第18卷 第8期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 8
1994年8月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1994

格点 Chern-Simons 理论的量子化*

郭硕鸿 方锡岩
(中山大学物理系 广州 510275)
1992年12月30日收到

摘 要

讨论了 Chern-Simons 理论的 naive 格点化,并就其中最简单的一种情形用 Dirac 约束体系量子化方法进行量子化. 由此显示 naive 格点化的缺陷,找出了克服这一困难的办法. 求出了 anyon 产生算符.

关键词 格点 Chern-Simons, 规范无关量子化, anyon.

1 引 言

自从发现 anyon 在量子霍尔效应中的作用[1],以及 anyon 多体系统的超导性质[2]以来,Chern-Simons (C-S) 理论作为一种能产生分数自旋的理论就倍受人们注意. 但是,连续时空下,由 C-S 理论与物质场耦合构造的 anyon 算符[3]一直存在争论[4],不能令人满意. 因为其中涉及到短距离规则化问题和多值函数的微分积分的可交换性等问题[5]. 而格点形式则可避开这样的问题.另一方面,anyon 主要出现在凝聚态物质中,因此,格点 C-S 理论的研究除了作为连续理论的一种确定的正规化方案之外,还具有直接的物理意义.

Fradkin 最先研究了格点 C-S 与物质场的作用[6]. 但进一步的分析表明文献[6]中格点 C-S 形式并不是规范不变的[7,8],规范不变的 C-S naive 格点化[8]遇到规范场对易子发散的困难. 为了避免这一困难,文献[7]提出了一种格点上非定域的 C-S 项. 虽然这种表述在连续极限时可以成为定域的,但格点形式较为复杂,不易进行实际问题的计算. 文献[9]提出了一种对偶格点上的 C-S 理论. 这种理论具有简单的定域格点 C-S 项. 而且避免了 naive 格点化的困难. 由于格点理论具有一定的普适性, 即一些不同的格点形式可以导致相同的连续理论,因此研究另一些比较简单的可行格点化方案是有意义的.本文进一步讨论 C-S 理论的 naive 格点化形式,提出避免对易子发散困难的方案.

2 局域不变的格点 C-S 形式

我们讨论阿贝尔 C-S 规范理论. 对 2+1 维时空,取度规 $g_{\mu\nu}=(1,-1,-1)$,把时

* 国家自然科学基金和中山大学高等学术研究中心基金资助.

空格点化。为运算方便，定义如下符号：

$$\begin{aligned}\Delta_\nu f(x) &\equiv f(x+e_\nu)-f(x),\\ \bar{\Delta}_\nu f(x) &\equiv f(x)-f(x-e_\nu).\end{aligned}\tag{2.1}$$

显然：

$$\bar{\Delta}_\nu f(x)=\Delta_\nu f(x-e_\nu),\quad \varepsilon^{\mu\nu}\Delta_\mu\Delta_\nu f(x)=0.\tag{2.2}$$

其中 e_ν 是单位格矩矢量，$\nu=0,1,2$，$f(x)$ 为任意定义在格点上的函数。

考虑 $\sum_x \Delta_\nu[f(x)g(x+x_0)]$，若假定周期性边界条件，则有：

$$\begin{aligned}\sum_x \Delta_\nu[f(x)g(x+x_0)] &= \sum_x [f(x+e_\nu)\cdot g(x+x_0+e_\nu)-f(x)g(x+x_0)]\\ &=\sum_x[\bar{\Delta}_\nu f(x)g(x+x_0)+f(x)\Delta_\nu g(x+x_0)]=0,\\ &\Longrightarrow \sum_x f(x)\Delta_\nu g(x+x_0)=-\sum_x\bar{\Delta}_\nu f(x)g(x+x_0).\end{aligned}\tag{2.3}$$

