

# 2+1 维 $SU(3)$ 格点纯规范场的 真空态计算\*

陈启洲 方锡岩 郭硕鸿

(广州中山大学物理系 510275)

1994-02-01 收稿

## 摘 要

用连续极限截断的格点本征值方法<sup>[1]</sup>, 研究 2+1 维  $SU(3)$  的格点规范理论的真空态。在强耦合区, 上述方法的结果与强耦合展开一致。在过渡区, 上述方法的结果显示出较好的标度行为。

**关键词** 格点规范理论, 规范场真空态, 本征值方法。

## 1 引 言

非阿贝尔规范理论具有一个非平庸的真空态, 这导致夸克禁闭。为了研究强子的低能物理, 必须了解真空的结构。格点规范理论提供了从第一原理出发研究规范场的非微扰性质的一种框架。最近, 我们在 Greensite 的截断本征值方程<sup>[2]</sup>的基础上发展了一种按连续极限截断的本征值方法研究格点规范场<sup>[1]</sup>。本文中, 我们用这种方法计算 2+1 维  $SU(3)$  格点规范理论的长波长真空态。为了检验这种方法的有效性, 我们也用传统的强耦合展开作了相应的计算。

## 2 按连续极限截断的本征值方法<sup>[1]</sup>

一般认为, 规范场的真空态在大于禁闭尺度时是高度无序的。基于此, 真空态的长波长行为可以由下述波函数近似<sup>[3,2]</sup>:

$$\psi(A) = \exp \left[ -\mu \int d^4x \text{tr}(F_{ij})^2 \right] \quad (2.1)$$

这里  $A$  表示连续时空中的规范势,  $F_{ij}$  表示相应的规范场。

在格点上, 相应的波函数为<sup>[2]</sup>:

$$\psi(U) = \exp \left[ \mu \sum_p \text{tr}(U_p + U_p^\dagger) \right] \quad (2.2)$$

\* 国家教委博士点基金和香港中山大学高等学术研究中心资助。

用 Monte Carlo 模拟研究格点规范场的真空态<sup>[4]</sup>, 结果与(2.2)相一致.

任何格点的计算, 都应取  $a \rightarrow 0$  回复到连续极限.(2.2)在连续极限下可以展开为:

$$\phi_0(U) \simeq \exp \left[ -\mu_0 \int d^2x \text{tr} F^2(x) - \mu_2 \int d^2x \text{tr} (D_i F(x))^2 + \text{高阶项} \right] \quad (2.3)$$

本文中, 我们只研究长波长行为, 故仅计算  $\mu_0$  及  $\mu_2$ .

2+1 维格点规范理论是超可重整化的, 有如下标度行为:

$$\mu_0 \cdot e^2 \rightarrow \text{const} \quad (2.4a)$$

$$\mu_2 \cdot e^6 \rightarrow \text{const} \quad (2.4b)$$

这里  $e$  是不变荷, 与无量纲耦合常数的关系为  $g^2 = e^2 a$ .

在本征值方法中, 设真空波函数为:

$$|\phi_0\rangle = e^{R(U)} |0\rangle \quad (2.5)$$

这里  $R(U)$  包含各种 Wilson 圈, 态  $|0\rangle$  定义为:

$$E_i^a |0\rangle = 0 \quad (2.6)$$

Kegut-Susskind 哈密顿量为:

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[ \sum_l E_l^2 - \frac{2}{g^4} \sum_p (\text{tr} u_p^\dagger + \text{tr} u_p) \right] \quad (2.7)$$

由  $H|\phi_0\rangle = \varepsilon_0|\phi_0\rangle$  推得,  $H$  的本征值方程为:

$$\begin{aligned} \sum_l ([E_l^a, [E_l^a, R]] + [E_l^a, R][E_l^a, R]) - \frac{2}{g^4} \sum_p (\text{tr} u_p + \text{tr} u_p^\dagger) \\ = \frac{2a}{g^2} \varepsilon_0 \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

定义一个圈图的阶为它所包含的元格的个数, 按圈图的阶对  $R$  作展开:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (2.9)$$

真空态应具有  $H$  所拥有的对称性, 故取  $R_1$  为:

$$R_1 = C_0 \left( \square + \square \right) = C_0 \Sigma (\text{tr} u_p + \text{tr} u_p^\dagger) \quad (2.10)$$

一般地:

$$[E_l^a, [E_l^a, R_n]] \in R_n + \text{低阶项} \quad (2.11a)$$

$$[E_l^a, R_n][E_l^a, R_{n'}] \in R_{n+n'} + \text{低阶项} \quad (2.11b)$$

显然, 可以由  $[E_l^a, R_n][E_l^a, R_{n'}]$  产生高阶项. 事实上, 我们选取的高阶项正是这样产生的. 高阶项中每一圈图的系数则通过求解方程(2.8)确定. 很显然, 我们不能计算到任意的高阶项, 因此, 必须对 (2.11b) 进行截断. 截断的方法之一是按连续极限截断<sup>[5]</sup>. 现简述如下:

为简单起见, 考虑  $R = \mu \cdot \square$ , 令  $\mu \cdot a^2 = \mu_p$ , 则  $R = \frac{\mu_p}{a^2} \square$ . 因要求  $R$  在连续极限下有确定的标度行为, 故有:

$$\mu_p \xrightarrow{a \rightarrow 0} \text{const} \quad (2.12)$$

易证

$$\begin{aligned} [E, R][E, R] &= \mu^2 \left[ E, \square \right] \left[ E, \square \right] \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\mu_p^2}{a^4} \cdot \frac{\text{const}}{a^2} \int d^2x \cdot a^6 \text{tr}(D_i F)^2 + \dots \\ &= \mu_p^2 \cdot \text{const} \int d^2x \text{tr}(D_i F)^2 + O(a^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

即如果保留  $\left[ E, \square \right] \left[ E, \square \right]$  中的任何一项, 则  $\left[ E, \square \right] \cdot \left[ E, \square \right]$  有确定的连续行为. 反之如果放弃其中的某些项<sup>①</sup>, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_p^2}{a^4} \left[ E, \square \right] \left[ E, \square \right] &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\mu_p^2 \text{const}_1}{a^4} \int d^2x \cdot a^4 \text{tr} F^2 \\ &+ \frac{\mu_p^2}{a^4} \cdot \frac{\text{const}_2}{a^2} \cdot \int d^2x \cdot a^6 \text{tr}(D_i F)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

上式右边的第一项在  $a \rightarrow 0$  时不是有限的. 文献[1]中证明, 在一般情况下有:

$$[E, R_j][E, R_k] \xrightarrow{a \rightarrow 0} a^4 \cdot \int d^2x \text{tr}(D_i F)^2 + \dots \quad (2.15)$$

这里  $R_j, R_k$  为任意的二个圈图. 因此只要保留  $[E, R_n][E, R_{n'}]$  中的每一项, 则(2.8)式左边的每一项都有恰当的标度行为, 从而  $\epsilon_0$  也将有良好的标度行为.

综上所述, 若按连续极限进行截断, 计算到  $R$  的  $M$  阶时, 有如下的截断本征值方程:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M \sum_{l, \sigma} [E_l^\dagger, [E_l^\dagger, R_n]] + \sum_{n+n' \leq M} \sum_{l, \sigma} [E_l^\dagger, R_n][E_l^\dagger, R_{n'}] \\ - \frac{2}{g^4} (\text{tr} u_p + \text{tr} u_p^\dagger) = \text{const} \end{aligned} \quad (2.16)$$

本文中, 我们只计算  $M = 2, 3$  的情况.

### 3 格点 $SU(3)$ 规范理论的么模条件

由  $[E, R_n][E, R_{n'}]$  产生的高阶图并不是完全独立的. 因为对于么正群存在么模条件. 在求解(2.16)式时, 必须把不独立的图代换掉以便得到系数方程.

$SU(3)$  群的么模条件为:

$$U_{ij} U_{kl} U_{mn} \epsilon_{ilm} = \epsilon_{ikm} \quad (3.1)$$

其中  $U$  为任意群元. (3.1) 两边同乘以  $U_{pi}^\dagger$  并对  $i$  求和有:

$$U_{kl} U_{mn} \epsilon_{pln} = U_{pi}^\dagger \epsilon_{ikm} \quad (3.2)$$

(3.2) 式两边同乘以  $\epsilon_{pqr}$  并对  $p$  求和, 化简得:

$$\begin{aligned} U_{il} U_{kj} &= U_{ij} U_{kl} - \text{tr} U^\dagger (\delta_{ii} \delta_{lk} - \delta_{ki} \delta_{il}) - U_{il}^\dagger \delta_{kj} \\ &+ U_{ij}^\dagger \delta_{kl} - U_{kj}^\dagger \delta_{il} + U_{kl}^\dagger \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.3)$$

这里利用了  $\epsilon_{ilm} \epsilon_{ikp} = \delta_{ii} \delta_{lk} \delta_{np} - \delta_{ji} \delta_{lp} \delta_{nk} + \delta_{jk} \delta_{lp} \delta_{ni} - \delta_{ik} \delta_{li} \delta_{np} + \delta_{ip} \delta_{li} \delta_{nk} - \delta_{ip} \delta_{lk} \delta_{ni}$ . 显然上述推导的每一步都是可逆的, 故(3.3)式等价于么模条件(3.1). (3.3) 可以化为更方便的形式, 把(3.3)式两边同乘以  $V_{lk} \cdot V_{ii}$ , 则有:

$$\begin{aligned} \text{tr}UVUV' &= \text{tr}UV\text{tr}UV' - \text{tr}U^\dagger(\text{tr}V'\text{tr}V - \text{tr}VV') - \text{tr}U^\dagger V'V \\ &\quad - \text{tr}U^\dagger VV' + \text{tr}V\text{tr}U^\dagger V' + \text{tr}V'\text{tr}U^\dagger V \end{aligned} \quad (3.4)$$

