

# 轴对称变形核中配对粒子态的构成

曾谨言 雷奕安 吴文庆

(北京大学物理系 北京 100871)

1994-08-08 收稿

## 摘 要

量子多粒子体系的配对粒子态的构成与体系对称性密切相关。轴对称变形核中的配对粒子态可有三种构成方式,即单极对,±Q 对和 Signature 对,分别是  $(J^2, J_z)$ ,  $J_z$ , 和  $(J^2, R_1(\pi))$  的共同本征态。在只计及对力时,三种形式的对力得出的能谱完全相同,常被等价地混用。但在推转壳模型中,由于三种配对态在空间转动下的性质不尽相同,能谱及有关性质随  $\omega$  的变化将有不同程度的差异。

**关键词** 轴对称变形核,单极对, signature 对。

## 1 引 言

多粒子体系中的单粒子态的描述(好量子数)与体系的对称性密切相关。同样,“粒子对”的构成和描述也与体系对称性密切相关。

金属超导体中电子的空间运动用动量本征态描述<sup>[1]</sup>,这是基于假定体系具有空间平移不变性。Cooper 电子对(S 对)通常用  $a_{\mathbf{p},s}^+ a_{-\mathbf{p},-s}^+ |0\rangle$  描述,  $\mathbf{p}$  是两电子在质心系中的相对动量,  $|-\mathbf{p}\rangle$  与  $|\mathbf{p}\rangle$ ,  $|-s\rangle$  与  $|s\rangle$  互为时间反演态。S 对是总相对动量 ( $\mathbf{P} = 0$ ) 和总自旋 ( $S = 0$ ) 的本征态。这种配对态的 seniority  $\nu = 0$ 。凡  $\mathbf{P} \neq 0$  的二电子态,称为拆对态,  $\nu = 2$ 。Cooper 对相互作用可唯象地表成

$$H_P = -G \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', s, s'} a_{\mathbf{p},s}^+ a_{-\mathbf{p},-s}^+ a_{-\mathbf{p}',-s'} a_{\mathbf{p}',s'} = -GP^+, \quad (1)$$

$$P^+ = \sum_{\mathbf{p}, s} a_{\mathbf{p},s}^+ a_{-\mathbf{p},-s}^+$$

$G$  为对力平均强度。

在球形核中,基于体系的空间旋转不变性,单粒子态(空间转动部分)用角动量  $(J^2, j_z)$  的共同本征态  $|jm\rangle$  描述(其它量子数略去未写)。其时间反演态为

$$T|jm\rangle = (-)^{j-m} |j-m\rangle = |j\bar{m}\rangle,$$

$T = -i\sigma_y K$  是时间反演算子 ( $K$  为取复共轭,  $\sigma_y$  为 Pauli 算子)。除一个相因子外,

$|jm\rangle \sim |j-m\rangle$  也是  $j_i$  本征态, 本征值为  $-m$ 。球形核中“配对粒子态”通常表成<sup>[2]</sup>

$$P_i^+|0\rangle = \sum_{m>0} a_{jm}^+ a_{j\bar{m}}^+ |0\rangle = \sum_{m>0} (-)^{j-m} a_{jm}^+ a_{j-m}^+ |0\rangle \\ = \sqrt{2j+1} |(j^2)J=0M=0\rangle, \quad (2)$$

它是守恒量完全集  $(J^2, J_z)$  的共同本征态, 用好量子数  $J=0, M=0$  表征, 称为单极对 (monopole pair)。这种配对态的 seniority  $\nu=0$ 。所有  $[a_i^+ \otimes a_i^+]_{JM}(J \neq 0)$  的态称为拆对态, seniority  $\nu=2$ 。核子之间的唯象的单极对相互作用常表为

$$H_P = -GP^+P, \quad P^+ = \sum_i P_i^+. \quad (3)$$

在这种对力作用下, 体系总角动量  $J$  和 seniority  $\nu$  为守恒量, 选择定则为  $\Delta J=0, \Delta \nu=0$ 。

