第 18 卷 第 9 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 18, No. 9
1994 年 9 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Sep., 1994

维数正规化和 NJL 模型 π 介子性质

张建玮　　邓卫真　杨泽森　杨立铭
（北京大学技术物理系　北京 100871）　（北京大学物理系　北京 100871）

1993 年 4 月 23 日收到

摘　要

利用定义于Grassmann扩展空间的 Dirac 代数算符表象的维数正规化方案，研究 Nambu-Jona-Lasinio (NJL)模型中的 π 介子模式的性质.说明维数正规化方法可以给出 NJL 模型中强子模式的解析形式和相应的符合实验的数值结果.

关键词　维数正规化，π 介子模式，Nambu-Jona-Lasinio 模型.

1 引　言

近年来，人们对 Nambu-Jona-Lasinio (NJL) 模型[1]在夸克层次的研究有着广泛的兴趣[2-10]. 对于 NJL 模型这类非重整化的场论，在维数正规化过程中不能使用 Dirac 代数的矩阵表象，而必须利用算符表象及其在数学上类似于规范场量子化时对 Minkowski 空间的扩展，即必须作 2 维 Grassmann 空间的扩展[2]. 在规范场量子化时，作维数为 2 的扩展，是因为 Fadeev Popov 鬼限制 4 维胶子场的自由度. 本文第二节概述 Minkowski 空间的算符表象及其 Grassmann 扩展. 第三、四节给出相应的维数正规化方法，并用来计算 NJL 模型中的 π 介子模式的性质，包括静态性质和一些形状因子. 最后给出数值结果和讨论.

2　Minkowski 空间的算符表象及其 Grassmann 扩展

在 Minkowski 空间有 4 个单位矢 e_μ, ($\mu=0,1,2,3$)，它们各对应两个算符：$g_\mu^\dagger$，g_μ（产生和湮没），它们满足反对易关系

$$\{g^\mu, g_\nu^\dagger\} = \delta_\nu^\mu,\ \{g^\mu, g^\nu\} = 0,\ \{g_\mu^\dagger, g_\nu^\dagger\} = 0. \tag{2.1}$$

这些算符是作用于真空态$|0\rangle$的，即 $g_\mu|0\rangle = 0$. 它们是强作用不变的.

定义 Γ 算符

$$\Gamma_\mu = g_\mu^\dagger + g_{\mu\nu}g^\nu, \tag{2.2}$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 是 Minkowski 空间的度规张量，Γ 算符满足反对易关系

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}^\prime, \tag{2.3}$$

其中

$$g^{s}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}+g_{\nu\mu}) \tag{2.4}$$

表示对称化的度规张量，由于(2.3)式即为 Dirac Γ 矩阵的反对易关系，故称(2.2)式 Γ_μ 算符方程为 Dirac 代数的一个表象.

可以推广矩阵求迹计算为

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_{\mu_1}\cdots\Gamma_{\mu_n})=\langle 0|\Gamma_{\mu_1}\cdots\Gamma_{\mu_n}|0\rangle, \tag{2.5}$$

且

$$\langle 0|0\rangle=4. \tag{2.6}$$

这样，即可得到类似的矩阵求迹（奇数个乘积为 0，偶数个乘积由 Wick 定理得出）结果.

算符 Γ_5 定义为

$$\Gamma_5=-i\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3, \tag{2.7}$$

它与所有 Γ_μ 反对易

$$\{\Gamma_5,\Gamma_\mu\}=0. \tag{2.8}$$

即 Γ_5 也满足 γ_5 类似的关系(如 $\Gamma_5^2=1$，$\langle 0|\Gamma_5\Gamma_{\mu_1}\Gamma_{\mu_2}\Gamma_{\mu_3}\Gamma_{\mu_4}|0\rangle=4i\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 等).

