储存环聚焦结构设计中的比例定律*

金 玉 明

（中国科学技术大学 国家同步辐射实验室 合肥 230029）

1995-12-05收稿

摘 要

阐述并证明了储存环聚焦结构设计中的比例定律. 即储存环的尺寸按一定比例放大或缩小时，可以保持工作点和束流发射度不变；但储存环的能量改变时，其束流发射度将会随能量的平方变化.

关键词 储存环，聚焦结构，比例定律，束流发射度.

1 引 言

在储存环(或同步加速器)的磁铁聚焦结构设计中，由于各种原因，有时需要将已经设计计算好的储存环几何尺寸加以放大或缩小，而希望某些参数如工作点 $\nu(\nu_x、\nu_y)$，束流发射度 $\varepsilon(\varepsilon_x、\varepsilon_y)$ 保持不变. 因为好的工作点的寻找费时甚多，合适的束流发射度也不容易得到. 比例定律将告诉人们如何变化储存环元件的参数而使工作点和束流发射度保持不变. 在储存环的设计中，也会经常遇到改变设计能量的问题，那么束流发射度也会随之变化. 比例定律将给出这些变化的规律和所要求的条件.

2 比 例 定 律

假设有一个已经设计好的能量为 E_0 的储存环，其周长为 C_0，工作点为 $\nu_0(\nu_{x0}、\nu_{y0})$，束流发射度为 $\varepsilon_0(\varepsilon_{x0}、\varepsilon_{y0})$，Twiss 参数为 $\alpha_0(s)$、$\beta_0(s)$、$\gamma_0(s)$，能散函数为 $\eta_0(s)$. 如果把它的周长由 C_0 变为 C，即使 $C=qC_0$. q 是一个大于0的任何实数. 或者说该储存环的所有元件(包括二、四极磁铁，漂移节)的长度(L_B、L_Q、L_D)都按照 q 倍的比例变化(放大或缩小). 只要令 $\rho=q\rho_0$(ρ、ρ_0 为弯铁的弯转半径)或 $B=B_0/q$(B、B_0 为弯铁之磁场强度)，$K=K_0/q^2$(K、K_0 为四极铁之聚焦强度)，就可以使工作点和束流发射度保持不变. 这就是比例定律. 详述如下：

若已知能量为 E_0 的储存环的参数是：周长 C_0，工作点 $\nu_0(\nu_{x0}、\nu_{y0})$，束流发射度 $\varepsilon_0(\varepsilon_{x0}、\varepsilon_{y0})$，Twiss 参数为 $\alpha_0(s)$、$\beta_0(s)$、$\gamma_0(s)$. 二极磁铁的长度为 L_{B0}，每块铁的张角为

* 国家自然科学基金资助.

θ_0; 四极磁铁的长度为 L_{Q0}，聚焦强度为 K_0; 漂移节的长度为 L_{D0}.

假设 $C=qC_0$，$L_{Di}=qL_{D0i}$，$L_{Bi}=qL_{B0i}$，$L_{Qi}=qL_{D0i}$，$\rho_i=q\rho_{0i}$，$K_i=K_{0i}/q^2$，$\theta_i=\theta_0$ (C 为新储存环的周长，L_{Di}，L_{Bi}，L_{Qi}，ρ_i，K_i，θ_i 分别为新储存环的相应参数)，则得到 $\nu=\nu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\alpha(s)=\alpha_0(s)$，$\beta(s)=q\beta_0(s)$，$\gamma(s)=\gamma_0(s)/q$，$\eta(s)=q\eta_0(s)$，$\xi=\xi_0$ ($\nu,\varepsilon,\alpha(s)$，$\beta(s),\gamma(s)$，$\eta(s),\xi$ 为新储存环的相应参数).

3 比例定律之证明

设原储存环的一个周期的转换矩阵为

$$M_0=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

那么 Twiss 参数是[1]

$$\begin{cases} \alpha_0=\dfrac{M_{11}-M_{22}}{2\sin\mu_0} \\ \beta_0=\dfrac{M_{12}}{\sin\mu_0} \\ \gamma_0=-\dfrac{M_{21}}{\sin\mu_0} \end{cases}, \tag{2}$$

此处

$$\cos\mu_0=\frac{M_{11}+M_{22}}{2}, \tag{3}$$

而

$$\nu_0=\frac{N\mu_0}{2\pi}, \tag{4}$$

N 为储存环的周期数.

