

# 热核表面能的 Thomas-Fermi 统计 模型理论\*

罗栓群<sup>1)</sup> 王正行<sup>2),3)</sup>

(北京大学技术物理系, 北京 100871)

1994-2-21 收稿

## 摘 要

用 Seyler-Blanchard 动量相关非定域相互作用的含温 Thomas-Fermi 统计理论, 对半无穷大核物质模型计算了核物质表面能系数  $\sigma(T, \delta)$  随温度  $T$  和不对称度  $\delta$  的变化, 发现在低温  $T \leq 5\text{MeV}$  和不对称度  $\delta \leq 0.2$  时, 可以近似写成  $\sigma(T, \delta) = \sigma_0(T)[1 + K(T)\delta^2]$ , 其中  $\sigma_0(T)$  和  $K(T)$  可以拟合成温度  $T$  的二次函数。

**关键词** 热核, 表面能, Thomas-Fermi 模型。

## 1 引 言

在中、高能重离子碰撞和超新星爆发过程的研究中, 热核表面能都是一个重要的因素<sup>[1,2]</sup>。零温情形的研究表明, 对于致密核物质的相变和相的稳定性来说, 核物质的表面能是一个非常敏感的因素<sup>[3,4]</sup>。这在中、高能重离子碰撞过程中, 会对重核碎裂和碎片形成的微观机制产生重要的影响, 而在超新星爆发过程中, 会影响致密物质物态方程的硬度, 从而影响到超新星爆发的动力学过程乃至最后形成的中子星的内部结构。另一方面, 零温核物质表面能与体积能一样, 对于不对称度  $\delta$  有明显的依赖关系。核物质不对称度  $\delta$  的定义是

$$\delta = \frac{n_n - n_p}{n}, \quad (1)$$

其中  $n_n$  和  $n_p$  分别是核物质中子数密度和质子数密度,  $n = n_n + n_p$  是核物质的核子数密度。对成块核物质的热性质来说, 温度  $T$  与不对称度  $\delta$  都是同样重要的<sup>[5,6]</sup>。这就意味着, 在考虑表面能对不对称度  $\delta$  的依赖关系的同时, 也有必要考虑表面能对温度  $T$  的依赖关系。本文的目的, 就是用 Seyler-Blanchard 动量相关非定域相互作用和 Thomas-Fermi 统计理论, 和半无穷大核物质模型, 来计算核物质表面能系数  $\sigma(T, \delta)$  随温度  $T$  和不对

\* 国家自然科学基金资助。

1) 现地址: 中国科学院高能物理研究所, 北京 100039。  
2) 中国高等科学技术中心(世界实验室), 北京 100080。  
3) 中国科学院理论物理研究所, 北京 100080。

称度  $\delta$  的变化, 这是为建立热原子核的宏观模型所必需的. 本文采用约化普朗克常数和玻耳兹曼常数等于 1 的单位:  $\hbar = k_B = 1$ .

## 2 理论模型

考虑到核子间的强相互作用, 对于核物质体系的统计性质, 我们采用 Thomas-Fermi 统计理论, 而对核子间的强相互作用, 采用 Seyler-Blanchard 唯象相互作用势<sup>[7]</sup>,

$$V(r, k) = -C_{l,n} \frac{e^{-r/a}}{r/a} \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_D} \right)^2 \right], \quad (2)$$

其中  $C_l$  是同类核子 (p-p 或 n-n) 之间的相互作用强度参数,  $C_n$  是不同类核子 (p-n) 之间的相互作用强度参数,  $a$  是相互作用力程,  $k_D$  是临界相对动量. 与 Skyrme 相互作用不同, Seyler-Blanchard 相互作用不仅与核子间相对距离  $r$  有关, 还与核子间相对动量  $k$  有关, 是一种非定域相互作用, 相应的 Thomas-Fermi 统计理论给出的是一组关于中子数密度分布  $n_n(r)$  和质子数密度分布  $n_p(r)$  的非线性积分方程<sup>[8]</sup>,

$$\frac{k_D^3}{2m} [\Theta_\tau(r) - \Gamma_\tau(r)] - \mu_\tau + T y_\tau = 0, \quad (3)$$

