

(2+1) 维 SU(2) 格点规范场 胶球质量的解析计算*

惠萍

蔡鹏飞 陈启洲

(广东教育学院物理系 广州 510303)

(中山大学物理系 广州 510275)

1994-12-19 收稿

摘 要

从连接图方案出发, 计算 0^{++} 胶球质量, 得到较好的标度行为.

关键词 格点规范, 胶球质量, 解析计算.

1 引 言

采用截断本征方程的方法计算不连接图的三级和四级真空波函数及胶球质量, 其真空波函数的 μ_0 和 μ_2 值表现出较好的标度行为, 胶球质量也表现出较好的标度行为. 在前篇文章^[3]指出: μ_0 值的三级近似和四级近似有明显的差异, 若采用连接图方案, 则可缩小这种差异, 但 μ_0 值得到改善后, 0^{++} 的胶球质量是否保持较好的标度行为? 计算结果表明连接图方案的胶球质量也有较好的标度行为, 而且与不连接图方案的值相近.

考虑到么模条件造成选取圈图的任意性, 连接图可能反映了圈图之间的相干性, 利用么模条件:

$$\text{Tr}A \text{Tr}B = \text{Tr}AB^+ + \text{Tr}AB,$$

把不连接图 $\text{Tr}A \text{Tr}B$ 代换成连接图 $\text{Tr}AB^+$ 和 $\text{Tr}AB$ 之和, 例如:

$$\square^3 = \square + 3\square, \quad \square\square = \square + \square,$$

在计算中发现, 重叠图的连接与不连接对计算结果影响很大. 上式中左边是三阶不相连图, 右边是三阶相连图和一阶图. 我们在连接图的计算中选择了 \square 和 \square 而不是 \square^3 和 $\square\square$ 作为独立基, 而在下面的变换中:

$$\square\square = \square + \square,$$

选择 \square 或 \square 对计算结果无影响.

* 国家教委博士点基金和香港-中山大学高等学术中心资助.

2 本征方程和胶球质量

胶球波函数选为:

$$|\Psi\rangle = \left[F(U) - \frac{\langle Q|F(U)|Q\rangle}{\langle Q|Q\rangle} \right] |Q\rangle,$$

使得 $\langle Q|\Psi\rangle = 0$, $\langle Q|Q\rangle = 1$, $|Q\rangle = e^{R(U)}|0\rangle$,

其中, $F(U)$ 和 $R(U)$ 由 Wilson 圈组成, $F(U)$ 和 $R(U)$ 可展成:

$$F(U) = F_1 + F_2 + F_3 + \dots, \quad R(U) = R_1 + R_2 + R_3 + \dots, \quad (1)$$

$$F_1 = Q \square, \quad (2)$$

$$F_2 = Q(1) \square\square + Q(2) \square\square + Q(3) \square\square, \quad (2)$$

$$F_3 = B_{10} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_{20} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_{30} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_{40} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_{50} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ + B_{60} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_{70} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_{80} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_{90} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array},$$

$$F_4 = (\text{略去 56 个四阶图}), \quad (4)$$

$$R_1 = X(4) \square, \quad (5)$$

$$R_2 = X(1) \square\square + X(2) \square\square + X(3) \square\square, \quad (6)$$

$$R_3 = B_1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \dots + B_9 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad (7)$$

$$R_4 = (\text{略去 56 个四阶图}), \quad (8)$$

其中 $X(4)$, $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, B_1 , ..., B_9 等可由 H 的本征方程 (69 个) 解出 (略), 其 μ_0 , μ_2 的结果与图 1 连接图的结果相同.

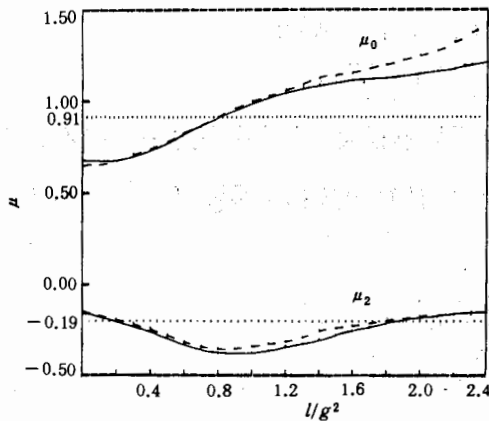


图1

--- 连接图的结果, - - - 不连接图的结果.