当储存环的每个元件的长度 L_{D0i}、L_{B0i}、L_{Q0i} 分别变为 qL_{D0i}、qL_{B0i}、qL_{Q0i}; ρ 变为 $q\rho_0$; K_{0i} 变化到 K_{0i}/q^2 时，新储存环的一个周期的转换矩阵是

$$M=\begin{pmatrix} M_{11} & qM_{12} \\ M_{21}/q & M_{22} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

新储存环的 Twiss 参数是

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{M_{11}-M_{22}}{2\sin\mu_0}=\alpha_0 \\ \beta=q\dfrac{M_{12}}{\sin\mu_0}=q\beta_0 \\ \gamma=\dfrac{-M_{21}}{q\sin\mu_0}=\gamma_0/q \end{cases}, \tag{6}$$

此处

$$\cos\mu=\frac{M_{11}+M_{22}}{2}=\cos\mu_0, \tag{7}$$

并且

$$\nu=\frac{N\mu}{2\pi}=\frac{N\mu_0}{2\pi}=\nu_0, \tag{8}$$

因为新、旧储存环的矩阵元 M_{11}、M_{22} 是相同的，所以 ν 值也是不变的.

下面证明束流发射度也是不变的. 不难证明新储存环的一个周期的三维转换矩阵为

$$M=\begin{pmatrix} M_{11} & qM_{12} & qM_{13} \\ M_{21}/q & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

由定义可知[2]

$$\eta=\frac{(1-M_{22})qM_{13}+qM_{12}M_{23}}{2-(M_{11}+M_{22})}=q\eta_0, \tag{10}$$

及

$$\eta'=\frac{(M_{21}/q)\,qM_{13}+(1-M_{11})M_{23}}{2-(M_{11}+M_{22})}=\eta'_0. \tag{11}$$

又由定义，$\mathscr{H}$ 函数为[3]

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\gamma\eta^2+2\alpha\eta\eta'+\beta\eta'^2\\&=\gamma_0(q\eta_0)^2/q+2\alpha_0q\eta_0\eta'_0+q\beta_0\eta_0'^2\\&=q(\gamma_0\eta_0^2+2\alpha_0\eta_0\eta'_0+\beta_0\eta_0'^2)\\&=q\mathscr{H}_0,\end{aligned} \tag{12}$$

因此得到新储存环的束流发射度[2]

$$\varepsilon_x=\frac{C_qE_0^2\langle\mathscr{H}\rangle_{弯铁}}{J_x\rho(m_0c^2)^2}=\frac{C_qE_0^2q\langle\mathscr{H}_0\rangle_{弯铁}}{J_xq\rho_0(m_0c^2)^2}=\varepsilon_{x0}; \tag{13}$$

$$\varepsilon_y=\frac{C_q\beta_{yn}}{2J_y\rho}=\frac{C_q(q\beta_{yn0})}{2J_y(q\rho_0)}=\varepsilon_{y0}, \tag{14}$$

即

$$\varepsilon=\varepsilon_0. \tag{15}$$

又因为

$$\Delta\nu=-\frac{1}{4\pi}\beta\delta K\Delta s=-\frac{1}{4\pi}(q\beta_0)\left(\frac{\delta K_0}{q^2}\right)(q\Delta s_0)=\Delta\nu_0, \tag{16}$$

所以色品

$$\xi=\frac{\Delta v}{\Delta E/E_0}=\frac{\Delta v_0}{\Delta E/E_0}=\xi_0. \tag{17}$$

上面已经证明了在储存环能量不变情况下的比例定律．如果储存环的能量从E_0变化到tE_0(t为大于0的任何实数)，显而易见，从公式(13)可得到

$$\varepsilon_x=t^2\varepsilon_{x0}. \tag{18}$$

这表明储存环的束流发射度是随其能量改变的倍数的平方变化的．必须指出，这个结论是在磁铁聚焦结构不变情况下得出的．如果储存环的能量和聚焦结构都在变化的情况下，它的束流发射度将取决于能量E、弯铁的弯转角度θ，以及弯铁和漂移节长度、β函数值等．其中以能量和弯转角度的作用最为明显，我们称它为特征比例律，即[4]

$$\varepsilon\propto E^2\theta^3. \tag{19}$$

如果取弯铁和漂移节长度、β函数值在合适的范围内，增加弯铁的数目(即减小θ值)将会大大降低束流发射度．

4 比例定律之应用实例

以合肥同步辐射光源(HLS)为例．它的周长为66m，工作点为$v_{x0}=3.58$，$v_{y0}=2.58$；束流发射度为$\varepsilon_{x0}=13.34\times10^{-8}$m · rad．令该储存环各元件的长度分别按$q=0.8$，1.2，2变化；二极铁磁场强度按$1/q=1/0.8$，$1/1.2$，$1/2$变化；四极铁聚焦强度按$1/q^2=1/0.8^2$，$1/1.2^2$，$1/2^2$变化．则该储存环的工作点和束流发射度均将保持不变．兹将计算结果列于表1．