其中  $\tau = +1$  或  $-1$  相应于质子 p 或中子 n,  $\mu_\tau$  是核子化学势,

$$\Gamma_\tau(r) = \int d^3r' f(r, r') \gamma_\tau(r'), \quad (4)$$

$$\Theta_\tau(r) = \int d^3r' f(r, r') \theta_\tau(r'), \quad (5)$$

$$\gamma_\tau(r) = \frac{3\pi^2}{k_D^3} [\alpha n_\tau(r) + \beta n_{-\tau}(r)], \quad (6)$$

$$\theta_\tau(r) = \frac{3\pi^2}{k_D^3} [\alpha t_\tau(r) + \beta t_{-\tau}(r)], \quad (7)$$

$$f(r, r') = \frac{e^{-|r-r'|/a} - e^{-(r+r')/a}}{8\pi a r r'}. \quad (8)$$

方程(3)中的  $y_\tau$  通过下列关系依赖于温度  $T$  和密度  $n_\tau$ :

$$n_\tau(r) = \frac{1}{2\pi^2} (2m_\tau^* T)^{3/2} F_{1/2}(y_\tau), \quad (9)$$

其中  $m_\tau^*$  是核子有效质量,  $F_{1/2}(y_\tau)$  是  $y_\tau$  的 1/2 阶费米函数<sup>[9]</sup>,

$$m_\tau^*(r) = m [1 + \Gamma_\tau(r)]^{-1}, \quad (10)$$

$$F_p(y) = \int \frac{x^p dx}{e^{x-y} + 1}. \quad (11)$$

(6)和(7)式中的  $\alpha$  和  $\beta$  是文献[10]中采用的无量纲相互作用强度参数,

$$\alpha, \beta = \frac{8m a^3 k_D}{3\pi} C_{l,n}, \quad (12)$$

而(7)式中的  $t_\tau$  通过下列关系依赖于温度  $T$  和密度  $n_\tau$ :

$$t_\tau(r) = \frac{1}{2\pi^2} (2m_\tau^* T)^{5/2} F_{3/2}(y_\tau). \quad (13)$$

在低温时,(7)式可近似用  $n_r(r)$  表达为

$$\theta_r(r) = \frac{3}{5} \left\{ (\alpha Q_r^2 + \beta Q_{-r}^2) + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_D} \right)^2 \left[ \alpha \left( \frac{m_r^*}{m} \right)^2 Q_r + \beta \left( \frac{m_{-r}^*}{m} \right)^2 Q_{-r} \right] \right\}, \quad (14)$$

其中

$$Q_r(r) = \frac{[3\pi^2 n_r(r)]^{1/3}}{k_D} \quad (15)$$

是文献[10]中采用的约化无量纲动量,而

$$T_D = \frac{k_D^2}{2m}. \quad (16)$$

在此近似下,方程(3)可简化为

$$\frac{m}{m_r^*} Q_r^2 \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{m_r^* T}{m T_D} \right)^2 Q_r^{-4} \right] = \frac{\mu_r}{T_D} + \Gamma_r(r) - \Theta_r(r). \quad (17)$$

在零温  $T = 0$  时,上式左边方括号中第二项为零,方程进一步简化为

$$Q_r^2 = \frac{\mu_r/T_D + \Gamma_r(r) - \Theta_r(r)}{1 + \Gamma_r(r)}, \quad (18)$$

这正是零温核物质中子数密度分布  $n_n(r)$  和质子数密度分布  $n_p(r)$  的 Seyler-Blanchard 积分方程<sup>[7,10]</sup>.

类似地,在低温时,(13)式可近似用  $n_r(r)$  表达为

$$t_r(r) = \frac{[3\pi^2 n_r(r)]^{5/3}}{5\pi^2} \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12} (2m_r^* T)^2 [3\pi^2 n_r(r)]^{-4/3} \right\}. \quad (19)$$

### 3 数值计算

在 Seyler-Blanchard 唯象相互作用势(2)式中包含四个参数  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $a$  和  $k_D$ , 通过有限核 Thomas-Fermi 统计理论计算与原子核质量和大小的拟合,可以定出<sup>[11,12]</sup>

$$C_1 = 354.069 \text{ MeV}, C_2 = 516.638 \text{ MeV}, a = 0.557 \text{ fm}, k_D = 409.456 \text{ MeV}/c. \quad (20)$$