这里  $U, V$  与  $V'$  是任意群元。因为规范自由度是非物理的自由度, 故在格点规范的哈密顿形式中, 一般选取规范变换下保持不变的元格为基本的规范场量, 这时(3.4)式中的  $U, V, V'$  可理解为是任意元格或元格的乘积。以下是一些特例。

1) 在(3.4)式中令  $V = V' = I$ , 则有:

$$\text{tr}U^2 = (\text{tr}U)^2 - 2\text{tr}U^\dagger \quad (3.5)$$

例如:

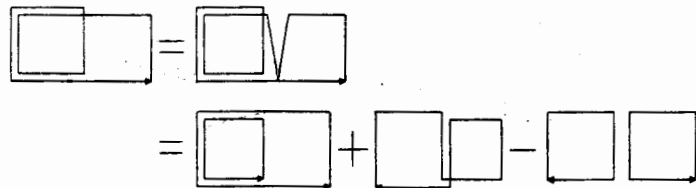


$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - 2 \text{Diagram 3} \quad (3.5a)$$

2) 在(3.4)式中令  $V' = I$ , 则有:

$$\text{tr}U^2V = \text{tr}UV\text{tr}U + \text{tr}U^\dagger\text{tr}V - \text{tr}U^\dagger\text{tr}V \quad (3.6)$$

例如:



$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} \quad (3.6a)$$

在计算到 3 阶时, (3.5)与(3.6)式即已足够。

计算到二阶时, 由  $[E, R_1][E, R_1]$  产生七个不同的图, 利用 (3.5a) 代换掉其中的一个图, 我们有:

$$\begin{aligned} R_2 &= C_1(\text{Diagram 1} + \text{h.c.}) + C_2(\text{Diagram 2} + \text{h.c.}) + C_3(\text{Diagram 3} + \text{h.c.}) \\ &\quad + C_4(\text{Diagram 4} + \text{h.c.}) + C_5(\text{Diagram 5} + \text{h.c.}) \\ &\quad + C_6(\text{Diagram 6} + \text{h.c.}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

这里 h.c. 表示某一图形在  $C$  操作下 ( $U \xrightarrow{C} U^\dagger$ ) 所得的图形。在二阶近似下, 由(2.16)式有:

$$\begin{aligned}
& ((16/3)C_0 - (2/g^4) - 8C_1 - 4C_0^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right) + ((40/3)C_1 + (4/3)C_0^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right) \\
& + (6C_2 - (2/3)C_0^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) + (8C_3 - C_4 - 2C_0^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right) \\
& + (11C_4 + (2/3)C_0^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right) + ((31/3)C_5 + C_6 - (2/3)C_0^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right) \\
& + ((31/3)C_6 + C_5 + 2C_0^2) \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \text{h.c.} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.8)中每一个图形都是独立的,故其前的系数必为0,由此可确定  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ . 从而求得  $\mu_0, \mu_2$ , 所得结果如图1所示.

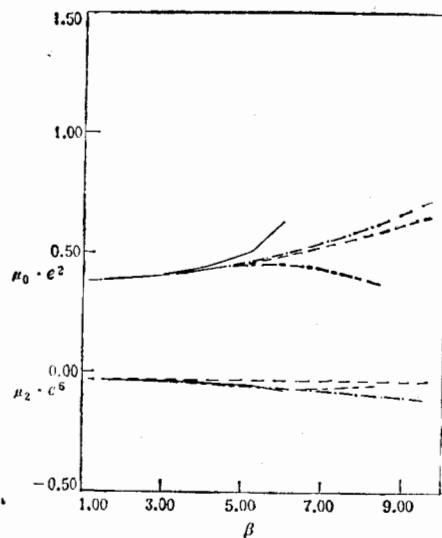


图 1

—— 二阶(截断本征值)    - - - - 三阶(截断本征值)  
- · - · - 二阶(强耦合展开)    · · · · · 三阶(强耦合展开)

计算到三阶时,共有 36 个独立图. 因为图形较多,方程也较复杂,不便在此列出. 所得的  $\mu_0, \mu_2$  如图1中所示. 由图1可见,3阶时  $\mu_0, \mu_2$  的标度行为与二阶相比有较大改善.

