第 19 卷 第 3 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 19, No. 3
1995 年 3 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1995

双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态*

周焕强　　贺劲松　　张新明[1)]

(四川师范大学物理系　成都　610066)

1994-01-17　收稿

摘　　要

明显构造了双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态,并利用 qs 积分给出了其完备性的证明.

关键词　双参数形变,谐振子,湮没算符, qs 积分,完备性.

1 引　　言

近年来,有关量子群和量子代数的研究受到学术界普遍的重视. 事实上,量子群这一概念自然地出现在 Faddeev 学派[1,2]关于量子完全可积系统理论的研究之中. 为了构造量子群 $SU_q(2)$ 的 Jordan-Schwinger 实现, Macfarlane[3]和 Biedenharn[4] 各自独立地提出了 q 谐振子的概念. 特别地,与通常相干态[5]类似, Biedenharn 引入了所谓的 q 相干态, 即 q 谐振子湮没算符的本征态. 为了使 q 相干态能够作为一个独立表象使用, Gray 和 Nelson[6] 推广了通常的 Cauchy 积分概念而代之以 q 积分,给出了 q 相干态的完备性证明. 其结果表明,和通常的相干态一样, q 相干态也是过完备(over-complete)的.

鉴于物理应用的考虑, 多参数形变量子群的研究[7-12]也受到普遍重视. 特别地, Chakrabarti 和 Jagannathan[11] 以及 Jing[12] 各自独立地提出了双参数 qs 形变谐振子, 并由此获得了双参数量子代数 $SU_q(2)$ 的有限维表示,文献[11]还构造了 qs 相干态,即双参数形变谐振子湮没算符的本征态. 作为 Gray 和 Nelson 工作的推广, 文献[13]证明了 qs 相干态的完备性. 另一方面, 为了研究非经典光场的性质, Hillery[14] 研究了光子(玻色子)湮没算符二次幂的本征态,即奇偶相干态,并证明这些相干态构成一个以非经典光场态作为基矢的完备表象. 一个自然的问题是, 是否存在双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态,即 qs 奇偶相干态,以及这些相干态是否构成一个完备表象. 本文给出了上述问题的肯定回答. 显然, 这对于考察双参数形变电磁场的量子统计特性将是有益的.

---

* 四川省教育委员会项目资助.

1) 云南省曲靖师范专科学校,曲靖 655000.

251—257

2 qs 导数和 qs 积分

为了完备起见,先回顾一下有关 qs 导数和 qs 积分的若干结果.

对于任何一个连续函数 $f(x)$,qs 导数定义为

$$\frac{d}{d_{qs}x} f(x) = \frac{f(s^{-1}qx) - f(s^{-1}q^{-1}x)}{s^{-1}qx - s^{-1}q^{-1}x}. \tag{1}$$

象通常的积分一样, qs 积分可以看作 qs 导数的逆运算. 对于有限区间 $[0,a]$ 上的函数,有

$$\int_0^a f(x)d_{qs}x = a(q^{-1} - q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1}f(q^{2n+1}sa). \tag{2}$$

而对于无限区间$[0,\infty]$的情形,则有

$$\int_0^{\infty} f(x)d_{qs}x = (q^{-1} - q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1}f(q^{2n+1}s). \tag{3}$$

故此

$$\frac{d}{d_{qs}x}(ax^n) = a[n]_{qs}x^{n-1}, \tag{4}$$

$$\int ax^{n-1}d_{qs}x = \frac{1}{[n]_{qs}}ax^n + \text{constant}. \tag{5}$$

其中 $[n]_{qs}$ 定义为

$$[n]_{qs} = \frac{(s^{-1}q)^n - (sq)^{-n}}{s^{-1}q - s^{-1}q^{-1}}. \tag{6}$$

显然,$[n]_{qs}$ 在替换 $q \to q^{-1}$ 下保持不变,且当 $s \to 1$ 时,

$$[n]_{qs} \to [n]_q \left([n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}\right).$$

类似地,定义 qs-阶乘 $[n]_{qs}! = [n]_{qs}[n-1]_{qs}\cdots\cdots[2]_{qs}[1]_{qs}$, 并规定 $[0]_{qs}! = 1$. 据此,可以定义 qs-指数函数 $e_{qs}(x)$ 为

$$e_{qs}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{qs}!}. \tag{7}$$

由(4)和(5)式,有

$$\frac{d}{d_{qs}x} e_{qs}(ax) = ae_{qs}(ax), \tag{8}$$

和

$$\int e_{qs}(ax)d_{qs}x = \frac{1}{a}e_{qs}(ax) + \text{constant}. \tag{9}$$

另一方面,从 qs 导数的定义有

$$\frac{d}{d_{qs}x}(f(x)g(x)) = \left(\frac{d}{d_{qs}x}f(x)\right)g(s^{-1}qx) + f(s^{-1}q^{-1}x)\frac{d}{d_{qs}x}(g(x)). \tag{10}$$