在以下的讨论中，都假定周期性边界条件。

按通常的格点规范理论，把规范势 $A_\mu(x)$ 定义在链 $[x,\ \mu]$ 上，并且有 $-A_\mu(x)=A_{-\mu}(x+\mu)$。如果按文献[6]取格点 C-S 形式为 $\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu(x)\Delta_\nu A_\lambda(x)$. 作规范变换：

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)-\Lambda(x+e_\mu)+\Lambda(x)=A_\mu(x)-\Delta_\mu\Lambda(x).\tag{2.4}$$

则有：

$$\begin{aligned}\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu(x)\Delta_\nu A_\lambda(x) &\to \sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}[A_\mu(x)-\Delta_\mu\Lambda(x)]\Delta_\nu A_\lambda(x)\\ &=\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu(x)\Delta_\nu A_\lambda(x)+\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\Lambda(x)\bar{\Delta}_\mu\Delta_\nu A_\lambda(x).\end{aligned}$$

显然多出一不为零的项 $\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\Lambda(x)\bar{\Delta}_\mu\Delta_\nu A_\lambda(x)$，因此上述 C-S 形式不是规范不变的.注意到若能使多出的那一项中的 $\bar{\Delta}_\mu$ 变为 Δ_μ，则有

$$\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\Lambda(x)\Delta_\mu\Delta_\nu A_\lambda(x)=0.$$

取格点 C-S 的形式为 $\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu(x-e_\mu)\Delta_\nu A_\lambda(x)$，即可达到上述要求。用这种办法所得的格点 C-S 形式并不是唯一的，事实上容易证明，下述形式：

$$\begin{gathered}\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu(x+k(e_\mu+e_\nu)+k'e_\lambda+e_\nu)\Delta_\nu A_\lambda(x);\\ k'=k+1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\end{gathered}\tag{2.5}$$

也都是规范不变的。为简单起见，下面主要讨论其中最简单的情况，即取 $k'=0,k=-1$ 的形式：

$$\sum_x \varepsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu(x-e_\mu)\Delta_\nu A_\lambda(x).\tag{2.6}$$

3 Dirac 正则量子化

为简单起见，考虑物质场为零自旋玻色子的情况(对费米子做法完全类似)。既然是正则量子化，自然要取时间轴连续，这种情况下拉氏密度为：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= (\mathrm{D}_0\phi)^*(\mathrm{D}^0\phi) + [\phi^*(x)\mathrm{e}^{iA_j(x)}\phi(x+e_j) + \mathrm{h.c.}] \\ &\quad + \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu(x-e_\mu)\Delta_\nu A_\lambda(x),\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $\mathrm{D}_0 = \partial_0 + iA_0$，

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu(x-e_\mu)\Delta_\nu A_\lambda(x) &= \epsilon^{ij}[A_0(x)\Delta_i A_j(x) + A_j(x-e_j)\partial_0 A_i(x) \\ &\quad + A_i(x-e_i)\Delta_j A_0(x)].\end{aligned} \tag{3.2}$$

这里，采用了以拉丁字母 i、j 等表示空间指标的惯例。文献[10]讨论了连续理论的规范无关量子化，本文用类似方法即 Dirac 约束体系量子化方法[11]把(3.1)式量子化。

对于(3.1)式，正则动量如下：

$$\begin{aligned}&\Pi_0 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^0} = 0, \Pi_i = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^i} = \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon_{ij}A^j(x-e_j), \\ &\Pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}} = (\mathrm{D}_0\phi)^*, \Pi^* = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^*} = \mathrm{D}_0\phi.\end{aligned} \tag{3.3}$$

按照 Dirac 的分类[11]，初级约束为：

$$\begin{aligned}&P_0 = \Pi_0 \approx 0, \\ &P_j = \Pi_i - \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon_{ij}A^j(x-e_j) \approx 0, (i=1,2).\end{aligned} \tag{3.4}$$