F 的本征方程为:

$$\sum_i \{ [E_i^\alpha, [E_i^\alpha, F]] + 2[E_i^\alpha, F][E_i^\alpha, R] \}$$

$$- \Delta w F = \text{const},$$

其中 $\Delta w = 2m/e^2$, m 为 0^{++} 胶球质量, e^2 为有量纲的不变常数 ($g^2 = e^2 a$).

n 阶截断本征方程为:

$$\sum_i \left\{ \left[E_i^\alpha, \left[E_i^\alpha, \sum_i F_i \right] \right] \right\}$$

$$+ \sum_{i+j \leq n} \{ [E_i^\alpha, F_i][E_j^\alpha, R_j] \} - \Delta w \sum_i F_i = \text{const}.$$

四阶本征方程为:

$$\begin{aligned} & \sum_l [E_l^x, [E_l^x, F_1 + F_2 + F_3 + F_4]] + 2 \sum_l [E_l^x, F_1][E_l^x, R_1] \\ & + 2 \sum_l [E_l^x, F_1][E_l^x, R_2] + 2 \sum_l [E_l^x, F_2][E_l^x, R_1] \\ & + 2 \sum_l [E_l^x, F_2][E_l^x, R_2] - \Delta w (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) = \text{const.} \end{aligned} \quad (9)$$

利用有关的对易关系公式(略), 将(1)–(8)式代入(9)式得 26 个独立方程(令

$\Delta w = Q(4)$):

$$B_{60}[15 - Q(4)] + 4[Q(2) \cdot X(4) + X(2)] = 0,$$

$$B_{70}[10 - Q(4)] + 2[Q(3) \cdot X(4) + X(3)] = 0,$$

$$B_{80}[10 - Q(4)] + Q(3) \cdot X(4) + X(3) = 0,$$

$$B_{90}[12 - Q(4)] + 4 \cdot X(2) + 4 \cdot X(4) \cdot Q(2) + 5 \cdot X(4) \cdot Q(3) + 5 \cdot X(3) = 0,$$

$$B_{50}[9 - Q(4)] + B_{90} + 3 \cdot Q(1) - 4 \cdot Q(2) + 3 \cdot Q(3) \cdot X(4)$$

$$+ 3 \cdot X(1) - 4 \cdot X(2) + 3 \cdot X(3) = 0,$$

$$B_{40}[8 - Q(4)] - 2 \cdot B_{80} + X(4) \cdot Q(1) + X(1) - 2 \cdot X(4) \cdot Q(3) - 2 \cdot X(3) = 0,$$

$$B_{30}[8 - Q(4)] + 2 \cdot X(4) \cdot Q(1) + 2 \cdot X(1) - 4 \cdot X(4) \cdot Q(3)$$

$$- 4 \cdot X(3) - 2 \cdot B_{70} = 0,$$

$$B_{20}[6 - Q(4)] - B_{40} - 2 \cdot X(4) \cdot Q(1) - 2 \cdot X(1) = 0,$$

$$B_{10}[6 - Q(4)] - B_{30} - 4 \cdot X(4) \cdot Q(1) - 4 \cdot X(1) = 0;$$

$$H_{20}[31 - 2 \cdot Q(4)] + 2 \cdot [5 \cdot X(4) \cdot B_{80} + 5 \cdot B_8 + X(4) \cdot B_{90}/2$$

$$+ B_9/2 + 2 \cdot X(2) \cdot Q(3) + 2 \cdot X(3) \cdot Q(2)] = 0,$$

$$H_{30}[18 - Q(4)] + 3 \cdot X(4) \cdot B_{90} + 3 \cdot B_9 + 8 \cdot X(2) \cdot Q(2)$$

$$+ 10 \cdot X(3) \cdot Q(3)/4 = 0;$$

$$G_{80}[31 - 2 \cdot Q(4)] + 2 \cdot [5 \cdot X(4) \cdot B_{70} + 5 \cdot B_7 + X(4) \cdot B_{90} + B_9$$

$$+ 4 \cdot Q(2) \cdot X(3) + 4 \cdot Q(3) \cdot X(2)] = 0,$$

$$G_{30}[24 - Q(4)] + 6 \cdot X(4) \cdot B_{60} + 6 \cdot B_6 + 8 \cdot X(2) \cdot Q(2) = 0,$$

$$G_{20}[39 - 2 \cdot Q(4)] + 2[6 \cdot X(4) \cdot B_{60} + 6 \cdot B_6 + 9 \cdot X(4) \cdot B_{90}/2 + 9 \cdot B_9/2$$

$$+ 10 \cdot X(2) \cdot Q(3) + 10 \cdot X(3) \cdot Q(2)] = 0,$$

$$G_{10}[31 - 2 \cdot Q(4)] + 2\{G_{20} + X(4) \cdot [7 \cdot B_{90}/2 - 6 \cdot B_{60}] + 7 \cdot B_5/2 - 6 \cdot B_6$$