为得到维数正规化中的形式维数关系

$$n=g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}, \tag{2.9}$$

可由 2 个单位矢量 e_{-2}, e_{-1} 表示的附加维数扩展的物理 Minkowski 空间，选择推广的 Minkowski 空间矢量 k^μ 中的附加分量 k^{-2} 和 k^{-1} 正比于 Grassmann 变量得到[2]，这样由反对易关系保证：

$$(k^2)_{扩展空间}=(k^2)_{\mathrm{Minkowski}空间}. \tag{2.10}$$

这样，Γ^μ 的定义扩展到 6 维情况，而(2.10)式保证圈图积分不变，Γ_5 的定义采用

$$\Gamma_5=\Gamma_{-2}\Gamma_{-1}\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3, \tag{2.11}$$

定义扩展空间中的度规张量为

$$(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} i & -i & \\ i & -i & 0 \\ 0 & & g^0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

其中 $g^0=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Γ_μ 算符的乘积是一个纯数：$\Gamma_\mu\Gamma_\mu=g_{\mu\mu}$，而 $\Gamma_{-2}\Gamma_{-1}$ 的 $\Gamma_{\mu_1}\Gamma_{\mu_2}$ 乘积的真空期望值为：$\langle 0|\Gamma_{-2}\Gamma_{-1}\Gamma_{\mu_1}\Gamma_{\mu_2}|0\rangle=4g_{-2-1}g_{\mu_1\mu_2}$，$\Gamma_5$ 的关系式(2.8)仍正确，但 $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ 在 Minkowski 空间外的指标为 0.

共轭度规张量在 Grassmann 空间中度规张量的逆无意义，这点与 Euclidran 空间中不同. 实际上 k^{-2} 和 k^{-1} 均不能求逆. 选择下列定义

$$(g^{\mu\nu})=\begin{pmatrix} i\varepsilon & 0 & \\ 0 & -i\varepsilon & 0 \\ 0 & & g^0 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

由此定义，

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}g^{s}_{\mu\nu}=4-2\varepsilon, \tag{2.14}$$

故必须将 ϵ 恒等于参数方程中的光滑截断参数 $\epsilon = 2 - n/2$。

注意到 Γ_5 与 6 个 Dirac 算符的乘积与 Dirac 代数中的矩阵表象的结果不同：

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_5\Gamma_{\mu_1}\Gamma_{\mu_2}\Gamma_{\mu_3}\Gamma_{\mu_4}\Gamma_{\mu_5}\Gamma_{\mu_6}) = 4i\sum_{m<n}\sum_{i<j<k<l}(-)^{m-n+1}\varepsilon_{\mu_i\mu_j\mu_k\mu_l}g_{\mu_m\mu_n}. \tag{2.15}$$

上式中 $i\cdots n$ 由 1 到 6，互不相等．另外，注意到算符表象不满足循环关系：

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5;\mu_6} &= \mathrm{Tr}(\Gamma_5\Gamma_{\mu_1}\Gamma_{\mu_2}\Gamma_{\mu_3}\Gamma_{\mu_4}\Gamma_{\mu_5}\Gamma_{\mu_6}) - \mathrm{Tr}(\Gamma_{\mu_6}\Gamma_5\Gamma_{\mu_1}\Gamma_{\mu_2}\Gamma_{\mu_3}\Gamma_{\mu_4}\Gamma_{\mu_5})\\ &= 8i(+g^{\epsilon}_{\mu_1\mu_6}\varepsilon_{\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5} - g^{\epsilon}_{\mu_2\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5}\\ &\quad + g^{\epsilon}_{\mu_3\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5} - g^{\epsilon}_{\mu_4\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5} + g^{\epsilon}_{\mu_5\mu_6}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}),\end{aligned} \tag{2.16}$$

条件是 Γ_{μ_6} 与 Γ_5 不收缩，否则 ε 将为 0．由(2.16)式导致轴矢流反常．

3 算符表象下的维数正规化

利用 Feynman 参数积分，可以将圈图被积函数表达成下列有理函数的形式

$$f_{P,\alpha}(k) = \frac{P(k)}{(k^2 + 2k\cdot Q - M^2)^{\alpha}}, \tag{3.1}$$

这个积分可以表示成下列复变泛函的形式

$$R[f_{P,\alpha}] \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, w(p^2)\, \frac{P(p-Q)}{(p^2 - Q^2 - M^2)^{\alpha}}. \tag{3.2}$$

考虑到 Wick 转动后，选择权重函数为[2]

$$w_{\Lambda,n}(p_E^2) = w_\Lambda(p_E^2)\cdot w_n(p_E^2), \tag{3.3}$$

其中

$$w_\Lambda(p_E^2) = \Theta(\Lambda^2 - p_E^2),\quad w_n(p_E^2) = \left(\frac{a^2}{p_E^2}\right)^{\epsilon}. \tag{3.4}$$