与这些值相应的原子核半径常数  $r_0$ , 体积能  $a_1$ , 对称能  $J$ , 表面能  $a_2$  和表面对称能  $Q$  分别为<sup>[12]</sup>

$$r_0 = 1.159 \text{ fm}, a_1 = 16.1 \text{ MeV}, J = 34.0 \text{ MeV}, a_2 = 18.011 \text{ MeV}, Q = 28.66 \text{ MeV}. \quad (21)$$

在零温  $T = 0$  时, 可以用迭代法从非线性积分方程组(18)来计算有限核或半无穷核表面的性质,这在文献[10,12]中已作过详尽的讨论. 对于原子核表面, 采用半无穷核物质模型,就简化成沿  $x$  轴的一维问题. 核物质表面位置  $x_r$  可以定义为

$$n_r(x_r) = \frac{1}{2} [n_r(-\infty) + n_r(\infty)]. \quad (22)$$

对于给定的不对称度  $\delta$ , 给出一组初始分布  $n_r^{(0)}(x)$ , 代入方程组(18), 就可算出一组新的分布  $n_r^{(1)}(x)$ . 把这样得到的分布  $n_r(x)$  作为新的初始分布再代回方程组(18), 如此反复迭代, 直到前后两组分布之差处处小于规定的误差范围, 它们的平均就是所要求的分布  $n_r(x)$ .

对低温  $T \leq 5 \text{ MeV}$  的情形, 可以用迭代法从非线性积分方程组(17)来计算. 对于给

定的温度  $T$  和不对称度  $\delta$ , 用上面在零温情形求得的分布  $n_r(x)$  作为初始分布  $n_r^{(0)}(x)$ , 代入非线性积分方程组(17), 经过大约 25 次迭代, 就可求得满足误差要求的解。

有了核子数密度分布  $n_r(x)$ , 就可以用它们来计算有关的物理量。在我们的 Thomas-Fermi 统计模型中, 核物质中定域核子能量密度为<sup>[8,10]</sup>

$$\varepsilon(x) = \sum_r \left[ \frac{t_r(x)}{2m} + \frac{1}{2} n_r(x) v_r(x) \right], \quad (23)$$

其中

$$v_r(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} [\Gamma_r(x) - 2\Theta_r(x)]. \quad (24)$$

相应地, 核物质表面能系数可以写成<sup>[12]</sup>

$$\sigma(T, \delta) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon(x) - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \frac{n(x) - n_2}{n_1 - n_2} \right] dx, \quad (25)$$

它还可以化成

$$\sigma(T, \delta) = \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_1} - \frac{n(x)}{n_1} \right] dx, \quad (26)$$

其中

$$n_1 = n(-\infty), \quad n_2 = n(+\infty); \quad (27)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(-\infty), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon(+\infty), \quad (28)$$

分别是在核物质表面内和表面外核子数密度和核物质能量密度的渐近值。

代入(24), (4)和(5)式计算  $\varepsilon(x)$  时, 要用到  $\theta_r(x)$  和  $t_r(x)$  的低温近似式(14)和(19)。在低温  $T \leq 5\text{MeV}$  时, (19)式右边大括号中第二项小于 0.08, 比起第一项 1 可以略去。这相当于假设有效自由核子气体是完全简并的。

## 4 结果和讨论

我们计算了低温  $T \leq 5\text{MeV}$  和低不对称度  $\delta \leq \delta_D$  的情形,  $\delta_D = 0.30475$  是零温核物质的中子溢出点<sup>[12,13]</sup>。计算结果表明, 中子溢出点随着温度的增加而缓慢地下降, 表面能系数则随着温度的增加而缓慢地增加。图 1 是温度  $T=1\text{MeV}$  和  $4\text{MeV}$  时的表面能系数  $\sigma$  随不对称度  $\delta$  的变化。对于给定不对称度  $\delta$  时表面能系数  $\sigma$  随温度  $T$  的变化与此相似。温度一定时, 不对称度从 0 增加到 0.2, 表面能系数增加约百分之十六; 不对称度一定时, 温度从 0 增加到  $5\text{MeV}$ , 表面能系数增加约百分之八。

