

有限温度下无质量场真空图中 红外发散的正规化

陈相君

(哈尔滨工业大学物理系 哈尔滨 150001)

刘连寿

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430079)

1996-03-25 收稿

摘 要

讨论无质量 φ^3 理论标量场和胶子场三圈真空图中的红外发散和它的正规化, 给出了它在 D 维空间的解析延拓表达式, 并讨论了如何分离出交缠发散时的红外发散和共线发散.

关键词 无质量标量场, 胶子场, 真空图, 红外发散.

1 引 言

有限温度场论是场的热力学理论^[1]. 在微扰计算中, 真空图对应着场的热力学势^[2]. 因此, 人们注重真空图的计算. 对于无质量场, 真空图中会出现共线发散^[3]和红外发散^[4]. 文献[3]讨论了无质量 φ^3 理论标量场真空图中的共线发散和它的正规化. 文献[4]仅指出了无质量 φ^4 理论标量场三圈真空图中存在有限温度下的红外发散, 但没有讨论红外发散的正规化. 以前, 人们也注意到了在一些过程中存在有限温度下的红外发散, 且在单圈水平上可相互抵消^[5,6], 因此, 对有限温度下红外发散的正规化没有讨论. 本文在第二节着重讨论这个问题. 首先指出在 φ^3 理论标量场和胶子场三圈真空图中碰到的红外发散积分, 然后讨论它的正规化, 给出它的解析延拓表达式, 把红外发散孤立出来. 另外, 红外发散和共线发散都是在三圈图中出现的. 因此, 交缠发散比较严重. 在这种情况下, 把红外发散孤立出来是比较复杂的. 本文在第三节将讨论这个问题.

2 真空图中的红外发散积分和它的正规化

在无质量 φ^3 标量场和胶子场的真空图中, 计算发现在单圈和双圈情况不出现红外发散和共线发散, 在三圈图中才出现. 这和文献[4]中无质量 φ^4 标量场的情况一样. φ^3

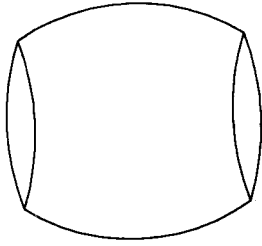


图1 典型三圈真空图

标量场和胶子场有8个三圈真空图,我们只取其中的典型图和典型的积分来说明有限温度下的红外发散积分.取的典型图为图1.

在计算中,取温度传播子的实时形式进行计算,对于 φ^3 理论,它是

$$i\Delta(k) = \frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k; \quad (1)$$

对于胶子场,它是(取费曼规范)

$$i\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = -g_{\mu\nu} \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right) \delta^{ab}, \quad (2)$$

其中 $\delta_k = \delta(k^2) / (e^{\beta|k_0|} - 1)$. 公式(1)和(2)的右边第一项是温度传播子的零温部分,第二项是温度传播子的有限温度部分.

对于 φ^3 标量场,图1的积分为($D=4-\epsilon$)

$$I = (-ig)^4 \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right)^2 \left(\frac{i}{p^2 + i\eta} + 2\pi\delta_p \right) \left(\frac{i}{q^2 + i\eta} + 2\pi\delta_q \right) \\ \times \left(\frac{i}{(p+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{p+k} \right) \left(\frac{i}{(q+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{q+k} \right). \quad (3)$$

其中含有5个温度传播子的有限温度部分,并给出实部的项为

$$I(5) = -ig^4 \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-5}} \frac{2i}{k^2 + i\eta} \delta_k \delta_p \delta_q \delta_{p+k} \delta_{q+k} \\ = \frac{ig^4}{2^5 (2\pi)^7} \int d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k \frac{1}{1 - \cos\theta_p} \frac{1}{1 - \cos\theta_q} \\ \times \int_0^\infty dk \frac{1}{e^k - 1} \left(-\frac{2}{k^{5+\epsilon}} + \frac{3}{k^{4+\epsilon}} + \frac{2}{3} \frac{1}{k^{3+\epsilon}} \right). \quad (4)$$

(4)式的详细计算见附录. 式中关于 k 的积分的一般形式为

$$I(\alpha) = \int_0^\infty dk \frac{1}{e^k - 1} \cdot \frac{1}{k^\alpha}, \quad (\alpha > 1), \quad (5)$$

在其它三圈图中,也会出这种类型的积分,它是红外发散的. 这就是有限温度下的红外发散积分.