#### 4 强耦合展开

强耦合展开是格点规范理论解析计算中的经典方法,任何解析计算结果在强耦合区应与强耦合展开的结果一致. 强耦合展开的缺点是不能计算到过渡区及弱耦合区. 本节

介绍用强耦合展开作为上面相应的计算所得的结果.

按照文献[2], 真空态波函数  $|\mathcal{Q}\rangle$  可写为:

$$|\mathcal{Q}\rangle = e^A |0\rangle \quad (4.1)$$

本征方程:

$$A = \text{Inv}[(2/g^4) (\square + \square)] - [E_1^a, A_1] [E_1^a, A_1] \quad (4.2)$$

其中省略了对重复指标的求和号. 将  $A$  按  $1/g^4$  的次幂作展开:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots \quad (4.3)$$

由(4.2)式得到一级近似:

$$A_1 = \text{Inv} \left( \frac{2}{g^4} (\square + \text{h.c.}) \right)$$

因  $\square + \text{h.c.} = \text{tr}U_p + \text{tr}U_p^\dagger$ . 故:

$$\text{Dev}(\square) = [E_1^a, [E_1^a, \square]] = 4C_N \square = (16/3) \square$$

$$\therefore \text{Inv}(\text{Dev}(\square)) = \square = (16/3) \text{Inv}(\square)$$

由此得:

$$A_1 = (2/g^4) (3/16) (\square + \text{h.c.}) = (1/96)\beta^2 (\square + \text{h.c.}) \quad (4.4)$$

这里  $\beta = \frac{2N}{g^2} = \frac{6}{g^2}$ .

二级修正项  $A_2$  为:

$$A_2 = -\text{Inv}[[E_1^a, A_1][E_1^a, A_1]] \quad (4.5)$$

而

$$\begin{aligned} [E_1^a, A_1] [E_1^a, A_1] = & 2((1/96)\beta^2)^2 [ \square - (1/3) \square + (1/3) \square \\ & - \square + (1/3) \square \square + \square \square - (1/3) \square \square + \text{h.c.} ] \end{aligned} \quad (4.6)$$

类似于一级近似的计算, 得到:

$$\begin{aligned}
 A_2 = & ((1/96)\beta^2)^2 \{ -(3/10) \text{ [Diagram 1]} + (1/5) \text{ [Diagram 2]} - (1/18) \text{ [Diagram 3]} + (8/33) \text{ [Diagram 4]} \\
 & - (2/33) \text{ [Diagram 5]} + (10/119) \text{ [Diagram 6]} - (24/119) \text{ [Diagram 7]} + \text{h.c.} \}
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

对于三级近似修正项  $A_3$  的计算比较繁琐,一共有 36 个图,在此不一一列出。所得的  $\mu_0, \mu_2$  见图 1。

## 5 结论及讨论

从图 1 可见,在强耦合区  $\frac{1}{g^2} < 0.8$  时,本征值方程截断法和强耦合展开结果相符,而从过渡区到弱耦合区,前者有较好的标度行为,这说明,按连续极限截断本征方程的方法是一种有效的解析方法。

在强耦合展开中,各种图的系数  $C_i$  由级数展开逐级直接确定。而在本征方程截断方法中各类图的系数由代数方程组确定。这是这两种方法的主要差别所在。

由图 1 可见,本征方程截断方法的三阶结果虽然是所有上述计算中标度行为最好的,但在弱耦合区,仍略呈下降趋势,这说明需作更高阶的计算,亦即需考虑更复杂的真空态。

## 参 考 文 献

- [1] Shuo-Hong Guo, Qi-Zhou Chen, Lei Li, *Phys. Rev.*, **D48**(1993)11.
- [2] J. P. Greensite, *Nuclear Phys.*, **B166** (1980) 113.
- [3] M.B. Halperin, *Phys. Rev.*, **D19** (1979) 517; R. P. Feynman, *Nucl. Phys.*, **B188** (1981) 479.
- [4] J.P. Greensite, *Phys. Lett.*, **B191** (1987) 431;  
J. P. Greensite, J. Iwasahi, *ibid.*, **223** (1989) 207.
- [5] C.H. Llewellyn Smith, N. J. Watson, *Phys. Lett.*, **B302** (1993) 463.

## Calculation of Vacuum State for 2+1-Dimensional $SU(3)$ Lattice Gauge Theory

Chen Qizhou Fang Xiyan Guo Shouhong

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Received 1 February 1994

### Abstract

Using the method of an eigenvalue equation truncated according to the continuum limit, we calculate the vacuum state of 2 + 1-dimensional  $SU(3)$  lattice gauge theory. The results are consistent with those computed through strong-coupling series in the strong coupling region, and display satisfactory scaling behavior in the weak coupling region.

**Key words** lattice gauge theory, vacuum state of gauge field, method of eigenvalue.