参数 $\epsilon = 2 - n/2$，当 ϵ 趋于零时，即所谓协变尖锐截断；当 Λ 趋于无穷，ϵ 为非零时，称为光滑截断．它压低圈图积分中大的 Euclidean 动量的贡献．圈图积分泛函(3.2)式在 $\Lambda\to\infty$时化成标准维数正规化形式：

$$R[f_{P,\alpha}] = \lambda^{2\epsilon}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}f_{P,\alpha}. \tag{3.5}$$

其中 λ 为标度参数，满足[3]

$$a^{2\epsilon} = \lambda^{2\epsilon}\frac{\Omega_n(2\pi)^4}{\Omega_4(2\pi)^n},\quad n = 4 - 2\epsilon,\quad \Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{3.6}$$

这个过程就是将维数正规化作为一个 $f_{P,\alpha}$ 的泛函形式，而不是作为 $f_{P,\alpha}$ 的 Riemann 积分．

引入不完整 Beta 函数

$$\mathrm{B}_X(m,n) = \int_0^X dt\,t^{m-1}(1-t)^{n-1},\ (X\leqslant 1). \tag{3.7}$$

当 $X = 1$ 时，(3.7)即为 Beta 函数，满足 $\mathrm{B}(m,n) = \Gamma(m)\Gamma(n)/\Gamma(m+n)$，其中 $\Gamma(n)$ 为 Gamma 函数．利用维数正规化方法，可以得到基本圈图积分

$$\lambda^{2\epsilon}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{1}{(k^2 - l^2)^{\alpha}} = i(-)^{\alpha}\frac{\Omega_n}{(2\pi)^n}\frac{\lambda^{2\epsilon}}{(M^2)^{\alpha - n/2}}\frac{1}{2}\mathrm{B}_{X[M^2]}\left(\frac{n}{2},\alpha - \frac{n}{2}\right), \tag{3.8}$$

其中 $X[M^2]=\frac{\Lambda^2}{M^2}\Big/\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}+1\right)$. 由(3.8)式还可以得到相应的微分表达式.

4 NJL 模型中 π 模式的性质

手征对称的四次夸克相互作用 $SU(2)_F$ 的 NJL 模型 Lagrangian 为[4-8]:

$$\mathscr{L}(x)=\bar{\psi}(x)(i\not{\partial}-m_0)\psi(x)+\mathscr{L}_{\rm int}(x)+\mathscr{L}_{\rm int}^{\rm Fierzed}(x);$$

其中

$$\mathscr{L}_{\rm int}(x)=\frac{G_S}{2}[(\bar{\psi}(x)\psi(x))^2+(\bar{\psi}(x)i\gamma_5\tau\psi(x))^2]. \tag{4.1}$$

模型中引入使手征对称破缺的流夸克质量 m_0 是为了得到 π 介子的物理质量. NJL 模型的最大缺点是它的不可重整化，不能计算高阶修正. 它只能作为引入某种截断后进行单圈图或平均场近似的有效模型. 在 Hartree-Fork 近似下由(4.1)式得到夸克的自能为

$$\begin{aligned}\Sigma(p)=iG_S\lambda^{2\varepsilon}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big\{&\frac{5}{2}(\mathrm{Tr}S_F(k)+i\Gamma_5\tau\mathrm{Tr}S_F(k)i\Gamma_5\tau)\\&-\frac{1}{2}(i\Gamma_5\mathrm{Tr}S_F(k)i\Gamma_5+\tau\mathrm{Tr}S_F(k)\tau)\\&-(\Gamma_\mu\mathrm{Tr}S_F(k)\Gamma^\mu+\Gamma_5\Gamma_\mu\mathrm{Tr}S_F(k)\gamma_5\gamma^\mu)\\&+\frac{1}{4}(\Sigma_{\mu\nu}\mathrm{Tr}S_F(k)\Sigma^{\mu\nu}-\Sigma_{\mu\nu}\tau\mathrm{Tr}S_F(k)\Sigma^{\mu\nu}\tau)\Big\},\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中对自旋和同位旋求迹. 夸克传播子由其自能定义:

$$S_F^{-1}(p)=\not{p}-\Sigma(p)-m_0. \tag{4.3}$$

这里自能与动量无关，夸克组分质量 m_q 与自能的关系为

$$m_q=\Sigma(p)|_{\not{p}=m_q}+m_0. \tag{4.4}$$

重新定义标度参数 $\bar{\lambda}^2=4\pi\lambda^2$，并在以后取夸克组分质量:

$$\bar{\lambda}=m_q. \tag{4.5}$$

在(4.2)式中仅第一项有贡献，利用维数正规化公式(3.8)，得到夸克质量的 Schwinger-Dyson (gap) 方程为

$$m_q=m_0-\frac{5m_q^3G_S}{(2\pi)^2}\left(\frac{\bar{\lambda}^2}{m_q^2}\right)^{\varepsilon}\frac{\mathrm{B}_{y_0}(2-\varepsilon,\varepsilon-1)}{\Gamma(2-\varepsilon)}. \tag{4.6}$$

其中 $y_0=\frac{\Lambda^2}{m_q^2}\Big/\left(\frac{\Lambda^2}{m_q^2}+1\right)$.

赝标-同位旋矢量 ($J^{PC}=0^{+-}$) π 介子的极化传播子为

$$J_{PP}(p^2)=3i\lambda^{2\varepsilon}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\{i\Gamma_5\tau S_F(k-p/2)i\Gamma_5\tau S_F(k+p/2)\}, \tag{4.7}$$

利用 Feynman 参数积分、维数正规化公式(3.8)及 gap 方程(4.6)得到

$$J_{PP}(z)=\frac{2}{5G_S}\left(1-\frac{m_0}{m}\right)\frac{1}{B_{y_0}(2-\varepsilon,\varepsilon-1)}\int_0^1 dx[1-x(1-x)z]^{-\varepsilon}$$

$$\times\{[1-x(1-x)z]B_{y_1}(2-\epsilon,\epsilon-1)+2x(1-x)zB_{y_1}(2-\epsilon,\epsilon)\}, \quad (4.8)$$

其中 $z=p^2/m_q^2$，$y_1=y_1(x)=\frac{\Lambda^2}{m_q^2}\Big/\left[\frac{\Lambda^2}{m_q^2}+1-x(1-x)z\right]$.

π 介子的衰变常数具有下列关系

$$f_\pi(p^2)p^\mu=N\sqrt{n_c/2}\,i\lambda^{2\epsilon}\int\frac{d^n k}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\{S_F(k-p/2)\Gamma_5\tau S_F(k+p/2)\Gamma_5\Gamma^\mu\tau\}, \quad (4.9)$$

其中N是归一化常数，n_c 是 QCD 色数（$n_c=3$），p^μ 是 π 的动量，在 π 的静止系 $p^\mu=(m_\pi,0,0,0)$，得到

$$f_\pi(z)=\frac{\sqrt{\frac{n_c}{2}}N}{\frac{5}{2}G_S m_q}\left(1-\frac{m_0}{m}\right)\frac{1}{B_{y_0}(2-\epsilon,\epsilon-1)}\int_0^1 dx(1+x^2z)^{-\epsilon}B_{y_2}(2-\epsilon,\epsilon), \quad (4.10)$$

其中 $y_2=y_2(x)=\frac{\Lambda^2}{m_q^2}\Big/\left(\frac{\Lambda^2}{m_q^2}+1+x^2z\right)$.

单圈图下不考虑矢量介子的贡献时，π 介子的电荷形状因子为[8]

$$F_\pi^{ch}(q^2)(p'+p)^\mu=N^2 i\lambda^{2\epsilon}\int\frac{d^n k}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\{S_F(k-p/2)\Gamma_5\tau$$
$$\times S_F(k+p/2)\Gamma^\mu S_F(k+q+p/2)\Gamma_5\tau\}. \quad (4.11)$$

归一化常数N由其零点归一化条件 $F_\pi^{ch}(0)=1$ 决定．由维数正规化方法和 Feynman 参数积分，得到

$$\frac{1}{N^2}=\frac{1}{5G_S m_q^2}\left(1-\frac{m_0}{m_q}\right)\frac{1}{B_{y_0}(2-\epsilon,\epsilon-1)}$$
$$\times\int_0^1 dx[1-x(1-x)z]^{(\epsilon+1)}\Big\{[2-x+x(1-x)^2]$$
$$\times B_{y_3}(2-\epsilon,\epsilon+1)+\left(2-x-\frac{x}{4-2\epsilon}\right)$$
$$\times[1-x(1-x)z]B_{y_3}(3-\epsilon,\epsilon)\Big\}. \quad (4.12)$$

其中 $y_3=y_3(x)=\frac{\Lambda^2}{m_q^2}\Big/\left[\frac{\Lambda^2}{m_q^2}+1-x(1-x)z\right]$.