为了找出(5)式中的红外发散,必须对它进行正规化. 按照维数正规化的原则,要找出发散和维数之间的关系. 把(5)式分为两部分:

$$I(\alpha) = \int_0^1 dk \frac{k^{-\alpha}}{e^k - 1} + \int_1^\infty dk \frac{k^{-\alpha}}{e^k - 1}. \quad (6)$$

利用公式^[7]

$$\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} t^{2n}, \quad |t| < 2\pi, \quad (7)$$

其中 B_n 是 Bernoulli 数, $B_1=1/6$, $B_2=1/30$, ..., (6) 式变为

$$I(\alpha) = \int_0^1 \left(t^{-\alpha-1} - \frac{t^{-\alpha}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} t^{2n-\alpha-1} \right) + \int_1^{\infty} dt \frac{t^{-\alpha}}{e^t-1}. \quad (8)$$

积分是 α 的函数. 考虑 α 是复数, 则 $I(\alpha)$ 是复变函数. (8) 式中右边的第二项在全复平面是解析函数^[8]. (8) 式中右边的第一项在全复平面上可用 B 函数的解析延拓表达式来表示^[8]. 这样得到

$$I(\alpha) = B(-\alpha, 1) - \frac{1}{2} B(-\alpha+1, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} B(2n-\alpha, 1) + \int_1^{\infty} dt \frac{t^{-\alpha}}{e^t-1}. \quad (9)$$

利用 B 函数和 Γ 函数之间的关系以及 Γ 函数的性质, (9) 式可变为

$$I(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2(\alpha-1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \frac{1}{2n-\alpha} + \int_1^{\infty} dt \frac{t^{-\alpha}}{e^t-1}. \quad (10)$$

它就是红外发散积分(5)的解析延拓表达式, 利用它可把红外发散孤立出来, 实现红外发散积分的正规化. 例如, $\alpha=2m+\epsilon$ ($m \geq 1$),

$$I(2m+\epsilon) = -\frac{1}{2m} + \frac{1}{2(2m-1)} + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!} \frac{-1}{\epsilon} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \frac{1}{2n-2m} + \int_1^{\infty} dt \frac{t^{-2m}}{e^t-1}, \quad (11)$$

红外发散由 $(-1)^m B_m / (2m)! \epsilon$ 给出.

利用(10)式, (4)式中关于 k 的积分部分的红外发散就分离出来了,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dk \frac{1}{e^k-1} \left(-2k^{-5-\epsilon} + 3k^{-4-\epsilon} + \frac{2}{3} k^{-3-\epsilon} \right) \\ &= \frac{1}{10(4!)} \frac{1}{\epsilon} - \frac{307}{1080} + \dots + \int_1^{\infty} dk \frac{-2k^{-5} + 3k^{-4} + \frac{2}{3} k^{-3}}{e^k-1} \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} \left[\frac{-2}{2n-5} + \frac{3}{2n-4} + \frac{2}{3(2n-3)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

3 交缠红外发散的分离

真空图中的红外发散和共线发散一般是在三圈图中出现的. 因此, 交缠发散是不可避免的. 例如, 上面 φ^3 标量场的一个积分, 除了动量 k 的红外发散外, 还有角度 θ_p 和

θ_q 的共线发散. 红外发散和共线发散这样交缠一起, 会出现 ϵ^{-3} , ϵ^{-2} , ϵ^{-1} 的项. 要把红外发散全部孤立出来, 就要给出上述各项. 共线发散的正规化公式^[3]为

$$\int \frac{d\Omega}{(1-\cos\theta)^N} = \frac{2\pi}{2^{N-1}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(1-N-\frac{\epsilon}{2}\right)}{\Gamma(2-N-\epsilon)}. \quad (13)$$