实验表明, 有相当多的原子核具有稳定变形<sup>[3]</sup>, 而且具有轴对称性 (对称轴取为 3 轴), 因而  $J_3$  为守恒量。变形核的含对力的壳模型 Hamilton 量为

$$H_0 = H_{sp} + H_P, \quad (4)$$

式中  $H_{sp}$  描述轴对称变形势 (例如 Nilsson 势或 Woods-Saxon 势) 中的单粒子运动,  $H_P$  为对相互作用。对于球形核, 整体空间旋转是没有意义的。对于轴对称变形核, 则可以研究它绕垂直于对称轴的任何一轴 (例如 1 轴) 的旋转。为研究具有稳定形变的原子核的转动与单粒子运动的密切联系, 常使用推转壳模型<sup>[4]</sup>, 其 Hamilton 量表成

$$H_{CSM} = H_0 - \omega J_1 = H_{sp} + H_P - \omega J_1, \quad (5)$$

$-\omega J_1$  为 Coriolis 作用。通常还假定  $H_{sp}$  具有  $R_1(\pi)$  (绕 1 轴旋转  $\pi$  角) 对称性 (例如具有四极和十六极形变的 Nilsson 势), 相应的好量子数  $r$  称为 signature。对于单核子,  $r = e^{-i\pi\alpha} = \pm i$  ( $\alpha = \mp 1/2$ )。对于偶数核子体系,  $r = \pm 1$ , ( $\alpha = 0, 1$ )。本文将分析具有这些对称性的势场中的“粒子对”的构成和对相互作用的几种可能形式。对于  $H_0$ , 几种形式对力给出的能谱完全相同, 所以在不少文献中常不加区别地混用。但在推转时 ( $\omega \neq 0$ ), 由于不同的“粒子对”在空间旋转下的性质不同, 相应的能谱及有关性质随  $\omega$  的变化会有不同程度的差异, 但此差异似乎尚未引起人们注意。

## 2 轴对称变形势中“粒子对”构成的三种形式

轴对称变形势的单粒子态 (例如 Nilsson 态<sup>[5]</sup>), 通常取为  $j_i$  的本征态  $|\mathcal{Q}\rangle$ ,  $j_i|\mathcal{Q}\rangle = \mathcal{Q}|\mathcal{Q}\rangle$ , ( $\mathcal{Q} > 0$  或  $< 0$ )。

考虑到  $[j_3^2, R_1(\pi)] = 0$ , 如果单粒子势具有  $R_1(\pi)$  对称性, 则单粒子态还可以表成  $(j_3^2, R_1(\pi))$  的共同本征态  $|\mathcal{Q}r\rangle$

$$j_3^2|\mathcal{Q}r\rangle = \mathcal{Q}^2|\mathcal{Q}r\rangle, \quad (\text{约定 } \mathcal{Q} > 0), \\ R_1(\pi)|\mathcal{Q}r\rangle = r|\mathcal{Q}r\rangle, \quad r = e^{-i\pi\alpha} = \pm i, \quad (\alpha = \mp 1/2). \quad (6)$$

不难证明,  $|\mathcal{Q}r\rangle$  可以表成  $|\mathcal{Q}\rangle$  和  $R_1(\pi)|\mathcal{Q}\rangle$  的线形叠加,

$$|\mathcal{Q}r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [r + R_1(\pi)] |\mathcal{Q}\rangle \quad (7)$$

通常 Nilsson 单粒子态表成<sup>[5]</sup>

$$|\mathcal{Q}\rangle = \sum_{IA} a_{IA} |NIA\Sigma\rangle, \quad (a_{IA} \text{ 取为实数}), \quad (8)$$