由 π 介子极化传播子的极点及其留数可以确定 π 介子质量：

$$1-K_S J_{PP}(m_\pi^2)=0,\quad K_S=\frac{5}{2}G_S \quad (4.13)$$

和 πqq 耦合常数：

$$g_{\pi qq}^2(q^2)=-K_S\frac{q^2-m_\pi^2}{1-K_S J_{PP}(q^2)},\quad g_{\pi qq}(0)=m_\pi\left(\frac{K_S}{1-K_S J_{PP}(0)}\right)^{1/2}. \quad (4.14)$$

π 介子的电荷半径 $\langle r_\pi^2\rangle$ 由电荷形状因子的行为决定：

$$\langle r_\pi^2\rangle=-6\frac{d}{dq^2}F_\pi^{ch}(q^2)\Big|_{q^2=m_\pi^2}. \quad (4.15)$$

在手征极限下，有 $\langle r_\pi^2\rangle=\dfrac{3}{4\pi^2 f_\pi^2(0)}$. NJL 模型正规化参数 ϵ 和标量耦合常数 G_S 可以通过确定(4.13)式在壳时的 m_π 和(4.9)式 $f_\pi(0)$ 为其相应的静止系中的实验观测值而给定。由于模型中引入了使手征对称性明显破缺的夸克流质量，在 $SU_F(2)$ 对称下，由 $m_0=0$ 得到了 π 介子为零质量的 Goldstone 玻色子的性质。$m_0\neq 0$ 时，可以得到 π 介子的有限质量。考虑 m_0 的变化对模型的影响是有意义的。

当 m_0 不为零时，在 $O(m_\pi^2)$ 近似下仍然保持轴矢顶点 $\boldsymbol{\Gamma}_5^\sigma$ 的纵向部分的 Ward-Takahashi 恒等式成立，有

$$q_\sigma\boldsymbol{\Gamma}_5^\sigma(k,q)=iq\Gamma_5\tau-i\{\Gamma_5\tau\Sigma(k-q/2)+\Sigma(k+q/2)\Gamma_5\tau\}, \tag{4.16}$$

重复代入自能(4.2)式，得到 π 介子顶角函数 $q_\sigma\boldsymbol{\Gamma}_5^\sigma$ 所满足的 Bethe-Salpeter 方程

$$q_\sigma\boldsymbol{\Gamma}_5^\sigma(k,q)\big|_{q^2=m_\pi^2}=iq\Gamma_5\tau-\frac{5}{2}G_S\Gamma_5\tau i\lambda^{2\epsilon}\int\frac{d^n p}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\{S_F(p-q/2)\Gamma_5\tau \times S_F(p+q/2)q_\sigma\boldsymbol{\Gamma}_5^\sigma(p,q)\big|_{q^2=m_\pi^2}\}. \tag{4.17}$$

在壳的近似的 Goldstone 玻色子 π 介子的顶角函数可取为

$$\boldsymbol{\Gamma}_5(q)=C2q_\sigma\boldsymbol{\Gamma}_5^\sigma(p,q)\big|_{q^2=m_\pi^2}\approx C\Gamma_5\tau m_q, \tag{4.18}$$

可以证明 $C=f_\pi$，(4.18)式即为夸克层的 Goldberger-Treimann 关系：

$$g_{\pi qq}(m_\pi)=\frac{m_q}{f(m_\pi)}. \tag{4.19}$$

利用数值结果可以验证(4.19)式的有效性。

$\pi^0\to 2\gamma$ 的衰变宽度为

$$\Gamma_{\pi^0\to2\gamma}=\frac{1}{2!}\frac{1}{2m_\pi}\int\frac{d^3k_1}{2(2\pi)^3\omega_1}\int\frac{d^3k_2}{2(2\pi)^3\omega_2}\sum_{\epsilon_1,\epsilon_2}|\epsilon_1^\mu,\epsilon_2^\nu T_{\mu\nu}(k_1,k_2)|^2(2\pi)^4\delta^4(q_1-k_1-k_2), \tag{4.20}$$

