

# 相对论谐振子模型对重子共振态 螺旋度振幅的计算

董宇兵

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

1996-12-29 收稿

## 摘 要

利用相对论谐振子模型,计算了重子共振态的螺旋度振幅,并考察了相对论修正的影响.

**关键词** 螺旋度振幅,共振态,相对论效应.

## 1 引 言

研究核子自旋相关性质是当前的重要课题<sup>[1]</sup>. 特别是在共振态能区的研究已越来越为人们所重视<sup>[2]</sup>. 由于在小  $Q^2$  区, Drell-Hearn-Gerasimov (DHG) 求和规则<sup>[3]</sup>是非常重要的,因此从理论和实验上分别研究 DHG 求和规则是迫切的. 对它的研究不但可了解核子的极化结构函数,而且能得到更多的关于重子共振态的自旋相关性质. 实验上日本的 Spring-8<sup>[4]</sup>, 德国的 MAMI<sup>[5]</sup> 以及 CEBAF<sup>[6]</sup> 都将对 DHG 求和规则进行直接探测,同时也进一步观测重子共振态的自旋相关性质.

以往对重子共振态的计算<sup>[7-9]</sup>多数是利用非相对论的谐振子模型. 可是由于非相对论谐振子模型对核子形状因子和电磁半径解释的不足,使得直接在实验室坐标系中的计算难以进行. 通常是在等速参考系下 (EVF)<sup>[10]</sup> 进行理论计算.

注意到相对论谐振子模型是由 Yukawa<sup>[11]</sup>, 费曼<sup>[12]</sup> 等以及 Fujimura 等<sup>[13]</sup> 分别提出的. 其主要目的是给出核子的形状因子. 在此模型中,核子的形状因子为

$$F(Q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{2M^2}\right)^2} \exp\left(-\frac{Q^2}{6\alpha\left(1 + \frac{Q^2}{2M^2}\right)}\right).$$

显然,在大的动量转移  $Q^2$  区域内,它与 dipole 形状因子相似,因此也与实验结果相符.

本文是应用相对论谐振子模型来计算重子共振态的螺旋度振幅,并分析相对论效应的影响.

## 2 相对论谐振子模型

在组分夸克模型之中,重子波函数满足以下的方程,

$$\left( \sum_{i=1}^3 \square_i - \bar{K} \sum_{i \neq j=1}^3 (x_i - x_j)^2 + V_0 \right) \Psi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (1)$$

其中 $\bar{K}$ 和 $V_0$ 是谐振子参数. 四维矢量 $x$ 和 $\square$ 定义为

$$x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2; \quad \square = \partial_0^2 - \nabla^2. \quad (2)$$

方程(1)在引入以下坐标后

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3), \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3), \quad (3)$$

可对角化为

$$(\square_R + \square_\rho + \square_\lambda - \omega^2 \rho^2 - \omega^2 \lambda^2 + V_0) \Psi(R, \rho, \lambda) = 0, \quad (4)$$

其中 $\omega^2 = 3\bar{K}$ . 在复合粒子的质心系中,基态波函数可写为

$$\Psi_0(R, \rho, \lambda) = e^{-\frac{iMR}{\sqrt{3}}} \Psi_{\text{int}}(\rho, \lambda), \quad (5)$$

$$\Psi_{\text{int}}(\rho, \lambda) = \prod_{\nu=\rho, \lambda} \Psi(\nu), \quad \Psi(\nu) = \frac{\omega}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega(\nu_0^2 + \nu^2)}, \quad (6)$$

其中 $\nu = (\rho, \lambda)$ 代表体系的两个独立坐标. 在体系的质心系中,激发态的波函数可写为<sup>[14]</sup>

$$\Psi_{n_x n_y n_z} = N_{n_x n_y n_z, l_x l_y l_z} \left( \prod_{i, j=x, y, z} H_{n_i}(\rho) H_{n_j}(\lambda) \right) \Psi_0(R, \rho, \lambda), \quad (7)$$

其中 $N_{n_x n_y n_z, l_x l_y l_z}$ 是归一化常数, $H$ 是厄米多项式. 由于类时激发意味着体系的虚质量,在这里只考虑类空的激发.