利用它, 积分(4)的最后结果为

$$\begin{aligned} I(5) &= \frac{ig^4}{2^8\pi^4} \left(-\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \left(-\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \\ &\times \left\{ \frac{1}{15.2^4} \frac{1}{\epsilon} - \frac{307}{1080} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} \left(\frac{-2}{2n-5} + \frac{3}{2n-4} + \frac{2}{3(2n-3)} \right) \right. \\ &\left. + \int_1^{\infty} dk \frac{-2k^{-5} + 3k^{-4} + \frac{2}{3}k^{-3}}{e^k - 1} \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

在上面这个例子中, 被积函数是关于角度积分和动量积分分离的情况. 因此, 还比较好处理. 在其它一些积分中, 特别是在胶子场中, 被积函数是角度积分和动量积分混在一起不能分离的. 这时, 要分离出红外发散就比较复杂. 以胶子场的一个三圈真空图(和图1形式上一样, 只是图中线代表胶子线)中的一项来说明如何处理这种情况.

胶子情况: 图1的积分为

$$\begin{aligned} I &= g^4 \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \left(\frac{i}{p^2 + i\eta} + 2\pi\delta_p \right) \left(\frac{i}{q^2 + i\eta} + 2\pi\delta_q \right) \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right)^2 \\ &\times \left(\frac{i}{(p+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{p+k} \right) \left(\frac{i}{(q+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{q+k} \right) N_c, \\ N_c &= 72 [100(p \cdot q)^2 + 100p \cdot q(p \cdot k + q \cdot k) - 20((p \cdot k)^2 + (q \cdot k)^2) + 56p^2q^2 \\ &+ 56(p \cdot kq^2 + q \cdot kp^2) + 50(p \cdot q)k^2 + 106p \cdot kq \cdot k + 86(p^2 + q^2)k^2 \\ &+ 66(p \cdot k + q \cdot k)k^2 + 84(k^2)^2], \quad (15) \end{aligned}$$

其中含三个温度传播子的有限温度部分的一项为

$$I(3) = -ig^4 \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \frac{(q \cdot k)^2}{(p+q)^4(p+q+k)^2} 2\pi\delta_p 2\pi\delta_q 2\pi\delta_k. \quad (16)$$

进行 p_0 , q_0 和 k_0 的积分后, 有

$$\begin{aligned} I(3) &= -ig^4 \int \frac{d^D p d^D q d^D k d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k}{(2\pi)^{3D-3}} \frac{p^{D-5} q^{D-3} k^{D-1}}{32} \frac{1}{e^{\beta p} - 1} \frac{1}{e^{\beta q} - 1} \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \\ &\times \left\{ \frac{(1 - \cos\theta_{kq})^2}{(1 - \cos\theta_{pq})^2 [pq(1 - \cos\theta_{pq}) + a_+ k - |p+q| k \cos\theta_k]} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1 + \cos\theta_{kq})^2}{(1 - \cos\theta_{pq})^2 [pq(1 - \cos\theta_{pq}) - a_+ k - |\mathbf{p} + \mathbf{q}| k \cos\theta_k]} \\
& + \frac{(1 + \cos\theta_{kq})^2}{(1 + \cos\theta_{pq})^2 [-pq(1 + \cos\theta_{pq}) + a_- k - |\mathbf{p} + \mathbf{q}| k \cos\theta_k]} \\
& + \frac{(1 - \cos\theta_{kq})^2}{(1 + \cos\theta_{pq})^2 [-pq(1 + \cos\theta_{pq}) - a_- k - |\mathbf{p} + \mathbf{q}| k \cos\theta_k]} \Bigg\}, \quad (17)
\end{aligned}$$

其中 θ_{kq} 是 \mathbf{k} 和 \mathbf{q} 之间的夹角, θ_{pq} 是 \mathbf{p} 与 \mathbf{q} 之间的夹角, θ_k 是 \mathbf{k} 与 $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ 之间的夹角, $a_{\pm} = p \pm q$.