由此可得 qs 积分的分部积分公式为

$$\int_0^a f(s^{-1}q^{-1}x)\left(\frac{d}{d_{qs}x}g(x)\right)d_{qs}x = f(x)g(x)\Big|_0^a - \int_0^a\left(\frac{d}{d_{qs}x}f(x)\right)g(s^{-1}qx)d_{qs}x, \tag{11}$$

或者，等价地

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_{qs}x}(f(x)g(x))=f(s^{-1}qx)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_{qs}x}g(x)+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_{qs}x}f(x)\right)g(s^{-1}q^{-1}x), \tag{12}$$

和

$$\int_0^a f(s^{-1}qx)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_{qs}x}g(x)\right)\mathrm{d}_{qs}x=f(x)g(x)\Big|_0^a-\int_0^a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_{qs}x}f(x)\right)g(s^{-1}q^{-1}x)\mathrm{d}_{qs}x. \tag{13}$$

为了证明双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态的完备性，需要利用 Euler 公式的 qs 类似。为此，设 $-\xi$ 为 $\mathrm{e}_{qs}(x)$ 的最大零点。由于 ξ 只能为正数，且当 $q\to 1$、$s\to 1$ 时，$\mathrm{e}_{qs}(x)\to\exp(x)$，$-\xi\to-\infty$。而且 $q\to 0$ 时，$\mathrm{e}_{qs}(x)\to 1+x$，$-\xi\to -1$。因此，可以将 $\mathrm{e}_{qs}(x)$ 重新定义为

$$\mathrm{e}_{qs}(x)\equiv\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]_{qs}!} & x>-\xi\\ 0 & x\leqslant-\xi.\end{cases} \tag{14}$$

同样地，将函数 $f(x)=x^n$ 限制在 $x>-\xi$ 范围内，即

$$f(x)=\begin{cases}x^n & x>-\xi\\ 0 & x\leqslant-\xi.\end{cases} \tag{15}$$

则由分部积分公式(11)式有

$$\int_0^{\xi}\mathrm{e}_{qs^{-1}}(-s^{-2}x)x^n\mathrm{d}_{qs^{-1}}x=s^2[n]_{qs}!. \tag{16}$$

3　双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态

双参数形变谐振子产生算符 a_{qs}^{+} 和湮没算符 a_{qs} 满足如下的对易关系[11,12]：

$$a_{qs}a_{qs}^{+}-s^{-1}qa_{qs}^{+}a_{qs}=(sq)^{-N}. \tag{17}$$

和

$$[N,a_{qs}^{+}]=a_{qs}^{+},\ [N,a_{qs}]=-a_{qs}. \tag{18}$$

在 Fock 空间$\left\{|n\rangle_{qs}=\frac{(a_{qs}^{+})^n}{\sqrt{[n]_{qs}!}}|0\rangle_{qs},n=0,1,2,\cdots\cdots\right\}$内，显然有

$$a_{qs}^{+}|n\rangle_{qs}=\sqrt{[n+1]_{qs}}\,|n+1\rangle_{qs}, \tag{19}$$

$$a_{qs}|n\rangle_{qs}=\sqrt{[n]_{qs}}\,|n-1\rangle_{qs}, \tag{20}$$

$$a_{qs}|0\rangle_{qs}=0. \tag{21}$$

其中 ${}_{qs}\langle m|n\rangle_{qs}=\delta_{mn}$。Fock 空间的完备性由如下的单位分解表征：

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle_{qs}\,{}_{qs}\langle n|. \tag{22}$$

现在来构造双参数形变谐振子湮没算符二次幂的本征态。考虑如下两个态矢

$$|\psi_0\rangle=c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_{qs}!}}|2n\rangle_{qs}, \tag{23}$$

$$|\psi_1\rangle=c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_{qs}!}}|2n+1\rangle_{qs}. \tag{24}$$

其中 c_0 和 c_1 分别为相应态矢的待定归一化因子，α 为复参数. 可以证明这两个态均为 a_{qs}^2 的本征值为 α^2 的本征态(二重简并态)，即

$$a_{qs}^2|\psi_0\rangle = \alpha^2|\psi_0\rangle, \tag{25}$$

和

$$a_{qs}^2|\psi_1\rangle = \alpha^2|\psi_1\rangle. \tag{26}$$

其证明过程如下:

$$\begin{aligned} a_{qs}^2|\psi_0\rangle &= c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n-1]_{qs}!}} a_{qs}|2n-1\rangle_{qs} \\ &= c_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n-2]_{qs}!}} |2n-2\rangle_{qs} \\ &= \alpha^2|\psi_0\rangle. \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} a_{qs}^2|\psi_1\rangle &= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n]_{qs}!}} |2n\rangle_{qs} \\ &= c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n-1]_{qs}!}} |2n-1\rangle_{qs} \\ &= \alpha^2|\psi_1\rangle. \end{aligned} \tag{28}$$

