3N}(m^2)-\phi_{3N}(m^2) & \phi_{3H}(m^2)\\ \phi_{3N}(-m^2)-\phi_{3N}(-m^2) & \phi_{3H}(-m^2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\phi_{3H}(m^2) & \phi_{3H}(m^2)\\ \phi_{3H}(-m^2) & \phi_{3H}(-m^2)\end{vmatrix}} \tag{3.8a}$$

和

$$=-a\frac{\begin{vmatrix}\phi_{3H}(m^2) & \phi_{3N}(m^2)-\phi_{3N}(m^2)\\ \phi_{3H}(-m^2) & \phi_{3N}(-m^2)-\phi_{3N}(-m^2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\phi_{3H}(m^2) & \phi_{3H}(m^2)\\ \phi_{3H}(-m^2) & \phi_{3H}(-m^2)\end{vmatrix}}. \tag{3.8b}$$

B-S 方程解的第三分量 $\chi_3(k)$ 可由 (3.3) 式求出，第二分量 $\chi_2(k)$ 可由 (3.1c) 和 (3.1d) 式得到，第四分量 $\chi_4(k)$ 可由 (2.3d) 式求出，

$$\chi_3(s) = -4\pi^2\left(4s\frac{d^2}{ds^2}I_3(s) + 16\frac{d}{ds}I_3(s)\right), \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\chi_2(s) &= -4\pi^2\left(4s\frac{d^2}{ds^2}I_2(s) + 8\frac{d}{ds}I_2(s)\right)\\ &= \frac{4\pi^2}{(s+m^2)}\left[-4sm\frac{d^2}{ds^2}I_1(s) - 8m\frac{d}{ds}I_1(s)\right.\\ &\quad + \alpha(s-m^2)I_3(s) + (s^2-m^4)\left(2s\frac{d^2}{ds^2}I_3(s)\right.\\ &\quad \left.\left.+ 8\frac{d}{ds}I_3(s)\right)\right],\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\chi_4(s) &= \frac{4\pi^2}{s+m^2}\left[-2s\frac{d^2}{ds^2}I_1(s) - 4\frac{d}{ds}I_1(s)\right.\\ &\quad \left.- \alpha mI_3(s) + m(s+m^2)\left(2s\frac{d^2}{ds^2}I_3(s) + 8\frac{d}{ds}I_3(s)\right)\right].\end{aligned} \tag{3.11}$$

4 结 论

至此，求出了单胶子交换梯形近似下四动量为零时的 B-S 方程赝标解的全部分量.

将 α 看作为本征值，则从(3.6)和(3.7)式可看出，这个本征值取连续值，这一点与 Goldstein 方程是一致的；如果进一步化简，即令夸克质量为零，则第二、第三分量对 Goldstone 粒子衰变常数有贡献.

自然界并不存在质量为零的束缚态，那么当夸克质量不为零时，B-S 方程解的物理意义是什么？Higashijima 等人[8]把第一分量解释为重整化后的赝标顶角函数，那么对其余分量能否作同样的解释，由待今后的进一步研究.

本文是在黄涛研究员的指导下完成的，作者曾就有关问题请教过冼鼎昌研究员并作了有益的讨论，在此，向两位研究员表示感谢.

附 录

$$\psi_{3i}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^i s^n, \quad i = N, H, \tag{A.1}$$

a_n^i 满足递推关系

$$\begin{aligned}&-a_n^i(n+2)(n+1)n(n-1)8m^6 + a_{n-1}^i(n-1)[(n\alpha - 4n + \alpha - 8)\\ &-(n+1)(n-2)(3n+4)]16m^4 + a_{n-2}^i\Big[(n-2)(\alpha n - 10n - 10)\\ &-(n-3)(n-2)n(3n+5) + \frac{1}{4}(2\alpha - \alpha^2)\Big]16m^2\\ &+ a_{n-3}^i\Big[\frac{1}{4}\alpha(2+\alpha) - 6n(n-3) - (n-1)(n-3)(n-4)(n+2)\Big]16\\ &= \begin{cases}0 & i = H,\\ (-1)^{n-2}\alpha mB(\beta, 2-\beta)C_{n-2}(1+\beta, 2-\beta; 2), & i = N,\end{cases}\end{aligned}$$

其中 $C_n(\alpha,\beta,\gamma)$ 是超几何级数 $F(\alpha,\beta;\gamma;s)$ 的第 n 项系数，我们已取 $C_0=1$；$a^H_{n<0}=0$，$a^H_0=1$，$a^H_1=0$，$a^N_{n<1}=0$；收敛半径

$$R_i=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^i_{n-1}}{a^i_n}\right|=\left|-m^2\left(1+\frac{\sigma}{n}\right)\right|,\quad i=N,H$$