利用罗伦兹变换,在任意坐标系中,有

$$-(\nu_0^2 + \nu^2) = \nu^2 - 2 \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \nu}{M} \right)^2. \quad (8)$$

同时, $\rho$ 和 $\lambda$ 按如下的形式变换

$$\rho_\mu \rightarrow \rho_\mu - (\mathbf{p} \cdot \rho) / M^2 p_\mu, \quad \lambda_\mu \rightarrow \lambda_\mu - (\mathbf{p} \cdot \lambda) / M^2 p_\mu. \quad (9)$$

这样,在任意坐标系中,激发态和基态的波函数就可以容易地写出.

在相对论谐振子模型之下,可计算各个重子共振态的螺旋度振幅,并考察波函数的相对论修正对结果的影响.

已知冲量近似下,夸克和光子电磁相互作用的横向相互作用<sup>[15]</sup>

$$H_t = \sum_j \left[ e_j \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{E}_j - \frac{e_j}{2m_j} \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{B}_j - \frac{e_j}{4m_j} \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \left( \mathbf{E}_j \times \frac{\mathbf{p}_j}{2m_j} - \frac{\mathbf{p}_j}{2m_j} \times \mathbf{E}_j \right) \right]$$

$$+ \sum_{j < l} \frac{1}{4M} \left( \frac{\sigma_j}{m_j} - \frac{\sigma_l}{m_l} \right) \cdot \left( e_l E_l \times p_j - e_j E_j \times p_l \right), \quad (10)$$

纵向流是<sup>[16]</sup>

$$J_0 = \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \left[ \sum_j \left( e_j + \frac{ie_j}{4m_j^2} k \cdot (\sigma_j \times p_j) \right) e^{ik \cdot r} - \sum_{j < l} \frac{i}{4M} \left( \frac{\sigma_j}{m_j} - \frac{\sigma_l}{m_l} \right) \cdot (e_j k \times p_l e^{ik \cdot r} - e_l k \times p_j e^{ik \cdot r}) \right], \quad (11)$$

其中  $M(m)$  是核子(夸克)质量. (10) 式中电场和磁场分别是

$$E = i\omega\sqrt{4\pi} \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \epsilon e^{-ik \cdot r}, \quad B = i\sqrt{4\pi} \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \epsilon \times k e^{-ik \cdot r}, \quad (12)$$

$\epsilon$  是光子的极化矢量. 注意到(10)和(11)式是冲量近似下光子和夸克相互作用的非相对论约化, 为了考虑光子波函数中的相对论效应, 可简单地用  $e^{ik \cdot r}$  来代替  $e^{-ik \cdot r}$ . 由此可考察相对论谐振子模型中相对论效应对螺旋度振幅的影响.

### 3 结果和讨论

螺旋度振幅  $A_{1/2}$ ,  $A_{3/2}$  和  $S_{1/2}$  分别为

$$A_{1/2} = \langle S_z = 1/2 | H_t | S_z = -1/2 \rangle, \quad (13)$$

$$A_{3/2} = \langle S_z = 3/2 | H_t | S_z = 1/2 \rangle, \quad (14)$$

$$S_{1/2} = \langle S_z = 1/2 | J_0 | S_z = 1/2 \rangle, \quad (15)$$

$A_{1/2}$  和  $A_{3/2}$  分别代表光子的螺旋度反平行或平行于核子的螺旋度.  $S_{1/2}$  则代表纵向极化的光子与核子的相互作用.

