第19卷 第9期 高能物理与核物理 Vol. 19, No. 9
1995年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sep., 1995

“不可约性假设”的证明及应用

邹鹏程
(四川大学物理系 成都 610064)

黄永畅
(西南交大现代物理研究所 成都 610031)

1994-10-18收稿

摘 要

首次证明了群论中的“不可约性假设”，即：在考虑了系统的全部对称性之后，其能级的简并空间必为其对称群的不可约子空间，因而不存在偶然简并。同时讨论了它在量子态分类中的应用。

关键词 群论，不可约性假设，偶然简并，核能级。

是否存在偶然简并，是一个尚未解决的理论问题。有些作者认为确实存在偶然简并，且作了证明[1]；另一些作者则提出了所谓“不可约性假设”[2]，认为在考虑了系统的全部对称性后，能级的简并空间应是系统全对称群的不可约子空间，因而不存在偶然简并。但这只是一个假设，是一个没有证明的命题。本文将首先指出目前关于存在偶然简并的证明中的错误，然后给出“不可约性假设”的证明，最后指出它在量子态分类中的应用。

1 “存在偶然简并”的证明中的错误

一些作者证明偶然简并存在，其方法大体如下[1]：

设系统哈密顿算符为 $H(\alpha)$，其中 α 为一可变参数，解出其能级 $E_i(\alpha)$，其值依赖于 α。可以存在以下情况：当 $\alpha=\alpha_1$ 时，$E_i>E_j$；$\alpha=\alpha_2$ 时，$E_i<E_j$，故存在 α_0，$\alpha_1<\alpha_0<\alpha_2$，当 $\alpha=\alpha_0$ 时，$E_i=E_j$。这就是说，原先并不简并的能级，仅仅由于 α 取某特定值，才出现了简并。这种简并被认为与对称性无关，属于偶然简并。于是认为，以上便证明了偶然简并的存在。

为了看出这一证明的错误，我们研究下列例子：考虑二维问题，设粒子在边长为 $a=\alpha d, b=d/\alpha(\alpha>0)$ 的矩形区中运动，区内 $U=0$，区外 $U=\infty$，系统的哈密顿量可表为

$$H(\alpha)=\frac{p^2}{2\mu}+U(x,y,\alpha). \tag{1}$$

其定态解为[3]

$$\psi_{n_x,n_y}=\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{n_x\pi}{a}x\sin\frac{n_y\pi}{b}y. \tag{2}$$

对应的能量为

$$\begin{aligned}E_{n_x,n_y}&=\frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}\right]\\&=\frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu d^2}\left[\frac{n_x^2}{\alpha^2}+\alpha^2n_y^2\right].\end{aligned} \tag{3}$$

考虑能级 $E_1\equiv E_{2,1},E_2\equiv E_{1,2}$，其差

$$\Delta E=E_1-E_2=\frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu d^2}\frac{3(1-\alpha^4)}{\alpha^2}. \tag{4}$$

由上式知，$\alpha<1$ 时，$E_1>E_2$;$\alpha>1$ 时，$E_1<E_2$；在 $\alpha=1$ 时，$E_1=E_2$，出现简并. 根据前面关于"存在偶然简并"的证明,此简并被认为是偶然简并. 但事实上,我们看到,$\alpha=1$ 时,$a=b$,矩形变为正方形,显然,以上简并乃是 x,y 对称的结果,并非偶然简并.

类似地,可考虑球对称系统

$$H(\alpha)=\frac{p^2}{2\mu}+kr^\alpha. \tag{5}$$

我们知道,若 $k>0$，在 $\alpha=2$ 时(谐振子情形)不同 l 的能级将互相重合. 但它不是偶然简并,因为众所周知,$\alpha=2$ 时,系统有了 $SU(3)$ 对称性;同样,若 $k<0$，在 $\alpha=-1$ 时（库仑场情形）亦出现不同 l 的能级简并. 但它也不是偶然简并，而是系统有了 $SO(4)$ 对称性的结果.

由上列例子可以看出. 前面关于"存在偶然简并"的证明，其错误在于未加证明即断定 $\alpha=\alpha_0$ 时出现的简并与对称性无关. 实际情况恰恰相反,正是在 $\alpha=\alpha_0$ 时，系统出现了新的对称性. 下面我们将证明能级的一切简并都是系统具有对称性的结果，不存在偶然简并.