我们发现在低温  $T \leq 5\text{MeV}$  和低不对称度  $\delta \leq 0.2$  时, 核物质表面能系数  $\sigma(T, \delta)$  随温度  $T$  和不对称度  $\delta$  的变化可以近似写成

$$\sigma(T, \delta) = \sigma_0(T)[1 + K(T)\delta^2], \quad (29)$$

其中  $\sigma_0(T)$  和  $K(T)$  可以拟合成温度  $T$  的二次函数,

$$\sigma_0(T) = 1.159 + 1.471 \times 10^{-2}T + 1.077 \times 10^{-3}T^2, \quad (30)$$

$$K(T) = 4.997 + 2.343 \times 10^{-1}T - 8.586 \times 10^{-2}T^2, \quad (31)$$

这里温度  $T$  的单位是 MeV。

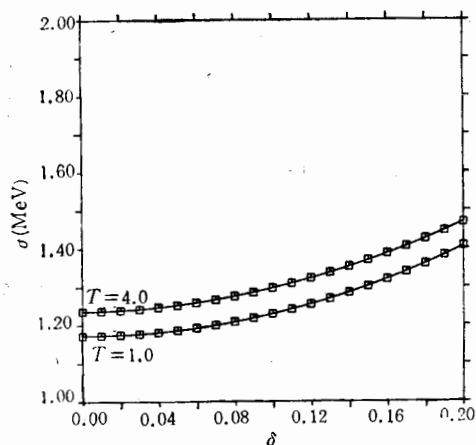


图 1

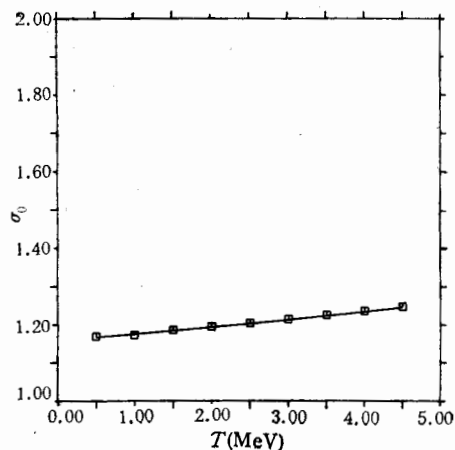


图 2

图 2 是  $\sigma_0(T)$  随温度  $T$  的变化, 图中的方块是上述数值计算的结果, 曲线是用(30)式算得的结果, 温度从 0 增加到 5MeV,  $\sigma_0$  从 1.16 缓慢地增加到 1.26。图 3 是  $K(T)$  随

温度  $T$  的变化, 图中的方块是上述数值计算的结果, 曲线是用(31)式算得的结果,  $K$  在  $T \approx 1.5\text{MeV}$  处有相当平缓的极大  $K \approx 5.15$ , 然后随温度的增加而下降, 当  $T = 5\text{MeV}$  时降到  $K \approx 4$ 。图 1 中的方块是上述数值计算的结果, 曲线是用(29)–(31)式算得的结果。可以看出, 公式(29)–(31)能很好地拟合数值计算的结果。

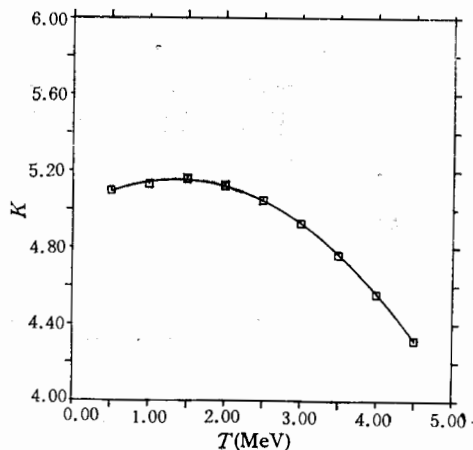


图 3

0 的情形一样<sup>[4]</sup>, 这里的结果与 Ravenhall 等人<sup>[1,2]</sup>用 Skyrme 相互作用的结果定性上是一致的。Skyrme 相互作用是定域相互作用, 为了描述表面能的特征, 它引入了与核子数密度的空间变化率有关的项, 相应的 Thomas-Fermi 统计理论给出的决定核子数密度分布  $n_n(r)$  与  $n_p(r)$  的方程是微分方程而不是积分方程。事实上, 这两种相互作用都是唯象相互作用, 各有优缺点, 选择哪一个在很大程度上取决于人们的习惯与偏爱, 没有很基本的道理。