为了考察相对论谐振子波函数对螺旋度振幅的影响, 在表 1, 2 中分别以  $e^{ik \cdot r}$  和  $e^{ik \cdot r} p_3^\pm$  为例, 给出了非相对论谐振子模型和相对论谐振子模型的矩阵元. 其中,  $E_{i,f}$ ,  $p_{i,f}$  和  $M_{i,f}$  分别是初态和末态的能量, 动量和质量. 定义为

$$p_i = -M_i \left[ \frac{E_i^L - M_i}{2M_i} \right]^{1/2}, \quad p_f = \left[ M_f \frac{E_f^L - M_f}{2} \right]^{1/2}, \\ E_{i,f} = [M_{i,f}^2 + p_{i,f}^2]^{1/2}. \quad (16)$$

$E_f^L$  是实验室系中末态粒子的能量. 在表中,  $f = E_f^L / M_f$ .  $\alpha$  是谐振子常数, 选  $\alpha = 0.16 \text{ GeV}^2$ . 表中的光子动量和能量为

$$k = \left[ \frac{E_f^L + M_f}{2M_f} \right]^{1/2} \left( k^L - \left[ \frac{E_f^L - M_f}{E_f^L + M_f} \right]^{1/2} \omega^L \right), \\ \omega = \left[ \frac{E_f^L + M_f}{2M_f} \right]^{1/2} \left( \omega^L - \left[ \frac{E_f^L - M_f}{E_f^L + M_f} \right]^{1/2} k^L \right), \quad (17)$$

其中  $k^L$  和  $\omega^L$  是实验室系中光子的动量和能量.

表1  $\langle [N_6, L^P]_{Nms} | e^{ikr} | [56, 0^+]_{00s} \rangle$  的非相对论夸克模型  
以及相对论谐振子模型中  $q$  坐标系里的空间矩阵元

$[N_6, L^P]_{Nms}$	非相对论	相 对 论
$[56, 0^+]_{00s}$	1	$\frac{1}{f^2}$
$[70, 1^-]_{10\rho}$	0	0
$[70, 1^-]_{10\lambda}$	$-\frac{ik}{\sqrt{3}\alpha}$	$-\frac{iE_f}{\sqrt{3}\alpha f^3 M_f} \left( k - \frac{p_f \omega}{E_f} \right)$
$[56, 0^+]_{20s}$	$\frac{k^2}{6\sqrt{3}\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{3}f^2} \left[ 1 - \frac{1}{f} \left( 1 - \frac{k^2}{6\alpha f} \right) \right] + \frac{p_f}{\sqrt{3}M_f^2 f^3} \left[ 2p_f - \frac{p_f(k^2 + \omega^2)}{6\alpha f} + \frac{E_f k \omega}{3\alpha f} \right]$
$[56, 2^+]_{20s}$	$-\frac{k^2}{3\sqrt{6}\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{6}f^2} \left[ \frac{1}{f} - 1 - \frac{k^2}{3\alpha f^2} \right] + \frac{2p_f}{\sqrt{6}M_f^2 f^3} \left[ 2p_f \left( 1 - \frac{(k^2 + \omega^2)}{12\alpha f} \right) + \frac{E_f \omega k}{3\alpha f} \right]$
$[70, 0^+]_{20\rho}$	0	0
$[70, 0^+]_{20\lambda}$	$\frac{k^2}{6\sqrt{3}\alpha}$	$\frac{k^2}{6\sqrt{3}f^4 \alpha} + \frac{p_f}{6\sqrt{3}M_f^2 f^4 \alpha} [p_f(k^2 + \omega^2) - 2E_f \omega k]$
$[70, 2^+]_{20\rho}$	0	0
$[70, 2^+]_{20\lambda}$	$\frac{k^2}{3\sqrt{6}\alpha}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}f^2} \left[ \frac{1}{f} - 1 - \frac{k^2}{3f^2 \alpha} \right] + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{p_f}{6M_f^2 \alpha f^4} [p_f(k^2 + \omega^2) - 2E_f \omega k]$

整个的阵元应对相对论模型乘  $e^{-\frac{(k^2 + \omega^2)}{6\alpha f}}$ , 对非相对论结果乘以  $e^{-k^2/6\alpha}$  因子.