σ 与 α 的关系是 $\alpha=\dfrac{\sigma^3-5\sigma^2+8\sigma-4}{2-\sigma}$，当 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 时，$\sigma\in[1,1.5]$，所以级数（A.1）的收敛区间为 $s\in[-m^2,m^2]$。

$$\phi_{5N}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}b^1_m s^{-m+q_1},\tag{A.2}$$

$$\phi_{5H}(s)=\sum_{m=0}^{\infty}b^2_m s^{-m+q_2}+\sum_{m=0}^{\infty}b^3_m s^{-m+q_3},\tag{A.3}$$

b^i_n 满足递推关系，

$$\begin{aligned}&-b^i_n(-n+q_i+2)(-n+q_i+1)(-n+q_i)(-n+q_i-1)8m^6\\&+b^i_{n+1}(-n+q_i-1)[(\alpha-4)(-n+q_i)-8+\alpha\\&-(-n+q_i+1)(-n+q_i-2)(-3n+3q_i+4)]16m^4\\&+b^i_{n+2}\Big[(-n+q_i-2)((-n+q_i)(\alpha-10)-10)\\&-(-n+q_i-3)(-n+q_i-2)(-n+q_i)(-3n+3q_i+5)\\&+\frac{1}{4}(2\alpha-\alpha^2)\Big]16m^2+b^i_{n+3}\Big[\frac{1}{4}\alpha(2+\alpha)-6(-n+q_i)(-n+q_i-3)\\&-(-n+q_i+1)(-n+q_i-3)(-n+q_i-4)(-n+q_i+2)\Big]16\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0, & i=1,\\(-1)^n\alpha\dfrac{m}{\beta}\dfrac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(2\beta-1)}{\Gamma(\beta-1)}C_n(1+\beta,\beta;2\beta), & i=2,\\(-1)^n\alpha\dfrac{m}{\beta}\dfrac{\Gamma(2-\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(-\beta)}C_n(\alpha-\beta,1-\beta;2-2\beta), & i=3,\end{cases}$$

其中 $b^1_{n<0}=0$，$b^1_0=1$；$b^2_{n<2}=0$，$b^3_{n<2}=0$，q_1 是方程

$$q_1^4+6q_1^3+9q_1^2+4q_1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\alpha^2=0$$

的小于 -1（边界条件）的实数根，当 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 时，$q_1\in[-4,-4.004]$；$q_2=-\beta+1$；$q_3=\beta$；

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^i_{n+1}}{b^i_n}=-m^2\left(1+\frac{\sigma}{n}\right),\quad i=1,2,3$$

所以级数（A.2）和（A.3）的收敛区间是 $s\in(-\infty,-m^2]$ 和 $[m^2,\infty)$。

参　考　文　献

[1] E.E. Salpeter and H.A. Bethe, *Phys. Rev.*, **84**(1951) 1232.
[2] J. Goldstein, *Phys. Rev.*, **91**(1953) 1516.
[3] M. Gohm, H. Joos and M. Krammer, *Nucl. Phys.*, **B51**(1973) 397; D.Z. Winkel. *J. Math. Phys.*, **16**(1975)93.
[4] R.F. Keam, *J.M. Phys.*, **10**(1969)594.
[5] T.Huang and Z. Huang, *Commun. Theor. Phys.*, **11**(1989)179.

[6] W. Kummer, *Nuovo Cim.*, **31**(1964)219; **34**(1964)1840(E).
[7] K. Higashijima, *Pro. Theor. Thys.*, **55**(1976)1591.
[8] K. Higashijima and A. Nishimuya, *Nucl. Phys.*, **B113**(1976)173.
[9] J.G. Bian and T. Huang, *High Energy Phys and Nucl. Phys.*, **2**(1992)179.

The Pseudo-scalar Solution of Bethe-Salpeter Equation in the Approximation of One Gluon Exchange

Bian Jianguo
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing* 100039)
Wang Jiahui
(*Beijing Agriculturl Uiniversity, Beijing* 100094)
Received on March 5, 1993

Abstract

The integral Bethe-Salpeter equation in the approximation of single gluon exchange in momentum position is converted to a differential equation, and all the components of the pseudo-scalar solution of the equation for a vanishing total four-momentum, including the Goldstein solution as the first component, are derived.

Key words Bethe-Salpeter equation, pseudo-scalar solution, single gluon exchange.