符号"≈"代表弱相等。哈密顿密度为：

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(x) &= \Pi\dot{\phi} + \dot{\phi}^*\Pi^* + \Pi_0\dot{A}^0 + \Pi_i\dot{A}^i - (\mathrm{D}_0\phi)^*(\mathrm{D}^0\phi) - [\phi^*(x)\mathrm{e}^{iA_j(x)} \\ &\quad \cdot \phi(x+e_j) + \mathrm{h.c.}] - \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon^{ij}[A_0(x)\Delta_i A_j(x) + A_j(x \\ &\quad - e_j)\partial_0 A_i(x) + A_i(x-e_i)\Delta_j A_0(x)] \\ &= \Pi\Pi^* + A_0 J^0 - [\phi^*(x)\mathrm{e}^{iA_j(x)}\phi(x+e_j) + \mathrm{h.c.}] \\ &\quad - \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon^{ij}A_0(x)\cdot[\Delta_i A_j(x) + \Delta_i A_j(x-e_i-e_j)],\end{aligned} \tag{3.5}$$

式中 $J^0 = i(\phi^*\Pi^* - \Pi\phi)$，初级哈密顿量为：

$$H_p = \sum_x \mathscr{H}_p(x) \equiv \sum_x [\mathscr{H}(x) + U_0(x)\Pi^0(x) + U^i(x)P_i(x)], \tag{3.6}$$

其中 U_0, U_i 为任意乘子，以保证初级约束弱守恒。利用泊松括号：

$$\begin{aligned}&[A_\mu(\boldsymbol{x},t), \Pi^\nu(\boldsymbol{y},t)]_P = g^\nu_\mu\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \\ &[\phi(\boldsymbol{x},t), \Pi(\boldsymbol{y},t)]_P = [\phi^*(\boldsymbol{x},t), \Pi^*(\boldsymbol{y},t)]_P = \delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\end{aligned} \tag{3.7}$$

我们得到：

$$[\Pi^0, H_P]_P = -J_0 + \frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon_{ij}[\Delta^i A^j(x) + \Delta^i A^j(x-e_i-e_j)] \approx 0.$$

由此产生次级约束：

$$S(x)=-J_0+\frac{\theta}{4\pi^2}\varepsilon_{ij}[\Delta^i A^j(x)+\Delta^i A^j(x-e_i-e_j)]\approx 0. \tag{3.8}$$

而

$$\begin{aligned}[P^i,H_p]_P=&\ i[\phi^*(x)e^{iA_i(x)}\phi(x+e_i)-\phi^*(x+e_i)e^{-iA_i(x)}\phi(x)]\\&+\frac{\theta}{4\pi^2}\varepsilon^{ij}\bar{\Delta}_j[A_0(x)+A_0(x+e_i+e_j)]\\&-\frac{\theta}{4\pi^2}\varepsilon^{ij}[U_j(x-e_j)+U_j(x+e_i)]\approx 0,\end{aligned} \tag{3.9}$$

即P^i 随时间的变化不产生次级约束。再考虑 $S(x)$ 随时间的变化：

$$\begin{aligned}[S(x),H_p]_P=&-i\bar{\Delta}_j[\phi^*(x)e^{iA_j(x)}\phi(x+e_j)-\phi^*(x+e_j)e^{-iA_j(x)}\phi(x)]\\&+\frac{\theta}{4\pi^2}\varepsilon^{ij}\bar{\Delta}_i[U_j(x-e_j)+U_j(x+e_i)]\approx 0,\end{aligned} \tag{3.10}$$

也不产生次级约束。

由此得到四个约束 $P_0(x)$、$P_i(x)$,$S(x)$，容易验证 P_0 是第一类约束，P_i、S 为第二类.按照文献[11]应找出最大的第一类约束集,经过适当的计算可知,$\bar{\Delta}_i P^i(x)+S(x)\approx 0$ 也是第一类的。因此有：