表2 非相对论模型和相对论谐振子模型对

$\langle [N_6, L^P]_{Nms} | e^{ik \cdot r} p_3^\pm | [56, 0^+]_{00s} \rangle$  所给出的  
空间阵元(具体解释见表1)

$[N_6, L^P]_{Nms}$	非相对论	相 对 论
$[56, 0^+]_{00s}$	0	0
$[70, 1^-]_{1\pm 1\rho}$	0	0
$[70, 1^-]_{1\pm 1\lambda}$	$\pm i\sqrt{\frac{2\alpha}{3}}$	$\pm i\sqrt{\frac{2\alpha}{3}} \frac{1}{f^2}$
$[56, 0^+]_{20s}$	0	0
$[56, 2^+]_{2\pm 1s}$	$\pm \frac{k}{3}$	$\pm \frac{E_f}{3f^3 M_f} \left( k - \frac{p_f \omega}{E_f} \right)$
$[70, 0^+]_{20\rho}$	0	0
$[70, 0^+]_{20\lambda}$	0	0
$[70, 2^+]_{2\pm 1\rho}$	0	0
$[70, 2^+]_{2\pm 1\lambda}$	$\mp \frac{k}{3}$	$\mp \frac{E_f}{3f^3 M_f} \left( k - \frac{p_f \omega}{E_f} \right)$

在图1和图2中  $P_{33}$  (1232) 的螺旋度振幅  $A_{1/2}$  和  $A_{3/2}$ , 以及  $S_{11}$  (1535) 的螺旋度振幅已分别给出. 为了比较方便, 在实验室系中非相对论谐振子的计算结果也示于图中.

由图1和图2可以清楚地看出相对论修正对螺旋度振幅的影响是明显的. 特别是对大  $Q^2$  区的影响尤为显著. 这一结果是相对论谐振子模型的一个很自然的结果. 与非相对论谐振子模型相比较, 相对论谐振子模型的结果随  $Q^2$  的变化要比非相对论谐振子模型的结果要缓慢. 实际上比较非相对论

子模型的结果随  $Q^2$  的变化要比非相对论谐振子模型的结果要缓慢. 实际上比较非相对论

谐振子模型所给出的核子的形状因子  $F(Q^2) \propto e^{-\frac{Q^2}{6\alpha}}$ , 可以看到相对论谐振子模型所给出的形状因子在大动量转移区域内是变化较为缓慢的, 但是它于实验结果或经验的偶极形状因子符合得较好. 因此, 可以预计利用相对论的谐振子模型所给出的重子共振态的螺旋度振幅随  $Q^2$  变化关系要好于实验室系中非相对论谐振子模型的结果. 同时也说明了相对论的罗伦兹收缩对核子的自旋相关性质, 如螺旋度振幅的影响是明显的.

由于目前实验上对重子共振态螺旋度振幅随  $Q^2$  关系尚没有很可靠的数据, 因此本文的计算会对今后的实验给出理论的预测. 可以相信在今后 CEBAF 和 MAMI, 以及日本 Spring-8 等实验室, 有关重子的自旋相关性质的实验也必将给出各种理论模型一个检验.

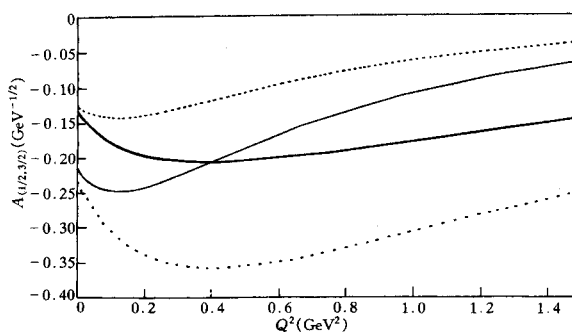


图 1  $\Delta(1230)$  的螺旋度振幅

粗实线和疏点线分别是非相对论模型  $A_{1/2}$  和  $A_{3/2}$  的计算结果; 细实线和密点线分别是相对论谐振子模型对  $A_{3/2}$ ,  $A_{1/2}$  的计算结果.