(17)式的被积函数中的动量和角度不能很好地分开,所以不能直接用红外发散和共线发散的正规化公式把发散孤立出来.要把发散分离出来,须考虑在奇点附近函数的渐近形式,然后再用正规化公式找出红外发散和共线发散.

先考虑动量趋于零的情况,动量 q 和 k 趋于零不是被积函数的奇点,故不存在 q 和 k 的红外发散; $p \rightarrow 0$ 是被积函数的奇点,但是这时关于角度方面的积分为0,故整体上不存在动量 p 的红外发散(详细计算见附录).

下面考虑关于角度的积分. $\cos\theta_{pq} = 1$ 和 $\cos\theta_{pq} = -1$ 是被积函数的奇点.在奇点附近展开被积函数找出渐近函数形式,得到

$$\begin{aligned}
I(3) & \approx -ig^4 \left(\frac{1}{32(2\pi)^9} \right) \int dpdqdk d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k \frac{1}{e^{\beta p} - 1} \frac{q^2}{e^{\beta q} - 1} \frac{k}{e^{\beta k} - 1} \\
& \times \left[\left(\frac{1}{a_-^2} - \frac{1}{a_+^2} \right) \frac{2}{1 - \cos\theta_{pq}} + \left(\frac{1}{a_-^4} + \frac{1}{a_+^4} \right) \frac{4pq}{1 - \cos\theta_k} \right] + \dots \\
& = \frac{ig^4}{2^7 \pi^6} \int dpdqdk \frac{1}{e^{\beta p} - 1} \frac{q^2}{e^{\beta q} - 1} \frac{k}{e^{\beta k} - 1} \left[\frac{1}{a_-^2} - \frac{1}{a_+^2} + 2pq \left(\frac{1}{a_-^4} + \frac{1}{a_+^4} \right) \right] \frac{1}{\epsilon} + \dots \quad (18)
\end{aligned}$$

这样就把红外发散分离出来了.

4 总 结

本文首先给出了在无质量 φ^3 理论标量场和胶子场三圈真空图中碰到的有限温度下红外发散积分的形式;然后讨论了它的正规化,给出了解析延拓表达式.利用这个表达式可方便地把红外发散分离出来.在高圈计算中,交缠发散必然存在.本文讨论了两种类型被积函数交缠红外发散的分离.对于动量积分和角度积分分离形式的被积函数,可直接应用正规化公式,找出红外发散;对于动量积分和角度积分不能分离的被积函数,需在奇点附近展开,找到渐近函数形式,然后再用正规化公式.这样,用这种方法就可对一般形式的发散积分进行处理,寻找出红外发散来,为红外发散的消除打下基础.如何消除红外发散是进一步研究的课题.

参 考 文 献

- [1] 李家荣, 夸克物质理论导论, 湖南教育出版社, 1989.
 [2] J. Kapusta, Finite Temperature Field Theory, Cambridge University Press, 1989.
 [3] 陈相君、刘连寿, 高能物理与核物理, **19**(1995)907.
 [4] Y. Fujimoto, M. Loewe, J. C. Rojas, Dimensional Regularization at Finite Temperature, preprint of Pontificia Universidad Católica de Chile (1993)
 [5] R. Baier, B. Pire, D. Schiff, *Phys. Rev.*, **D38**(1989)2814.
 [6] J. Cleymans, I. Dadic, *Z. Phys.*, **C42**(1989)133.
 [7] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, (Academic Press, 1980).
 [8] 郭敦仁, 数学物理方法, 人民教育出版社, 1978.
 [9] A. J. Neimi, G. W. Semenoff, *Nucl. Phys.*, **B236**(1984)181.