另一方面，不难看出这两个态之间彼此正交，即

$$\langle\psi_0|\psi_1\rangle = 0. \tag{29}$$

现在来确定归一化因子 c_0 和 c_1. 为了简单起见，不妨设 c_0 和 c_1 均为实数，且 $|\alpha|^2 = x$，则由归一化条件可得

$$\langle\psi_0|\psi_0\rangle = c_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2n]_{qs}!} = c_0^2 A_0(x) = 1, \tag{30}$$

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = c_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_{qs}!} = c_1^2 A_1(x) = 1. \tag{31}$$

式中 $A_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{[2n]_{qs}!}$, $A_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_{qs}!}$. 为了确定 $A_0(x)$ 和 $A_1(x)$ 的具体形式，注意到

$$A_0(x) + A_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{qs}!} = \mathrm{e}_{qs}(x), \tag{32}$$

且

$$A_1(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_{qs}x}(A_0(x)). \tag{33}$$

故由(32)式可得关于 $A_0(x)$ 的一个一阶常系数线性非齐次 qs 微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_{qs}x} A_0(x) + A_0(x) = \mathrm{e}_{qs}(x). \tag{34}$$

不难求出其相应齐次 qs-微分方程的通解为

$$\tilde{A}_0(x) = B_0 \mathrm{e}_{qs}(-x) \tag{35}$$

式中 B_0 为积分常数. 令(34)式的特解为 $\tilde{\tilde{A}}_0(x) = B_0' \mathrm{e}_{qs}(x)$，代入(34)式可得

$B_0' = \frac{1}{2}$，故(34)式的通解为

$$A_0(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}_{qs}(x) + B_0\mathrm{e}_{qs}(-x). \tag{36}$$

利用 $A_0(x)$ 的级数表达式可确定积分常数 $B_0 = \frac{1}{2}$，故

$$A_0(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}_{qs}(x) + \mathrm{e}_{qs}(-x)\right) \equiv \cosh_{qs}(x), \tag{37}$$

$$A_1(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_{qs}x}A_0(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}_{qs}(x) - \mathrm{e}_{qs}(-x)\right) \equiv \sinh_{qs}(x). \tag{38}$$

式中 $\cosh_{qs}(x)$ 和 $\sinh_{qs}(x)$ 分别表示双曲余弦函数和双曲正弦函数的 qs 类似。

至此，已得到 a_{qs}^2 的两个正交归一本征态：

$$|\psi_0\rangle = (\cosh_{qs}(x))^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{[2n]_{qs}!}}|2n\rangle_{qs}, \tag{39}$$

$$|\psi_1\rangle = (\sinh_{qs}(x))^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{[2n+1]_{qs}!}}|2n+1\rangle_{qs}. \tag{40}$$

4　a_{qs}^2 的正交归一本征态的性质

这里讨论 a_{qs}^2 的正交归一本征态的两个数学性质。第一个性质是，在由 $|\psi_0\rangle$ 和 $|\psi_1\rangle$ 所组成的空间里，可通过 a_{qs} 的作用实现两个态之间的相互转换。事实上，a_{qs} 连续作用于任一态两次，可使态按 $|\psi_0\rangle \to |\psi_1\rangle \to |\psi_0\rangle$ 的顺序回复到自身，即

$$a_{qs}|\psi_0\rangle = \alpha A_0^{-\frac{1}{2}}A_1^{\frac{1}{2}}|\psi_1\rangle, \tag{41}$$

$$a_{qs}|\psi_1\rangle = \alpha A_1^{-\frac{1}{2}}A_0^{\frac{1}{2}}|\psi_0\rangle. \tag{42}$$

与 qs 相干态[13]的情形相类似，可将 $|\psi_0\rangle$ 和 $|\psi_1\rangle$ 看成在某个(受限制的)复参数 α 定义下的量子态矢，当 α 取不同值时，各态矢相应的内积不为零。例如，

$$\langle\psi_0(\alpha)|\psi_0(\alpha')\rangle = (A_0(|\alpha|^2)A_0(|\alpha'|^2))^{-\frac{1}{2}}A_0(\alpha^*\alpha') \neq 0. \tag{43}$$

这表明，在"α 平面"上 a_{qs}^2 的两个本征态自身不正交。

余下的问题是，证明上述两个正交归一化本征态构成一个 Hilbert 空间，亦即可以作为一个独立的表象，这等价于如下的单位分解

$$I = \int \mathrm{d}\mu(\alpha)(A_0|\psi_0\rangle\langle\psi_0| + A_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1|). \tag{44}$$