最大的第一类约束集：

$$P_0=\Pi_0(x)\approx 0,\quad P=\bar{\Delta}_i P^i(x)+S(x)\approx 0.$$

第二类约束集：

$$P_i=\Pi_i(x)-\frac{\theta}{4\pi^2}\varepsilon_{ij}A^j(x-e_j)\approx 0,(i=1,2).$$

下面计算 Dirac 括号,令：

$$P_{ij}(x,y)\equiv[P_i(x),\ P_j(y)]_P=-\frac{\theta}{4\pi^2}\varepsilon_{ij}[\delta(x,y-e_i)+\delta(x,y+e_j)], \tag{3.11}$$

$$\sum_z P_{il}(x,z)\cdot(P^{-1})^l_j(z,y)\equiv g_{ij}\delta(x,y). \tag{3.12}$$

利用傅氏展开可求得：

$$P^{-1}_{ij}(x,y)=\frac{4\pi^2}{\theta}\varepsilon_{ij}\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2p\,\frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{e^{-ip\cdot\hat{e}_i}+e^{ip\cdot\hat{e}_j}}. \tag{3.13}$$

力学量的 Dirac 括号定义为[10]

$$\begin{aligned}\{\mathscr{X}(x),\mathscr{X}(y)\}_{DB}\equiv&[\mathscr{X}(x),\mathscr{X}(y)]_P-\sum_{z,z'}[\mathscr{X}(x),P_i(z)]_P P^{-1}_{ij}(z,z')\\&\cdot[P_j(z'),\mathscr{X}(y)]_P.\end{aligned} \tag{3.14}$$

由此求得：

$$\{A_l(x),A_k(y)\}_{DB}=P^{-1}_{lk}(x,y), \tag{3.15}$$

$$\{A_l(x),\Pi_k(y)\}_{DB}=g_{lk}\delta(x,y)-\frac{\theta}{4\pi^2}\varepsilon^{ik}P^{-1}_{li}\cdot(x,y+e_k), \tag{3.16}$$

$$\{\Pi_l(x),\Pi_k(y)\}_{DB}=\left(\frac{\theta}{4\pi^2}\right)^2\varepsilon_{il}\varepsilon_{jk}P^{-1}_{ij}(x+e_l,y+e_k). \tag{3.17}$$

注意,由(3.13)式知 P_{ij}^{-1} 的傅氏分量在 $p_1+p_2=\pm\pi$ 时有不可积分的奇异性，因此上述Dirac 括号有奇异性。现在暂时不管这奇异性，首先形式上对此理论进行 Dirac 量子化,以后将讨论如何避免这奇异性的问题。

现在让 $P_i(x)$ 强为 0,即

$$\Pi_i(x)=\frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon_{ij}A^j(x-e_j). \tag{3.18}$$

可以验证(3.15)—(3.18)式是自洽的,所以下面的讨论中都取 $P_i(x)=0$。这样，总的哈密顿量为:

$$H_T=\sum_x[\mathscr{H}(x)+U\Pi_0+VP(x)]. \tag{3.19}$$

比较哈密顿运动方程 $\partial_0\mathscr{H}=\{\mathscr{H},H_T\}_{DB}$ 与拉格朗日运动方程得:

$$V(x)=0,\ U=\partial_0A_0. \tag{3.20}$$

按照通常的量子化法则,把 Dirac 括号 $\{\ \}_{DB}$ 换为 $\frac{1}{i}[\ ]$(取 $\hbar=1$) 即可得量子场的对易关系,这样就得到自洽的量子化理论。而 $\Pi_0\approx 0, S(x)\approx 0$ 作为第一类约束条件对 Fock 空间的物理态施加限制。