$|NIA\Sigma\rangle$  为  $(h_0, (I^2, l, s, s_z))$  的共同本征态。由于有自旋轨道耦合,  $I$  与  $\Sigma$  分别都不是好量子数, 但  $\mathcal{Q} = I + \Sigma$  则是。令

$$|-\mathcal{Q}\rangle = \sum_{IA} a_{IA} |NI - I - \Sigma\rangle, \quad (9)$$

则  $j_z |-\mathcal{Q}\rangle = -\mathcal{Q} |-\mathcal{Q}\rangle$ 。除一个相因子外,  $|\mathcal{Q}\rangle$  与  $|-\mathcal{Q}\rangle$  也互为时间反演态。(注意, 一般说来, 它们都不是  $\mathbf{j}^2$  的本征态。)

按习惯用时间反演算子  $T = -i\sigma_y K$ ,  $|\mathcal{Q}\rangle$  的时间反演态

$$T|\mathcal{Q}\rangle = \sum_{IA} (-)^{-I+1/2-\Sigma} a_{IA} |NIA\Sigma\rangle = (-)^{1/2-\mathcal{Q}} |-\mathcal{Q}\rangle = |\bar{\mathcal{Q}}\rangle, \quad (10)$$

即  $a_{\frac{1}{2}}^{\pm}|0\rangle = (-)^{1/2-\mathcal{Q}} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm}|0\rangle$ 。处于互为时间反演态的两个粒子构成的“配对态”, 可记为  $a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm}|0\rangle = (-)^{1/2-\mathcal{Q}} a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm}|0\rangle$ , 它也是  $J_z$  的本征态 ( $K=0$ ), seniority  $\nu=0$ 。这种粒子对之间相互作用可以唯象地表成

$$H_P = -G \sum_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'>0} a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm} a_{\mathcal{Q}'} a_{\mathcal{Q}'} = -G \sum_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'>0} (-)^{\mathcal{Q}'-\mathcal{Q}} a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm} a_{-\mathcal{Q}'} a_{\mathcal{Q}'}. \quad (11)$$

在单  $j$  模型中<sup>[6,7]</sup>, 上式还可以表成

$$H_P = -G \sum_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'>0} (-)^{j-\mathcal{Q}} a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm} (-)^{\mathcal{Q}'-j} a_{j-\mathcal{Q}'} a_{j\mathcal{Q}'} = -GP^+P, \quad (12)$$

$$P^+ = \sum_{\mathcal{Q}>0} (-)^{j-\mathcal{Q}} a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm},$$

$P^+|0\rangle$  是  $(J^2, J_z)$  的共同本征态 ( $J=0, K=0$ ), 它在空间转动下具有不变性(尽管整个体系并不具有此对称性)。这种形式的对力称为单极对相互作用, 相应的选择定则为  $\Delta J=0, \Delta K=0, \Delta\nu=0$ 。

作为轴对称变形势中的“配对粒子态”还可以自然地表为  $a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm}|0\rangle$ , 即  $\pm\mathcal{Q}$  对, 其中一个粒子沿 3 轴正方向旋转, 另一个粒子沿 3 轴反方向旋转, 互为时间反演态。此配对态是守恒量  $J_z$  的本征态 ( $K=0$ , 但并非  $J^2$  的本征态), seniority  $\nu=0$ 。其形式与 Cooper 对相似, 不同之处在于两体系对称性不同, 因而描述配对粒子态的好量子数不同。  $K \neq 0$  的二粒子态, 称为拆对态。轴对称变形核的很多低内部激发态属于这种性质, 习惯用  $K$  来标记<sup>[8]</sup>, 其 seniority  $\nu=2$ 。相应的对相互作用可以唯象地表成

$$H_P = -G \sum_{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'} a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm} a_{-\mathcal{Q}'} a_{\mathcal{Q}'} = GP^+P$$

$$P^+ = \sum_{\mathcal{Q}>0} a_{\frac{1}{2}}^{\pm} a_{\pm\mathcal{Q}}^{\pm} \quad (13)$$