其中 $T_{\mu\nu}(k_1,k_2)=\dfrac{1}{2}i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k_{1\alpha}k_{2\beta}T$ 为转移幅度：

$$T_{\mu\nu}(k_1,k_2)=-n_c\lambda^{2\epsilon}\int\frac{d^n k}{(2\pi)^n}\mathrm{Tr}\{S_F(k-k_1)\Gamma_{\mu_1}S_F(k)\Gamma_{\mu_2}S(k+k_2)\Gamma_5+\text{交换项}\}, \tag{4.21}$$

由维数正规化，利用由 Γ_5 定义得到的轴矢流发散关系[2]，得出

$$T=2\frac{g_{\pi qq}}{m_q}\frac{\alpha}{\pi}\frac{n_c}{3}\left(\frac{\bar\lambda^2}{m_q^2}\right)^\epsilon\frac{1}{\Gamma(2-\epsilon)}2\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2 B_{y_4}(2-\epsilon,1+\epsilon) \times\{1-x_1x_2z+(x_1+x_2-1)(x_1t_1+x_2t_2)\}^{-(1+\epsilon)}, \tag{4.22}$$

其中 $y_4=y_4(x_1,x_2)=\dfrac{\Lambda^2}{m_q^2}\Big/\left[\dfrac{\Lambda^2}{m_q^2}+1-x_1x_2z+(x_1+x_2-1)(x_1t_1+x_2t_2)\right]$, $t_1=\dfrac{k_1^2}{m_q^2}$, $t_2=\dfrac{k_2^2}{m_q^2}$, $\alpha=\dfrac{e^2}{4\pi}=\dfrac{1}{137}$. 对于在壳 π 介子 $z=z_0=\dfrac{m_\pi^2}{m_q^2}$ 和光子 $t_1=t_2=0$，有

$$T=2\frac{g_{\pi qq}}{m_q}\frac{\alpha}{\pi}\frac{n_c}{3}\left(\frac{\bar\lambda^2}{m_q^2}\right)^\epsilon\frac{1}{\Gamma(2-\epsilon)}2\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2 B_{y_4}(2-\epsilon,1+\epsilon)(1-x_1x_2z_0) \tag{4.23}$$

衰变宽度为 $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}=\frac{m_\pi^3}{64\pi}T^2$. 在软 π 近似（$m_\pi\to 0$）下，转移幅度为

$$T=2\frac{g_{\pi qq}}{m_q}\frac{\alpha}{\pi}\frac{n_c}{3}\left(\frac{\lambda^2}{m_q^2}\right)^{\epsilon}\frac{B_{y_1}(2-\epsilon,1+\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \tag{4.24}$$

5 结果和讨论

首先比较在不同的 m_0 值的结果. 作为输入参数的 G_S 和 ϵ 通过(4.13)式和(4.9)式符合 m_π 和 f_π，计算相应的 m_q、$g_{\pi qq}$ 和 $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}$ 等值，见表 1.

表 1 NJL 模型中的参数为 ϵ 和 G_S，由符合 π 介子质量 $m_\pi=139$MeV 和衰变常数 $f_\pi=93.3$MeV 给定.

m_0(MeV)	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
ϵ	1.121	1.152	1.186	1.219	1.252	1.286	1.320
G_S(GeV^2)	11.05	13.73	16.68	19.50	22.32	25.13	27.92
m_q(MeV)	301.2	303.5	305.7	307.8	309.7	311.5	313.0
$\bar{\Gamma}_{\pi^0\to 2\gamma}(0)$(eV)	11.91	12.38	12.62	13.02	13.46	13.93	14.44
$\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}(m_\pi^2)$(eV)	11.49	11.95	12.19	12.58	13.01	13.47	13.97
$\bar{g}_{\pi qq}(0)$	3.660	3.679	3.699	3.716	3.730	3.742	3.751
$g_{\pi qq}(m_\pi^2)$	3.585	3.603	3.623	3.637	3.659	3.662	3.665
$-m_0\langle 0\|\bar{\psi}\psi\|0\rangle$($\times 10^8$MeV^4)	1.291	1.304	1.294	1.296	1.297	1.299	1.302
$m_\pi^2\bar{f}_\pi^2(0)$($\times 10^8$MeV^4)	1.947	1.951	1.955	1.959	1.963	1.968	1.971
$\langle r_\pi^2\rangle^{1/2}$(fm)	0.542	0.541	0.540	0.540	0.540	0.539	0.539