$$+ 6 \cdot X(1) \cdot Q(2) + 6 \cdot X(2) \cdot Q(1) + 6 \cdot X(2) \cdot Q(3)$$

$$+ 6 \cdot X(3) \cdot Q(2)\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& G_{00}[14-Q(4)]+2 \cdot X(4) \cdot [B_{50}-B_{90}/2]+2 \cdot [B_5-B_9/2]+3 \cdot X(3) \cdot Q(1)/2 \\
& \quad +3 \cdot X(1) \cdot Q(3)/2+6 \cdot X(3) \cdot Q(3)/4-8 \cdot X(2) \cdot Q(2)=0; \\
& E_{90}[25-2 \cdot Q(4)]+2[G_{80}+3 \cdot X(4) \cdot B_{30}/2+3 \cdot B_3/2+X(4) \cdot B_{50}+B_5 \\
& \quad +3 \cdot X(4) \cdot B_{70}+3 \cdot B_7-4 \cdot Q(2) \cdot X(3)-4 \cdot X(2) \cdot Q(3)]=0, \\
& E_{80}[27-2 \cdot Q(4)]+2[G_{80}+5 \cdot X(4) \cdot B_{30}/2+5 \cdot B_3/2+5 \cdot X(4) \cdot B_{70} \\
& \quad +5 \cdot B_7-X(4) \cdot B_{90}-B_9+4 \cdot X(1) \cdot Q(2)+4 \cdot Q(1) \cdot X(2) \\
& \quad +4 \cdot X(2) \cdot Q(3)+4 \cdot X(3) \cdot Q(2)]=0; \\
& F_{80}[25-2 \cdot Q(4)]+2[H_{20}+3 \cdot X(4) \cdot B_{40}/2+3 \cdot B_4/2+X(4) \cdot B_{50}/2+B_5/2 \\
& \quad +3 \cdot X(4) \cdot B_{80}+3 \cdot B_8-2 \cdot Q(2) \cdot X(3)-2 \cdot X(2) \cdot Q(3)]=0, \\
& F_{60}[27-2 \cdot Q(4)]+2[H_{20}+5 \cdot X(4) \cdot B_{40}/2+5 \cdot B_4/2+5 \cdot X(4) \cdot B_{80} \\
& \quad +5 \cdot B_8-X(4) \cdot B_{90}/2-B_9/2+2 \cdot X(1) \cdot Q(2)+2 \cdot Q(1) \cdot X(2) \\
& \quad +2 \cdot Q(2) \cdot X(3)+2 \cdot X(2) \cdot Q(3)]=0; \\
& D_{40}[21-2 \cdot Q(4)]+2 \cdot [F_{60}+F_{80}+3 \cdot X(4) \cdot B_{40}+3 \cdot B_4+3 \cdot X(4) \cdot B_{20} \\
& \quad +3 \cdot B_2-X(4) \cdot B_{50}/2-B_5/2+3 \cdot X(4) \cdot B_{80}+3 \cdot B_8-2 \cdot X(1) \cdot Q(2) \\
& \quad -2 \cdot Q(1) \cdot X(2)-2 \cdot Q(2) \cdot X(3)-2 \cdot X(2) \cdot Q(3)]=0; \\
& A_{80}[21-2 \cdot Q(4)]+2\{E_{80}+E_{90}+X(4) \cdot [3 \cdot B_{10}+3 \cdot B_{30}-B_{50}+3 \cdot B_{70}] \\
& \quad +3 \cdot B_1+3 \cdot B_3-B_5+3 \cdot B_7-4 \cdot X(1) \cdot Q(2)-4 \cdot Q(1) \cdot X(2) \\
& \quad -4 \cdot Q(2) \cdot X(3)-4 \cdot X(2) \cdot Q(3)\}=0; \\
& 3-Q(4)+3 \cdot B_{50}+12 \cdot B_{60}+5 \cdot B_{90}-X(4) \cdot [3 \cdot Q(1)+4 \cdot Q(2)+8 \cdot Q(3)] \\
& \quad -3 \cdot X(1)-4 \cdot X(2)-8 \cdot X(3)=0, \\
& \quad -X(4) \cdot [4+3 \cdot B_{10}+3 \cdot B_{20}+4 \cdot B_{30}+4 \cdot B_{40}+7 \cdot B_{50}/2-9 \cdot B_{90}/2] \\
& \quad +6 \cdot X(1) \cdot Q(2)-4 \cdot X(2) \cdot Q(3)-3 \cdot B_1-3 \cdot B_2-4 \cdot B_3-4 \cdot B_4 \\
& \quad -7 \cdot B_5/2+9 \cdot B_9/2+6 \cdot Q(1) \cdot X(2)-4 \cdot Q(2) \cdot X(3)+9 \cdot Q(1)/2 \\
& \quad -Q(3)+3 \cdot A_{80}+3 \cdot D_{40}+5 \cdot E_{80}-3 \cdot E_{90}+5 \cdot F_{60}-3 \cdot F_{80}-5 \cdot H_{20} \\
& \quad -5 \cdot G_{80}-4 \cdot G_{20}+4 \cdot G_{10}-Q(4) \cdot Q(1)=0, \\
& 8 \cdot Q(2)-Q(4) \cdot Q(2)+X(4) \cdot [2-B_{30}-6 \cdot B_{60}-3 \cdot B_{90}]-B_5-6 \cdot B_6 \\
& \quad -3 \cdot B_9-3 \cdot X(1) \cdot Q(3)-3 \cdot Q(1) \cdot X(3)+3 \cdot X(2) \cdot Q(1) \\
& \quad +3 \cdot Q(2) \cdot X(1)+10 \cdot H_{30}+6 \cdot G_{00}+16 \cdot G_{30}=0, \\
& 13 \cdot Q(3)/2-Q(4) \cdot Q(3)+2 \cdot X(4)-X(4) \cdot \{3 \cdot B_{30}/2+3 \cdot B_{40}/2 \\
& \quad +8 \cdot B_{70}+8 \cdot B_{80}+9 \cdot B_{90}/2\}-[3 \cdot B_3/2+3 \cdot B_4/2+8 \cdot B_7+8 \cdot B_8 \\
& \quad +9 \cdot B_9/2]-6 \cdot X(1) \cdot Q(2)-6 \cdot Q(1) \cdot X(2)-6 \cdot Q(2) \cdot X(3)
\end{aligned}$$