作为对自洽性的验证,可以用上述对易关系计算约束 $\Pi_0, S(x)$ 随时间的变化:

$$\dot{\Pi}_0=\frac{1}{i}[\Pi_0(x),H_T]=\frac{1}{i}S(x)=S(x)\approx 0, \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\dot{S}(x)=\frac{1}{i}[S(x),H_T]=\frac{1}{i}\{&\bar{\Delta}_i[\phi^+e^{iA_j(x)}\phi(x+e_j)-\mathrm{h.c.}]\\&-\bar{\Delta}_i\{\phi^+e^{iA_j(x)}\cdot\phi(x+e_j)-\mathrm{h.c.}]+i\frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon^{il}\bar{\Delta}_l\bar{\Delta}_i[A_0(x)\\&+A_0(x+e_i+e_l)]\}=0.\end{aligned} \tag{3.22}$$

因此,Π_0 弱守恒而 $S(x)$ 强守恒,这自然可满足理论的要求。$S(x)\approx 0$ 实际上相应于高斯定理。注意(3.16)式与泊松括号 $[A_l(x),\Pi_k(y)]_P=g_{lk}\delta(x,y)$ 相比有一个修正项,许多论文(例如[3],[6],[7])量子化时直接把泊松括号变为 $\frac{1}{i}[\ ]$,这种做法不能保证理论的自洽性。

4　奇异性的消除和格点 anyon 理论

由以上的分析知,除了 P_{ij}^{-1} 的奇异性这一问题外，格点 C-S 理论可以自洽地量子化。本节将讨论如何消除这一奇异性以获得完全自洽的理论。

4.1　规范变换和 C-S 场的消去

先研究格点 C-S 理论的规范变换和 C-S 场的消去问题。可以证明 $\hat{Q}(x)=-S(x)$ 生成规范变换。证明如下:

由上节求出的对易关系,有:

$$[\hat{Q}(x),\phi(y)]=-\delta(x,y)\phi(y), \tag{4.1}$$

$$\left[\sum_y \hat{Q}(y)\Lambda(y),\ A_i(x)\right]=-i[\Lambda(x+e_i)-\Lambda(x)], \tag{4.2}$$

其中 $\Lambda(x)$ 是定义在格点上的任意函数. 在 Fock 空间作幺正变换 $e^{-i\sum_x \hat{Q}(x)\Lambda(x)}$, 利用 (4.1),(4.2)式可得:

$$e^{-i\Sigma\hat{Q}(y)\Lambda(y)}\phi(x)e^{i\Sigma\hat{Q}(y)\Lambda(y)}=e^{i\Lambda(x)}\phi(x), \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}e^{-i\Sigma\hat{Q}(y)\Lambda(y)}A_j(x)e^{i\Sigma\hat{Q}(y)\Lambda(y)}&=A_j(x)+[\Lambda(x)-\Lambda(x+e_j)]\\&=A_j(x)-\Delta_j\Lambda(x).\end{aligned} \tag{4.4}$$

所以 $e^{-i\Sigma\hat{Q}(x)\Lambda(x)}$ 为 Fock 空间的规范变换.

对于物理态, 有 $S(x)=0$ 即:

$$J_0(x)=\frac{\theta}{4\pi^2}\epsilon^{ij}[\Delta_iA_j(x)+\Delta_iA_j(x-e_1-e_2)]. \tag{4.5}$$

由此求得:

$$A^i(x)+A^i(x-e_1-e_2)=-\epsilon^{ij}\bar{\Delta}_j\frac{4\pi^2}{\theta}\sum_{x'}G(x,x')J_0(x'), \tag{4.6}$$

其中 $G(x,x')$ 定义为 $\Delta^i\bar{\Delta}_iG(x,x')\equiv\delta(x,x')$. 定义:

$$2\pi\bar{\Delta}_jG(x,x')\equiv-\epsilon_{jl}\Delta^l\Theta(\bar{r},x'),\bar{r}\equiv x-\frac{1}{2}(e_1+e_2). \tag{4.7}$$