这里随 m_0 上升，截断参数 ϵ 的值也上升. ϵ 的行为与通常所用的协变或非协变尖锐截断参数 Λ 的行为[6-8]相反，但耦合常数 G_S 的行为均为上升. 在尖锐截断中，大于截断参数 Λ 的四动量被绝对抑制，而在维数正规化中的情况有所不同. 大于某一标度参数的动量被部分抑制，而小于标度参数的动量被提升，并且相应的权重函数满足 Ward-Takahashi 恒等式. 耦合常数 G_S 对 m_0 的变化敏感，而夸克质量 m_q 和 π 介子半径 $\langle r_\pi^2\rangle$ 对 m_0 的变化不敏感，这是 NJL 模型手征对称性的流代数结果的要求.

计算表明，对于 π 介子光转移宽度 $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}$、$\pi$ 夸克耦合常数 $g_{\pi qq}$、夸克的真空凝聚 $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle$ 以及 π 介子耦合常数在物理 π 质壳的结果与软 π 结果相近. 并且，这些量都不是 m_0 的敏感量. 除 $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}$ 外，它们与一般 NJL 模型的计算及实验值相符. $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma}$ 的值与实验值（7.57eV）相差近 2 倍，是因为忽略了矢量介子的贡献[9]. 由于在一定意义上，维数正规化方法中可以考虑较大的动量，所以这种方法可以更好地用来研究 ρ 介子和 A_1 介子对 π 介子电磁性质的影响. 对于 Gell-Mann-Oakes-Renner 关系

$$m_\pi^2 f_\pi^2=-m_0\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle, \tag{5.1}$$

符合程度，本文的结果与其它 NJL 模型研究结果[5,8]相似. 期望包含 π 凝聚的结果[8]能改善这个符合程度.

在维数正规化下得到的 π 介子的性质与实验基本相符. 它与通常的尖锐截断同样具有较好的解析形式. 期望这种正规化方法也可以用在 NJL 模型的其它模式中，也能用

于 $SU(3)_F$ 的 NJL 模型[10]之中。

参 考 文 献

[1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys Rev.*, **122** (1961) 345; **124** (1961) 246.
[2] S. Kreward and K. Nakayama, *Ann. Phys.*, **216** (1992) 201.
[3] D. Ebert and H. Reinhardt, *Nucl. Phys.*, **B271** (1986) 188.
[4] T. Hatusda and T. Kunihiro, *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985) 158.
[5] V. Bernard, *Phys. Rev.*, **D34** (1986) 1601.
[6] V. Bernard, U. -G. Meissner and I. Zahed, *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 966.
[7] P. Ferstl, M. Schaden and E. Werner, *Nucl. Phys.*, **A452** (1986) 680.
[8] N. -W. Cao, C. M. Shakin and W. -D. Sun, *Phys. Rev.*, **C46** (1992) 2535.
[9] A. W. Blin, B. Hiller and M. Schaden, *Z. Phys.*, **A 336** (1988) 75.
[10] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl and W. Weise, *Nucl. Phys.*, **A516** (1990) 429; 469.

Dimensional Regularization and π-meson Properties in Nambu-Jona-Lasinio Model

Zhang Jianwei
(*Department of Technical Physics, Peking University, Beijing* 100871)
Deng Weizhen Yang Zesen Yang Liming
(*Department of Physics, Peking University, Beijing* 100871)
Received on April 23, 1993

Abstract

The dimensional regularization approach in the operator representation of the Dirac algebra defined in the extended Grassmann space is applied to investigate the properties of the π-meson mode in the Nambu-Jona-Lasinio model. It is shown that the analytic formula for hadronic modes in the Nambu-Jona-Lasinio model as well as the numerical results which fit the experimental data can be obtained by employing this method.

Key words dimensional regularization, π-meson mode, Nambu-Jona-Lasinio model.