表1 按比例定律计算的储存环参数

原储存环参数		按比例定律变化的新储存环参数		
	$q=1$	$q=0.8$	$q=1.2$	$q=2.0$
周长(m)	$C_0=66.1308$	$qC_0=52.90464$	79.35696	132.26160
漂移空间长度(m)	$L_{D01}=1.6811$	$qL_{D01}=1.34488$	2.01732	3.36220
	$L_{D02}=0.32$	$qL_{D02}=0.256$	0.384	0.640
	$L_{D03}=1.0$	$qL_{D03}=0.8$	1.2	2.0
二极铁长度(m)	$L_{B0}=1.1635$	$qL_{B0}=0.9308$	1.3962	2.3270
二极铁强度(T)	$B_0=1.2$	$B_0/q=1.5$	1.0	0.6
四极铁长度(m)	$L_{Q0}=0.30$	$qL_{Q0}=0.24$	0.36	0.6

续表 1

原储存环参数		按比例定律变化的新储存环参数		
	$q=1$	$q=0.8$	$q=1.2$	$q=2.0$
四极铁聚焦强度 (m^{-2})	$K_{01}=1.569180$	$K_{01}/q^2=2.451844$	1.089708	0.392295
	$K_{02}=-0.955667$	$K_{02}/q^2=-1.493230$	−0.663658	−0.238917
	$K_{03}=-2.267100$	$K_{03}/q^2=-3.542344$	−1.574375	−0.566775
	$K_{04}=3.070800$	$K_{04}/q^2=4.798125$	2.132500	0.767700
长直线节中点的 β 函数(m)	$\beta_{x0}=21.55$	$\beta_x=17.24$	25.86	43.10
最大的能散函数 (m)	$\eta_{x0}=1.60$	$\eta_x=1.28$	1.92	3.20
工作点	$v_{x0}=3.58$	$v_x=3.58$	3.58	3.58
	$v_{y0}=2.58$	$v_y=2.58$	2.58	2.58
束流发射度 (10^{-8}m · rad)	$\varepsilon_{x0}=13.34$	$\varepsilon_x=13.34$	13.34	13.34

表 1 中的数据是用 COMFORT 程序计算得到的．从表 1 中所列的数据可看出只要储存环中各元件的长度、强度按比例定律变化，则储存环的工作点和束流发射度确实是保持不变的．如果把一个周期的具有不同 q 值的 β、η 函数随轨道坐标的变化曲线画出来，则人们会看到它们的形状是几个比值为不同 q 的相似形．

应当指出，原理上讲，q 只要取大于 0 的实数，比例定律都是成立的．但是实际应用上，q 在 1 附近取值较有价值，q 过大过小都会使得储存环的参数变得不甚合理．此外，比例定律也可用于寻找新储存环参数的初值．因为在设计一个新储存环时，任意给定各元件的长度、强度，求解它的参数多半是无解的．若用一个已知相近的储存环用比例定律找到一组新储存环参数，以此为初值，再逐步改变储存环中的某些元件的长度、强度进行拟合计算，就比较容易求得所要求的新储存环参数．

参考文献

[1] E. D. Courant, H. S. Snyder, Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron, *Annals of physics*, 3(1958).
[2] 金玉明，电子储存环物理，中国科学技术大学出版社(1993).
[3] M. Sands, The Physics of Electron Storage Rings, SLAC-121(1970).
[4] H. Wiedemann, Design of Low Emitance Storage Rings, SSRL ACD-Note 33(1985).
[5] Y. Jin *et al*, The Magnet Lattice of the Storage Ring for HESYRL, Proceedings of the International Conference on Synchrotron Radiation Applications, P. 148(1990).

Scaling Law for Lattice Design of a Storage Ring

Jin Yuming
(*National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei* 230029)
Received 5 December 1995

Abstract

This paper describes and demonstrates the scaling law in the lattice design of a storage ring. When the size of the storage ring are enlarged or reduced according to a scale, the operating point v and the beam emittance ε will be invarible. But while the energy of the storage ring is changed, the emittance will vary with the energy square.

Key words storage ring, lattice design, scaling law, beam emittance.