相应的选择定则为  $\Delta K=0, \Delta\nu=0$ 。

前已提到, 轴对称变形势中的单粒子态还可以表成  $(j_z, R_1(\pi))$  的共同本征态  $|\mathcal{Q}\pi\rangle$  (见(7)式)。利用

$$R_1(\pi)|\mathcal{Q}\rangle = \sum_{IA} a_{IA} R_1(\pi)|NIA\Sigma\rangle$$

$$= \sum_{IA} a_{IA} (-)^{I+1/2} |NI - A - \Sigma\rangle = (-)^{N+1/2} | -Q\rangle, \quad (14)$$

$|Qr\rangle$  ( $r = e^{-i\pi\alpha} = \pm i, \alpha = \mp 1/2$ ) 还可以表成

$$|Q\alpha\rangle = \frac{e^{-i\pi\alpha}}{\sqrt{2}} [ |Q\rangle + 2\alpha(-)^N | -Q\rangle ], \quad (15)$$

即

$$c_{\tilde{b}\alpha} = \frac{e^{-i\pi\alpha}}{\sqrt{2}} [ a_{\tilde{b}}^{\dagger} + 2\alpha(-)^N a_{\tilde{b}} ]. \quad (16)$$

利用这种具有一定的 signature 的单粒子态也可以自然地构成“signature 对”<sup>[9-11]</sup>,

$$c_{\tilde{b}+1/2}^{\dagger} c_{\tilde{b}-1/2}^{\dagger} |0\rangle \equiv c_{\tilde{b}+}^{\dagger} c_{\tilde{b}-}^{\dagger} |0\rangle.$$

这种粒子对是  $(J_3^2, R_1(\pi))$  的共同本征态, ( $K^2 = 0, r = +1$ , 但并非  $J^2$  的本征态). 不难证明

$$c_{\tilde{b}+}^{\dagger} c_{\tilde{b}-}^{\dagger} = (-)^{N_{\tilde{b}+1}} a_{\tilde{b}+}^{\dagger} a_{\tilde{b}-}^{\dagger}.$$

因此这种对之间唯象的相互作用可以表成

$$\begin{aligned} H_P &= -G \sum_{\Omega\Omega' > 0} c_{\tilde{b}+}^{\dagger} c_{\tilde{b}-}^{\dagger} c_{\tilde{b}'-}^{\dagger} c_{\tilde{b}'+}^{\dagger} \\ &= -G \sum_{\Omega\Omega' > 0} (-)^{N_{\tilde{b}+} + N_{\tilde{b}'-}} a_{\tilde{b}+}^{\dagger} a_{\tilde{b}-}^{\dagger} a_{\tilde{b}'-}^{\dagger} a_{\tilde{b}'+}^{\dagger} \\ &= -G \sum_{\Omega\Omega' > 0} \pi_{\Omega} \pi_{\Omega'} a_{\tilde{b}+}^{\dagger} a_{\tilde{b}-}^{\dagger} a_{\tilde{b}'-}^{\dagger} a_{\tilde{b}'+}^{\dagger}, \quad (\pi_{\Omega} = (-)^{N_{\tilde{b}+}}, \text{宇称}) \\ &= -GP^{\dagger}P, \\ P^{\dagger} &= \sum_{\Omega} (-)^{N_{\tilde{b}+}} a_{\tilde{b}+}^{\dagger} a_{\tilde{b}-}^{\dagger}, \end{aligned} \quad (17)$$

相应的选择定则为  $\Delta K = 0, r$  不改变,  $\Delta v = 0$ .