其中 $\mathrm{d}\mu(\alpha) = \frac{1}{2\pi s^2}\mathrm{e}_{qs-1}(-s^{-2}|\alpha|^2)\mathrm{d}_{qs^{-1}}|\alpha|^2\mathrm{d}\theta$。这里关于 $|\alpha|^2$ 为 qs 积分，而关于 θ 的积分为通常的积分。其证明过程如下：

$$\int \mathrm{d}\mu(\alpha)(A_0|\psi_0\rangle\langle\psi_0| + A_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1|)$$

$$= \int\mathrm{d}\mu(\alpha)\left(A_0c_0^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{2n}(\alpha^*)^{2n'}}{\sqrt{[2n]_{qs}![2n']_{qs}!}}|2n\rangle_{qs}\ {}_{qs}\langle 2n|\right.$$

$$+A_1c_1^2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n'=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{2n+1}(\alpha^*)^{2n'+1}}{\sqrt{[2n+1]_{qs}![2n'+1]_{qs}!}}|2n+1\rangle_{qs}\ {}_{qs}\langle 2n+1|$$

$$=\frac{1}{s^2}\int d_{qs^{-1}}|\alpha|^2 e_{qs^{-1}}(-s^{-2}|\alpha|^2)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2)^{2n}}{[2n]_{qs}!}|2n\rangle_{qs}\ {}_{qs}\langle 2n|$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2)^{2n+1}}{[2n+1]_{qs}!}|2n+1\rangle_{qs}\ {}_{qs}\langle 2n+1|\Big)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\int d_{qs^{-1}}|\alpha|^2\frac{1}{s^2[m]_{qs}!}e_{qs^{-1}}(-s^{-2}|\alpha|^2)(|\alpha|^2)^m|m\rangle_{qs\,qs}\langle m|$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle_{qs}\ {}_{qs}\langle m|=I. \tag{45}$$

其中倒数第二步利用了 Euler 公式的 qs 类似(16)式. 故此 a_{qs}^2 的两个正交归一本征态构成了完备表象. 例如, qs 相干态在该表象内可作如下的分解:

$$|\alpha\rangle_{qs}=(e_{qs}(|\alpha|^2))^{-\frac{1}{2}}(A_0^{\frac{1}{2}}|\psi_0\rangle+A_1^{\frac{1}{2}}|\psi_1\rangle). \tag{46}$$

5 结论和讨论

本文明显构造了 qs 玻色子湮没算符二次幂 a_{qs}^2 的本征态,并利用 qs 积分给出了这些本征态完备性的证明. 与未形变的情形相比较, 一个尚待研究的问题是这些正交归一本征态的量子统计性质. 这对于研究双参数形变电磁场的量子特性无疑是有益的.

作者感谢管习文的有益讨论.

参 考 文 献

[1] E.K. Sklynin, *Funct. Anal. Appl.*, **16**(1982) 262.
[2] P.P. Kulish N.Y. Reshetikhin, *J. Sov. Math.*, **23**(1983)2435.
[3] A. J, Macfarlane, *J. Phys.*, **A22**(1989)4581.
[4] L.C. Biedenharn, *J. Phys.*, **A22**(1989) L873.
[5] R.J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.*, **10**(1963) 84.
[6] R, W. Gray C.A. Neison, *J. Phys.*, **A23**(1990) L945.
[7] E.E. Demidov, Yu. I. Manin, E.E. Mukin D. z. Zhdanovich, *Prog. Theor. Phys. Supp.*, **102** (1990) 302.
[8] A. Sudbery, *J. Phys.*, **A23**(1990), L697.
[9] A. Schirrmacher, J. Wess, B. Zumino, *Z. Phys.*, **C49**(1991) 317.
[10] C. Burdik, L. Hlavaty. *J. Phys.*, **A24**(1991) 165.
[11] R. Chakrabarti R. Jagannathan, *J. Phys.*, **A24**(1991) L711.
[12] S. Jing, *Mod. Phys. lett.*, **A8**(1993) 543.
[13] 周焕强、张新明、贺劲松,私人通讯.
[14] M. Hillery, *Phys. Rev.*, **A36**(1987) 3796.

Eigenstates of the Second Power of the Annihilation Operator of Two-Parameter Deformed Harmonic Oscillator

Zhou Huanqiang　　He Jingsong　　Zhang Xinming
(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, 610066)
Received 17 January 1994

Abstract

The eigenstates of the second power of the annihilation operator of the two-parameter deformed harmonic oscillator are constructed, and their completeness is demonstrated in terms of the qs-integration.

Key words two-parameter deformed, harmonic oscillator, annihilation operator, qs-integration, completeness.