附 录

$I(5)$ 的计算如下. 用恒等式^[9]

$$\frac{2\delta(k^2)}{k^2+i\eta} = \frac{\partial}{\partial k^2} \delta(k^2) + 2\pi i \delta^2(k^2) \quad (1)$$

代换 $I(5)$ 中的相应量. (1)式右边第二项代入后给出计算的虚部, 故忽略它. 于是, 对 p_0 , q_0 和 k_0 积分后有

$$I(5) = ig^4 \int \frac{dp_0 dk_0 d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k}{(2\pi)^{3D-5}} \frac{(pqk)^{D-3}}{8} \left[\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{k} \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \right) \right] n_p n_q$$

$$\times \left\{ \frac{\delta[2pk(1-\cos\theta_p)]}{e^{\beta p+k} - 1} \frac{\delta[2qk(1-\cos\theta_q)]}{e^{\beta q+k} - 1} + \frac{\delta[-2pk(1+\cos\theta_p)]}{e^{\beta|-p+k} - 1} \frac{\delta[2qk(1-\cos\theta_q)]}{e^{\beta q+k} - 1} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta[2pk(1-\cos\theta_p)]}{e^{\beta p+k} - 1} \frac{\delta[-2qk(1+\cos\theta_q)]}{e^{\beta|-q+k} - 1} + \frac{\delta[-2pk(1+\cos\theta_p)]}{e^{\beta|-p+k} - 1} \frac{\delta[2qk(1+\cos\theta_q)]}{e^{\beta|-q+k} - 1} \right\}. \quad (2)$$

对 p, q 进行积分后, 得

$$I(5) = \frac{ig^4}{2^5(2\pi)^3\beta^2} \int d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k \frac{1}{1-\cos\theta_p} \frac{1}{1-\cos\theta_q} \int_0^\infty dk \left[-\frac{k^{-3-\epsilon}}{(e^{\beta k} - 1)^3} - \frac{\beta k^{-2-\epsilon} e^{\beta k}}{(e^{\beta k} - 1)^4} \right]$$

$$= \frac{ig^4}{2^5(2\pi)^3\beta^2} \int d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k \frac{1}{1-\cos\theta_p} \frac{1}{1-\cos\theta_q}$$

$$\times \int_0^\infty dk \left[-\frac{1}{k^{3+\epsilon}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} + 1 \right) \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^{2+\epsilon}} \frac{\beta}{6} \left(\frac{1}{k^3} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + \frac{3}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{2}{k} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \frac{1}{e^{\beta k} - 1} \right]$$

$$= \frac{ig^4}{2^5(2\pi)^7} \int d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k \frac{1}{1-\cos\theta_p} \frac{1}{1-\cos\theta_q} \int_0^\infty dk \frac{1}{e^k-1} \left(\frac{-2}{k^{5+\epsilon}} + \frac{3}{k^{4+\epsilon}} + \frac{2}{3} \frac{1}{k^{3+\epsilon}} \right). \quad (3)$$

$I(3)$ 的计算:

在(17)中, 关于角度的坐标系选择如图2, p 和 q 在 xoz 平面内.

$$(1 \pm \cos\theta_{kq})^2 = 1 + \sin^2\theta' \sin^2\theta_k \cos^2\phi_k + \cos^2\theta' \cos^2\theta_k \mp 2\sin\theta' \sin\theta_k \cos\phi_k \\ \pm 2\cos\theta' \cos\theta_k \pm 2\sin\theta' \cos\theta' \sin\theta_k \cos\phi_k \cos\theta_k, \quad (4)$$

这里 $\sin\theta' = p \sin\theta_{pq} / (|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)$, $\cos\theta' = (q + p \cos\theta_{pq}) / (|\mathbf{p} + \mathbf{q}|)$. 进行 ϕ_k 的积分后(17)式中关于角度部分变为

$$I_1 = \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon}\theta_k \frac{2\pi + \pi \sin^2\theta' \cos^2\theta_k + 2\pi \cos^2\theta' \cos^2\theta_k - 4\pi \cos\theta' \cos\theta_k}{(1-\cos\theta_{pq})^2 [pq(1-\cos\theta_{pq}) + a_+ k - |\mathbf{p} + \mathbf{q}| k \cos\theta_k]}, \quad (5)$$

$$I_2 = \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon}\theta_k \frac{2\pi + \pi \sin^2\theta' \cos^2\theta_k + 2\pi \cos^2\theta' \cos^2\theta_k + 4\pi \cos\theta' \cos\theta_k}{(1-\cos\theta_{pq})^2 [pq(1-\cos\theta_{pq}) - a_+ k - |\mathbf{p} + \mathbf{q}| k \cos\theta_k]}, \quad (6)$$