### 3 单 $j$ 模型的计算及讨论

单  $j$  模型是模拟稳定变形核中的高  $j$  闯入态而引进的<sup>[6,7]</sup>, 能级由下式给出

$$e_{|\Omega|} = \kappa \frac{3Q^2 - j(j+1)}{j(j+1)} + \epsilon_0, \quad |\Omega| = 1/2, 3/2, \dots, j \quad (18)$$

$\kappa \sim \frac{25}{3} \delta$ ,  $\delta$  是四极轴对称形变参数. 当取  $\epsilon_0 = 6.655 \hbar\omega_0$ ,  $\kappa = 0.392 \hbar\omega_0$ ,  $j = 13/2$ , 上式给出的能级与稀土区中部稳定变形核  $^{168}\text{Er}(\epsilon_2 = 0.27, \epsilon_4 = 0.02)$  的中子高  $j$  闯入轨道  $(i_{13/2})$  几乎完全重合<sup>[7]</sup> (相对偏差  $< 0.1\%$ ). 对稀土区稳定变形核  $^{168}\text{Er}$ ,  $\hbar\omega_0 = 7.9 \text{ MeV}$  [5], 所以  $\kappa \sim 3.0 \text{ MeV}$ . Nilsson and Prior<sup>[12]</sup> 对稀土变形核的质量奇偶差和带首转动惯量的系统分析指出,

$$G_n = 18/A \text{ MeV}, \quad G_p = 25/A \text{ MeV},$$

所以  $G/\kappa \approx 0.03 - 0.05$  ( $\kappa/G \approx 20 - 30$ ). 考虑到单  $j$  模型中能级密度较实际核要稀一些, 所以用单  $j$  模型定性分析时, 不妨把对力强度取得稍大一些. 以下取  $G/\kappa = 0.10$  进行计算. 注意,  $\kappa$  与稳定变形核的四极轴对称形变  $\delta$  (或  $\epsilon_2$ ) 密切相关<sup>[6]</sup>,  $\kappa \rightarrow 0$  相当于

球形核极限,而对于球形核,推转壳模型是没有意义的。所以, $\kappa$ 值不可取得太小<sup>[13-15]</sup>。

下面给出  $j = 11/2$  的 6 粒子体系的粒子数守恒计算结果(在给定粒子数和 signature 的全部多粒子组态空间中把  $H_{CSM}$  对角化)。图 1 给出  $H_0$  的低激发谱。前已提到,三种形式的对力得出的能谱完全相同。图 2 给出  $H_{CSM}$  的低激发带随  $\omega$  的变化。如以晕(yrast)带为参照,则低激发带如图 3 所示。图 2(a),图 3(a)是用单极对力的计算结果,图 2(b)、3(b)则是 signature 对(或  $\pm Q$  对)的计算结果。可以看出两者有一定程度的差异。例如 6 粒子体系的晕带与次晕(yrare)带的交叉频率  $\omega_c$  和带相互作用

$$V = \frac{1}{2} (E_{yrare} - E_{yrast})_{\min}$$

分别为(以  $\kappa$  为单位)