则有: $A^i(x)+A^i(x-e_1-e_2)=-\frac{2\pi}{\theta}\Delta^i\sum_{x'}\Theta(\bar{r},x')J_0(x')$. 作规范变换:

$$\Lambda(x)+\Lambda(x-e_1-e_2)=-\frac{2\pi}{\theta}\sum_{x'}\Theta(\bar{r},x')J_0(x') \tag{4.8}$$

则可以消去规范场, 但如果想解出 $\Lambda(x)$, 同样遇到在 $p_1+p_2=\pm\pi$ 处的奇异性, 这奇异性与 $A_i(p)$ 对易子在 $p_1+p_2=\pm\pi$ 处的奇异性有同一来源. 其物理图象是: 对于 $J_0(x)=0$, 沿对角线上任意交替磁通 $\pm\Phi$ 值的组态(如图 1 所示)都满足约束 $S(x)\approx 0$. 并且因为纯规范场没有能量贡献, 所以这种组态可以叠加在任意态上从而导致每一方格上 Φ 为不定值的组态.

由此可见, 要避免对易子在 $p_1+p_2=\pm\pi$ 处的奇异性, 必须使 $A_i(\boldsymbol{p})$ 在

$$p_1+p_2=\pm\pi$$

的分量从理论中退耦. 由于

$$\begin{aligned}&A_i(x)+A_i(x-e_1-e_2)\\&=\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}(1+e^{-i(p_1+p_2)})A_i(p),\end{aligned}$$

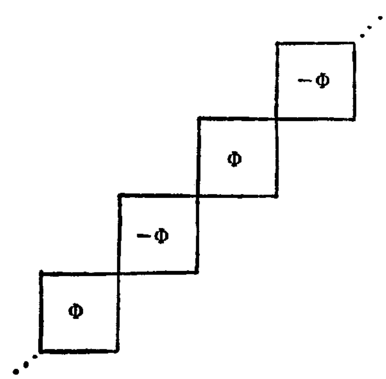

图 1

当 $p_1+p_2=\pm\pi$ 时, 括号内的因子为零, 因此 $A_i(x)+A_i(x-e_1-e_2)$ 不含 $p_1+p_2=\pm\pi$ 的傅氏分量. 由此可见, 如果理论中的动力学变量都以 $A_i(x)+A_i(x-e_1-e_2)$

的组合形式出现，就不会出现奇异性的困难。

简单的标量场 $\phi(x)$ 与 C-S 场的耦合，即(3.1)式形式的拉氏量不满足这一要求，因为在 ϕ 与 A 的耦合项中 C-S 场 $A_i(x)$ 单独地出现。因此必须考虑 C-S 场与物质场耦合的其它方式，使其中 C-S 场以 $A_i(x)+A_i(x-e_1-e_2)$ 的形式出现。

4.2 C-S 场与"哑铃"场的耦合理论

一种可能性是引入类似文献[9]的"哑铃"场 $\varphi(x,\sigma)$，$\sigma=\pm1$，如图 2 所示。这种场在 x 和 $x+\sigma(e_1+e_2)$ 两点上带有相同的 C-S 荷。这一点与文献[9]有所不同，因为文献[9]中引入了两种规范场，故两端点带不同的 C-S 荷。$\varphi(x,\sigma)$ 为玻色场，有对易关系(对于自由场)：

$$[\varphi(x,\sigma),\dot{\varphi}^+(x',\sigma')]=\delta_{\sigma\sigma'}\delta(x,x'). \tag{4.9}$$

$\varphi(x,\sigma)$ 与 C-S 场的耦合项为：

$$\varphi^+(x,\sigma)e^{i[A_j(x)+A_j(x+\sigma(e_1+e_2))]}\varphi(x+e_j,\sigma). \tag{4.10}$$