$$I_3 = \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon}\theta_k \frac{2\pi + \pi \sin^2\theta' \cos^2\theta_k + 2\pi \cos^2\theta' \cos^2\theta_k + \pi \cos\theta' \cos\theta_k}{(1+\cos\theta_{pq})^2 [-pq(1+\cos\theta_{pq}) + a_- k - |\mathbf{p} + \mathbf{q}| k \cos\theta_k]}, \quad (7)$$

$$I_4 = \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon}\theta_k \frac{2\pi + \pi \sin^2\theta' \cos^2\theta_k + 2\pi \cos^2\theta' \cos^2\theta_k - 4\pi \cos\theta' \cos\theta_k}{(1+\cos\theta_{pq})^2 [-pq(1+\cos\theta_{pq}) - a_- k - |\mathbf{p} + \mathbf{q}| k \cos\theta_k]}, \quad (8)$$

当 $p \rightarrow 0$ 时, $\sin\theta' \rightarrow 0$, $\cos\theta' \rightarrow 1$,

$$I_1 \rightarrow \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon}\theta_k \frac{2\pi(1-\cos\theta_k)}{qk(1+\cos\theta_{pq})^2}, \quad (9)$$

$$I_2 \rightarrow \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon}\theta_k \frac{2\pi(1+\cos\theta_k)}{-qk(1-\cos\theta_{pq})^2}, \quad (10)$$

$$I_1 + I_2 \rightarrow \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon}\theta_k \frac{-4\pi \cos\theta_k}{qk(1-\cos\theta_{pq})^2} = 0, \quad (11)$$

同理 $I_3 + I_4 \rightarrow 0$.

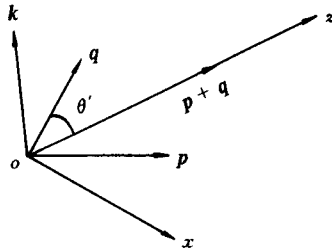


图2 有关角度的坐标系选取

当 $p \neq 0$ 时, 考虑(17)式的角度部分积分. 把 I_1, I_2 在 $\cos\theta_{pq}=1$ 点展开,

$$I_1 + I_2 \approx \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon} \theta_k \left(\frac{-4\pi pq}{a_+^2 k^2} \frac{1}{1 - \cos\theta_{pq}} + \frac{8\pi p^2 q^2}{a_+^4 k^2} \frac{1}{1 - \cos\theta_k} \right) + \dots \quad (13)$$

把 I_3, I_4 在 $\cos\theta_{pq} = -1$ 点展开,

$$I_3 + I_4 \approx \int d\Omega_p d\Omega_q d\theta_k \sin^{1-\epsilon} \theta_k \left(\frac{-4\pi pq}{a_-^2 k^2} \frac{1}{1 - \cos\theta_{pq}} + \frac{8\pi p^2 q^2}{a_-^4 k^2} \frac{1}{1 - \cos\theta_k} \right) + \dots \quad (14)$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \approx \int d\Omega_p d\Omega_q d\Omega_k \left[\frac{2pq}{1 - \cos\theta_{pq}} \left(\frac{1}{a_-^2} - \frac{1}{a_+^2} \right) + \frac{4p^2 q^2}{1 - \cos\theta_k} \left(\frac{1}{a_-^4} + \frac{1}{a_+^4} \right) \right] + \dots \quad (15)$$

Regularization of Infrared Divergences in the Vacuum Graphs of Massless Field at Finite Temperature

Chen Xiangjun

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Liu Lianshou

(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

Received 25 March 1996

Abstract

The infrared divergences of three-loop vacuum graphs of massless scalar and gluon fields and their regularization are discussed. The expression for analytical continuation is given. How to separate the infrared and collinear divergences from overlap ones is also discussed.

Key words massless scalar field, gluon field, vacuum graph, infrared divergence.