我们对核物质表面采用半无穷大核物质模型, 这相当于略去了表面曲率所引起的改正。在零温情形, 表面曲率所引起的改正不是主要的。在考虑温度的效应时, 作为第一级近似, 可以略去表面曲率所引起的改正。

虽然我们只作了低温  $T \leq 5\text{MeV}$  的计算, 但用本文的方法计算较高温度的情形并无原则性困难。困难在于至今还没有关于核物质表面能系数随温度  $T$  和不对称度  $\delta$  变化的直接的实验知识。与零温  $T =$

把这里算得的核物质表面能系数  $\sigma(T, \delta)$  和以前用同样理论和参数算得的核物质体积能系数  $a_1(T, \delta)$ <sup>[6]</sup> 结合起来, 就可以构造热原子核的宏观模型。把这样构造的热原子核宏观模型用来讨论高能重离子碰撞中重核的碎裂和碎片的形成, 以及超新星爆发的过程, 就有可能从这两个领域的实验和观测现象来分析相互作用参数  $C_1, C_n, a$  和  $k_D$  的取值, 从而为这种唯象核力的合理性提供不同的实验观测证据。在零温情形, W. D. Myers 和 W. J. Swiatecki 已根据原子核质量和裂变位垒等实验观测值对 Seyler-Blanchard 相互作用作了修改<sup>[13]</sup>。对于热原子核, 这种进一步的修改也是需要考虑的, 但这已大大超出了本文的范围。

### 参 考 文 献

- [1] D. G. Ravenhall, C. J. Pethick, and J. M. Lattimer, *Nucl. Phys.*, **A407**(1983) 571.
- [2] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, D. G. Ravenhall and D. Q. Lamb, *Nucl. Phys.*, **A432**(1985) 646.
- [3] R. D. Williams and S. E. Koonin, *Nucl. Phys.*, **A435**(1985) 844.
- [4] C. S. Wang and W. D. Myers, *Nucl. Phys.*, **A455**(1990) 225.
- [5] C. S. Wang and D. Z. Zhang, *Phys. Rev.*, **C40**(1989) 2881.
- [6] Cheng-Shing Wang, *Commun. in Theor. Phys. (Beijing, China)*, **9**(1988) 161.
- [7] R. G. Seyler and C. H. Blanchard, *Phys. Rev.*, **124**(1961) 227; *Phys. Rev.*, **131**(1963) 355.
- [8] Cheng-Shing Wang, *Phys. Rev.*, **C45**(1992) 1084.
- [9] E. C. Stoner, *Phil. Mag.*, **28**(1939) 257.
- [10] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **55**(1969) 395.
- [11] H. von Groote, Proc. 3rd Int. Conf. on nuclei far from stability, ed. R. Klapisch, CERN 76-13 (1976), p. 595.
- [12] W. D. Myers, W. J. Swiatecki and C. S. Wang, *Nucl. Phys.*, **A436**(1985) 185.
- [13] Cheng-Shing Wang and William D. Myers, *Commun. in Theor. Phys. (Beijing, China)*, **8**(1987) 397.
- [14] Cheng-Shing Wang, *Commun. in Theor. Phys. (Beijing, China)*, **8**(1987) 187.
- [15] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **204**(1990) 401.

## Thomas-Fermi Statistical Model Theory for the Surface Energy of Hot Nuclei

Luo Shuanqun Wang Zhengxing

(Department of Technical Physics, Peking University, Beijing 100871)

Received 21 February 1994

### Abstract

The surface energy coefficient of nuclear matter  $\sigma(T, \delta)$  as a function of temperature  $T$  and nuclear asymmetry  $\delta$  is calculated for the semi-infinite model of nuclear matter, using the temperature-dependent Thomas-Fermi statistical model theory with the Seyler-Blanchard momentum-dependent nonlocal interaction. It was found that the surface energy coefficient can be written approximately as  $\sigma(T, \delta) = \sigma_0(T)[1 + K(T)\delta^2]$ , where the  $\sigma_0(T)$  and  $K(T)$  can be fitted as quadratic functions of the temperature  $T$ .

**Key words** hot nuclei, surface energy. Thomas-Fermi model.