如图 3 所示。$A_0(x)$ 与物质场的耦合为 $A_0(x)J_0(x)$，其中 $J_0(x)$ 为：

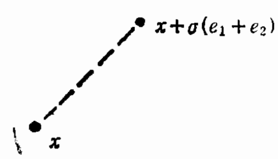

图 2

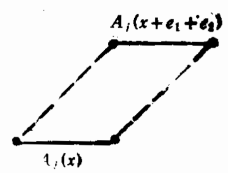

图 3

$$\begin{aligned}J_0(x)=\sum_\sigma i[&\varphi^+(x,\sigma)\Pi^+(x,\sigma)-\Pi(x,\sigma)\varphi(x,\sigma)+\varphi^+(x-\sigma(e_1+e_2),\sigma)\\&\cdot\Pi^+(x-\sigma(e_1+e_2),\sigma)-\Pi(x-\sigma(e_1+e_2),\sigma)\\&\cdot\varphi(x-\sigma(e_1+e_2),\sigma)].\end{aligned} \tag{4.11}$$

形式上，§ 3 中所有的推导仍然有效，不同的是由于在此理论中 C-S 场总以组合 $A_i(x)+A_i(x-e_1-e_2)$ 出现，因此其 $p_1+p_2=\pm\pi$ 分量退耦，理论不再出现由此处的奇异性引起的困难，因此得到了完全自洽的量子化格点 C-S 场理论。

4.3 格点 anyon 图象

现在只有 $A_l(x)+A_l(x+\sigma(e_1+e_2))$ 的组合才有意义，单个的 $A_l(x)$ 应视为没有物理意义。由 § 3 的对易关系可以求得：

$$\begin{aligned}&\frac{\theta}{4\pi^2}[A_l(x)+A_l(x-e_1-e_2),A_k(x)+A_k(x-e_1-e_2)]\\&\quad=i\varepsilon_{lk}[\delta(x-e_k,y)+\delta(x-e_k,y-e_1-e_2)].\end{aligned} \tag{4.12}$$

由上式可见 A_i 的对易关系不再出现奇异性。(4.8)式形式上也依然有效，但其中的 $J_0(x)$ 由(4.11)式给出。在(4.8)式的规范变换下有：

$$\begin{aligned}A'^i(x)+A'^i(x-e_1-e_2)=A^i(x)+A^i(x-e_1-e_2)-\Delta^i[\Lambda(x)\\+\Lambda(x-e_1-e_2)]=0,\end{aligned} \tag{4.13}$$

规范场被消去. 物质场变为:

$$\tilde{\varphi}(x,\sigma) = e^{-is\Sigma\Theta(r_\sigma,x')J_0(x')}\varphi(x,\sigma), \tag{4.14}$$

式中 $r_\sigma = x + \frac{\sigma}{2}(e_1 + e_2), s = \frac{2\pi}{\theta}$.

利用 $[\varphi(x,\sigma), \Pi(x',\sigma')] = i\delta(x,x')\delta_{\sigma\sigma'}$ 及性质

$$\Theta(r,x') - \Theta(r',x + e_1 + e_2) = -\Theta(r',x) + \Theta(r,x' + e_1 + e_2) = \pi,$$

其中 r, r' 以及整个公式的意义见图 4 所示, $\Theta(r,x')$ 是 $\overline{rx'}$ 线的多值极角的格点形式, 得到:

$$\tilde{\varphi}(x,\sigma)\tilde{\varphi}(x',\sigma) = e^{i2\pi s}\tilde{\varphi}(x'\sigma)\tilde{\varphi}(x,\sigma) \tag{4.15}$$

由于 s 取值的任意性, 故 $\tilde{\varphi}(x,\sigma)$ 具有分数统计的性质. 统计参数为 s. 显然 $\tilde{\varphi}^\dagger(x,\sigma)$ 为 anyon 产生算符, $\tilde{\varphi}(x,\sigma)$ 为 anyon 湮灭算符. 又由约束(3.8)知, 与 x 点上的荷 $q(x)$ 相联系的磁通为 $\Phi(r) + \Phi(r - e_1 - e_2)$, 只有这相邻方格上磁通之和才有物理意义, 单个方格上磁通没有意义. 把这两磁通之和写为 $\Phi'(x) = \Phi(r) + \Phi(r - e_1 - e_2)$, $\phi'(x)$ 为与 $q(x)$ 相联系的磁通, 因此格点 anyon 的图象如图 5 所示, 与哑铃场相联系的总磁通为 $\Phi = \frac{4\pi^2}{\theta} \cdot 2q$.