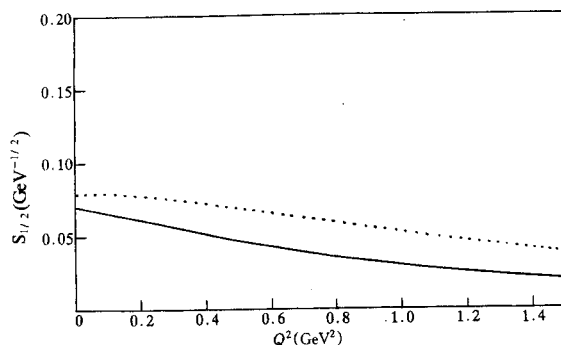


图 2  $N(1535)$  的纵向螺旋度振幅

实线是相对论的计算结果; 点线是非相对论的结果.

### 参 考 文 献

- [1] J. Asham et al., *Phys. Lett.*, **B206**(1988)364, *Nucl. Phys.*, **B328**(1989)1; G. Baum et al., *Phys. Rev. Lett.*, **45**(1990)2000; Spin Muon Collaboration, B. Adeva et al., *Phys. Lett.*, **B302**(1989)533; SLAC-E142 Collaboration, P. L. Anthony et al., *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993)959; D. Adams et al., *Phys. Lett.*, **B329**(1994)399.
- [2] S. D. Drell, SLAC Report No. SLAC-PUB 5720, 1992(unpublished); V. Burkert et al., *Phys. Rev.*, **D47**(1993)46; V. Burkert, B. L. Ioffe, *Phys. Lett.*, **B296**(1992)223; D. Drechsel et al., *Few-Body Systems*, **15**(1993)99; **16**(1994)99; Z. P. Li, *Phys. Rev.*, **D48**(1993)R3945; V. D. Burkert, *Int. J. Mod. Phys.*,

- E1(1992)421,
- [3] S. B. Gerasimov, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **2**(1966)430; S. D. Drell, A. C. Hearn, *Phys. Rev. Lett.*, **16**(1966) 908.
- [4] T. Iwata, GOH Sum Rule with GeV Photon, RCNP-p-134, 1993.
- [5] J. Ahrens, Mainz Proposal, 12 / 2-93, 1993.
- [6] V. D. Burkert, B. L. Ioffe, Polarized Structure Functions of Proton and Neutron and the Gerasimov-Drell-Hearn and Bjorken Sum Rules, CEBAF-PR-93-034; D. I. Sober *et al.*, Helicity Structure of Pion Photoproduction, CEBAF PR-91-015, 1991; V. Burkert *et al.*, Measurement of Polarized Structure Functions In Inelastic Electron Scattering Using CLAS, CEBAF Proposal PR-91-023, 1991.
- [7] M. Warns *et al.*, *Z. Phys.*, **C45**(1990)627.
- [8] Z. P. Li, F. E. Close, *Phys. Rev.*, **D42**(1992)2207.
- [9] Z. P. Li, Z. J. Li, *Phys. Rev.*, **D50**(1994)3119.
- [10] F. Foster, G. Hughes, *Z. Phys.*, **C14**(1982)123.
- [11] H. Yukawa, *Phys. Rev.*, **91**(1953)416.
- [12] R. P. Feynman *et al.*, *Phys. Rev.*, **D3**(1971)2107.
- [13] K. Fujimura *et al.*, *Prog. Theor. Phys.*, **43**(1970) 73; **44**(1970)93.
- [14] R. G. Lipes, *Phys. Rev.*, **D5**(1972)2849.
- [15] F. E. Close, Z. P. Li, *Phys. Rev.*, **D42**(1992)2194.
- [16] Z. P. Li, Y. B. Dong, *Phys. Rev.*, **D54**(1996)1401.

## Study on the Helicity Amplitudes of the Resonances Based on the Relativistic Harmonic Oscillator Model

Dong Yubing

(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039*)

Received 29 December 1996

### Abstract

Using the relativistic harmonic oscillator model, the helicity amplitudes of resonances are studied and the relativistic effect is addressed.

**Key words** helicity amplitude, resonance, relativistic effect.