	单极对力	signature 对(或 $\pm Q$ 对)
$\omega_c$	0.165	0.175
$V$	0.354	0.469

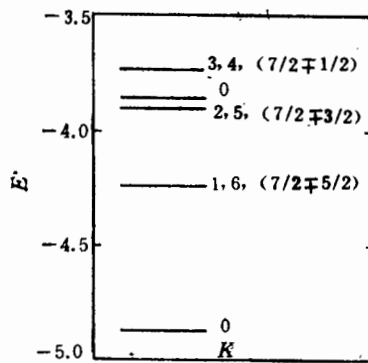


图 1

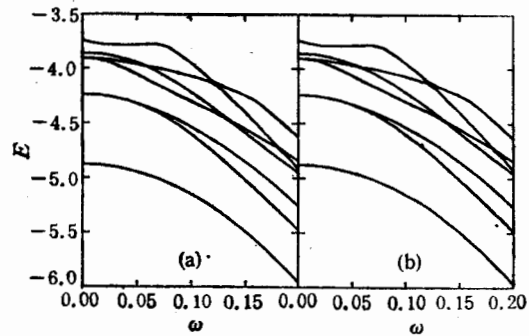


图 2

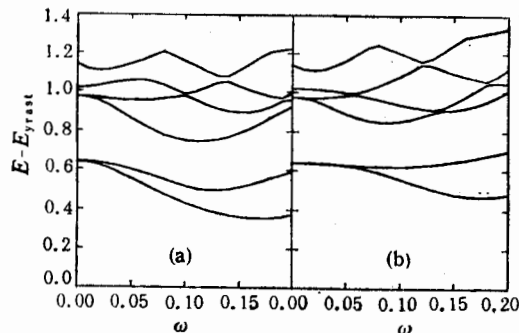


图 3

可以看出,  $\omega_c$  相当接近, 而  $V$  略有差异。粒子数  $N = 2, 4, 8, 10$  体系的计算结果与此类似。精确的粒子数守恒计算表明: 在单  $j$  推转壳模型中, 晕带-次晕带相互作用总是比较

强,而且随着粒子数的变化,  $V$  不出现振荡现象<sup>[6]</sup>, 这与 BCS 近似计算得出的结论<sup>[17]</sup>不同,但与 Faessler 等人所得结论<sup>[18]</sup>一致.

### 参 考 文 献

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.*, **106**(1957)162; **108**(1957)1175.
- [2] L. S. Kisslinger, R. S. Sorensen, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **32**(1960).No. 12.
- [3] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure, II, Nuclear Deformations*, (Benjamin, 1975).
- [4] D. R. Inglis, *Phys. Rev.*, **95**(1954)1057.
- [5] S. G. Nilsson, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **29**(1960)No. 16; S. G. Nilsson *et al.*, *Nucl. Phys.*, **A131**(1969)1.
- [6] I. Hamamoto, *Nucl. Phys.*, **A271**(1976)15.
- [7] R. Bengtsson, H. B. Håkansson, *Nucl. Phys.*, **A357**(1981)61.
- [8] B. R. Mottelson, S. G. Nilsson, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **1**(1959).No. 8.
- [9] M. Hasegawa, S. Tazaki, K. Muramutsu, *Phys. Lett.*, **B226**(1989)1.
- [10] S. Tazaki, K. Muramutsu, R. Hayakawa, M. Hasegawa, *Phys. Rev.*, **C43**(1991)596.
- [11] M. Hasegawa, S. Tazaki, *Phys. Rev.*, **C47**(1993)188.
- [12] S. G. Nilsson, O. Prior, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **32**(1960)No. 16.
- [13] N. Rowley, K. F. Pal, M. A. Najjarajan, *Phys. Lett.*, **201**(1988)187.
- [14] J. A. Sheikh, M. A. Najjarajan, N. Rowley, *Phys. Lett.*, **223**(1989)1.
- [15] K. F. Pal, M. A. Najjarajan, N. Rowley, *Nucl. Phys.*, **A500**(1989)221.
- [16] C. S. Wu, J. Y. Zeng, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991)1022.
- [17] R. Bengtsson, I. Hamamoto, B. R. Mottelson, *Phys. Lett.*, **73B**(1978)259.
- [18] F. Grümmer, K. W. Schmid, A. Faessler, *Nucl. Phys.*, **A326**(1979)1.

## Construction of Paired States in Axially Symmetric Deformed Nuclei

Zeng Jinyan    Lei Yian    Wu Wenqing

(Physics Department, Peking University, Beijing 100871)

Received 8 August 1994

### Abstract

The construction of a paired state of a quantum many-particle system is closely connected with its symmetry. There are three types of construction of paired state in axially symmetric deformed nucleus, i. e., monopole pair,  $\pm\Omega$  pair and signature pair, which are the eigenstates of  $(J^2, J_3)$ ,  $J_3$ , and  $(J_3^2, R_1(\pi))$ , respectively. When only the pairing force is involved, the energy spectra of all three pairing Hamiltonian are identical. However, in the case of Cranked Shell Model, since the three types of paired states behave differently under space rotation, the energy spectra and the  $\omega$  variation of other relevant features differ to certain extent.

**Key words** axially symmetric nucleus, monopole pair, signature pair.