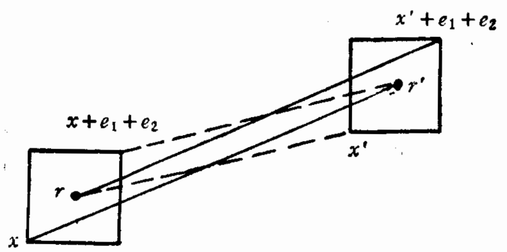

图 4

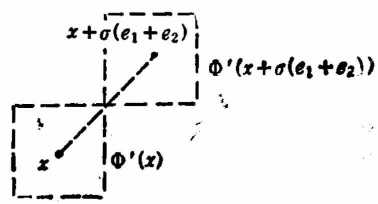

图 5

下面求 anyon 的自旋. 考虑单粒子态 $\tilde{\varphi}^\dagger(x,1)|0\rangle$, 虽然在格点情况下, 一般的旋转对称性被破坏, 但旋转 π 时, 上述格点表现出对称性. 绕 x 点旋转 2π 则上述单粒子态的位相变化为 $e^{-i2\pi s}$, 故自旋为 s. 这满足通常的自旋统计关系.

5 讨论及结论

综上所述, 本文得到了比文献[7]更简单且自洽的量子化的 naive 格点 C-S 理论. 但为消除奇异性必须引入"哑铃"场, 这样得到的 anyon 带有二个单位电荷. 可以证明, 在(2.6)中选择不同于(2.7)式的其它的格点 C-S 形式同样也会遇到奇异性. 文献[9]用不同的定域 C-S 项也须引入哑铃物质场, 文献[7]用单个点电荷物质场, 但要引入在格点上非定域的 C-S 项. 由此可见, C-S 理论的规则化是非平庸的问题, 需要深入地研究.

本文理论的一个不足之处是只保留了旋转 π 角的对称性, 破坏了正方格点对称性. 通过在 $\mathscr{L}_{C-S}$ 中加入另一 C-S 项, 可以产生具有正方格点对称性的理论, 我们将进一步加

以研究。

参 考 文 献

[1] B.I. Halprin, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984)1583.
[2] R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988)2677.
[3] G. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988)517.
[4] C. Hagen, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1988) 1025; G. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1988)1026; C.R. Hagen, *Phys. Rev.*, **D44**(1991)2614.
[5] R. Jackiw and S.Y. Pi, *Phys. Rev.*, **D42**(1990) 3500; S. Forte, *Rev. Mod. Phys.*, **64**(1992) 193.
[6] E. Fradkin, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989)1322; E. Fradkin, *Phys. Rev.*, **B42**(1990)570.
[7] D. Eliezer, and G.W. Semenoff., *Ann. Phys.*, **217**(1992)66.
[8] M. Lüscher, *Nucl. Phys.*, **B326**(1989) 557.
[9] R. Kantor and L. Susskind, *Int.J. Mod. Phys.*, **B5**(1991)2701.
[10] R. Banerjee, *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992)17.
[11] P.M.A. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva Univ. NY, 1964).

Quantization of Lattice Chern-Simons Theory

Guo Shuohong Fang Xiyan
(*Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou* 510275)
Received on December 30, 1992

Abstract

We discuss the naive lattice formulation of Chern-Simons theory, and quantize the simplest case using the Dirac quantization method for constrained system. We show that there is some singularity in the naive lattice theory, and find a way to avoid it. We also obtain the anyon creation operator.

Key words lattice Chern-Simons, gauge-independent quantization, anyon.