$$-6 \cdot X(2) \cdot Q(3) + 3 \cdot E_{90} + 3 \cdot F_{80} + 3 \cdot G_{10} + 9 \cdot G_{20} \\ + 5 \cdot G_{80} + 5 \cdot H_{20} = 0,$$

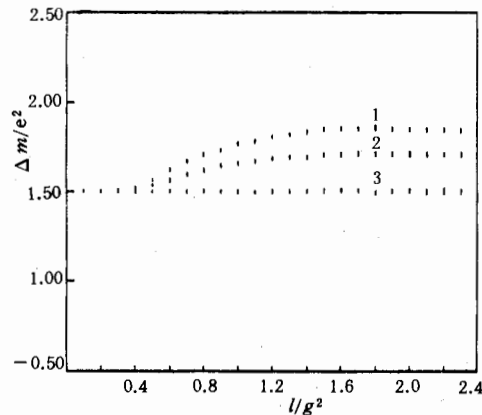


图 2

1. 四阶不连接图的结果, 2. 四阶连接图的结果, 3. 三阶图的结果.

其中: H_{20}, \dots, A_{80} 为部分四阶图的系数. 解方程 (令 $Q=1$) 得四级连接图胶球质量如图 2 所示, 从图中看到, 四级连接图的胶球质量也显示出良好的标度行为.

3 结 论

从图 1 和图 2 看到, 采用连接图计算出的真空波函数的 μ_0 比采用不连接图计算出的 μ_0 有明显改善. 对于胶球质量的三阶图近似, 两种方案的计算结果没有明显差异. 对于四阶图近似, 在弱耦合区二者相差 0.1 左右, 它们均表现良好的标度行为, 并与 MC 模拟结果^[4] 接近.

参 考 文 献

- [1] Shuohong Guo, Qizhou Chen, Lei Li, *Phys. Rev.*, **D49** (1994) 507.
- [2] Qizhou Chen *et al.*, *Phys. Rev.*, **D50** (1994) 3564.
- [3] 惠萍、陈启洲, 高能物理与核物理, **19** (1995) 820.
- [4] K. Farakos, G. Koutsoumbas, S. Sarantakos, *Phys. Lett.*, **B189** (1987) 173.

Analytic Calculation of Glueball Mass In $(2+1)-D$ $SU(2)$ Lattice Gauge Theory

Hui Ping

(Department of Physics, Guangdong College of Education, Guangzhou 510303)

Cai Pengfei Chen Qizhou

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Received 19 December 1994

Abstract

In this paper, the glueball mass of 0^{++} is calculated in the $(2+1)-D$ $SU(2)$ lattice gauge theory with connection graphs. The result shows a good scaling behavior.

Key words lattice gauge, glueball mass, analytic calculation.