2 "不可约性假设"的证明

设系统的哈密顿算符为 H，其完备的本征态为

$$\psi_1,\psi_2,\cdots\cdots,\psi_n,\psi_{n'},\cdots\cdots \tag{6}$$

其中 $E_n=E_{n'}$. 定义线性算符 D:

$$\begin{aligned}D\psi_k&=\psi_k,\quad k\neq n,n',\\D\psi_n&=\psi_{n'},\\D\psi_{n'}&=\psi_n.\end{aligned} \tag{7}$$

以 $\psi_\pm=\psi_n\pm\psi_{n'}$ 代替(6)式中的 ψ_n 和 $\psi_{n'}$，则

$$\psi_1,\psi_2,\cdots\cdots,\psi_+,\psi_-,\cdots\cdots \tag{8}$$

仍完备. 注意由

$$H\psi_\pm=E_n\psi_\pm,\quad H\psi_k=E_k\psi_k,\quad k\neq n,n', \tag{9}$$

$$D\psi_{\pm}=\pm\psi_{\pm},\quad D\psi_k=\psi_k,\quad k\neq n,n', \tag{10}$$

知D与H有完备的共同本征态，故可对易，因此D为对称群的元素．另一方面由(7)式知ψ_n和$\psi_{n'}$可通过D的作用而互变，故属群的同一不变子空间．此外，由于$\psi_n,\psi_{n'}$的选取实际上是任意的，因此从任一ψ_n出发，经相应的对称算符$D(n,n')$的作用，我们可以得到简并空间中的所有线性无关的态．它说明，能级的简并空间是系统全对称群的最小不变子空间，其中不存在更小的不变子空间．这就证明了简并空间的不可约性．

由于证明了能量相同的态必属于系统全对称群的同一不可约子空间，反过来即可推出，在考虑了系统的全部对称性之后，对称群的不同的不可约子空间的能量（如果它们具有确定的能量)必定不等，这就证明了不存在偶然简并．

3 应　　用

“不可约性假设”是否成立，偶然简并是否存在，这一问题对于原子物理，原子核物理以及固体物理等都具有现实的重要性．因为如果存在偶然简并，那么实际的能级就可能比群理论预言的少，而各能级的简并度则可超出理论的预言．这种情况使我们在讨论有关问题时不得不经常申明，理论所得的结果不包括存在偶然简并这种特殊情况[4]．这是令人遗憾的．它使精美的群论在预言能级时陷入一种模棱两可的尴尬局面．证明了“不可约性假设”便消除了这种情况，使群论关于能级的预言变得唯一确定．

考虑一量子体系，哈密顿量为H，其完全对称群为G．若$A\in G$，则有

$$HA=AH. \tag{11}$$

设ψ_n为H的本征态，本征值为E_n，由(11)式有

$$HA\psi_n=AH\psi_n=E_nA\psi_n. \tag{12}$$

上式指出H的本征态经对称群算符A作用后，所得之态仍为H的本征态，且有相同的本征值．以S_n记能量为E_n的态的全体．由(12)式知它是G的不变子空间．关键的问题是S_n是否可约？如果诸S_n皆不可约，那么我们即可根据群论对系统的态按能级作出完全的分类．其具体步骤如下：

首先将群G在态空间L中的表示T约化为G的不可约表示的直和，与此对应，L即被分解为G的不可约子空间的直和．如果每一不可约表示在T中最多只出现一次，那么不可约子空间的以上分解便是唯一的．由于能级的简并空间亦是群的不可约子空间，由此可知，将态按对称群的不可约子空间分解实际上也就是将系统的态按能级进行分类，G的不可约子空间即是能级的简并空间，T所含不可约表示的个数即为系统的能级数，不可约表示的维数即为对应能级的简并度．

如果同一不可约表示在T中不只出现一次，这时不可约子空间的分解不是唯一的，但如果要求子空间中的态同时也是H的本征态，这时子空间的划分则可唯一确定．因为每一能级只对应群的一个不可约子空间．由此可知，系统的能级数仍等于T中所包含的不可约表示的个数．能级的简并度仍为对应不可约表示的维数．

这样，我们便完成了量子态按能级的完全分类．

以上关于能级的讨论仅当不可约假设成立时才是正确的．若该假设不成立，我们就

不能排除几个不可约表示简并在同一能级上的情况，甚至不能排除所有态的能量都相等这一极端情况。这时群论只能给出系统能级数的上限为 T 中所含不可约表示的个数，对能级的简并度也不能作出确切的预言。

证明了"不可约性假设"，也就排除了群论关于量子系统能级预言的不确定性。使群论这一有力的工具变得更加完美。

参　考　文　献

[1] A. W. Joshi, Elements of Group Theory for Physicists, John Wiley, 1977.
[2] D. F. Johnston, *Reports on Progress in Physics*, **23**(1960)106.
[3] 邹鹏程，量子力学，高等教育出版社，1989.
[4] A. B. Соклов, B. П. Широкоъский, *У. Ф. Н., Том.*, **60B3**(1956)659.

Proof of "Irreducibility Postulation" and Its Applications

Zou Pengcheng
(*Department of Physics, Sichuan University, Chengdu* 610064)
Huang Yongchang
(*Institute of Modern Physics. Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031)

Received 18 October 1994

Abstract

The "irreducibility postulation" is proved first in group theory. Its applications to the classification of quantum states are presented.

Key words　group theory, irreducibility postulation, accidental degeneracy, nuclear energy levels.