第21卷 第8期 高能物理与核物理 Vol.21, No.8
1997年8月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1997

中心扩张的 sl_2 双重 Yangian 的 Miura 变换

丁祥茂
(中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

侯伯宇 赵柳
(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

1997-01-06收稿

摘 要

构造了 sl_2 时中心扩张的双重 Yangian 在临界级时，即 $k=-2$ 时的 $\hbar$-Sugawara 算子．利用双重 Yangian 的自由场实现，得到了 sl_2 双重 Yangian 的 $\hbar$-Miura 变换．

关键词 级，双重 Yangian, $\hbar$-Sugawara 算子，$\hbar$-Miura 变换．

1 引 言

在二维场论的研究中，Virasoro 代数和 Kac-Moody 代数起着关键的作用[1]．Virasoro 代数及 Kac-Moody 代数描述的是场论在临界点的行为，即零质量的场论．而对于有质量的场的研究，问题就更为复杂，也更为重要．显然，此时 Virasoro 代数或 Kac-Moody 代数的地位将被别的代数结构所取代．例如，有质量的自旋 1/2 的 XXX 模型的对称由级为 1 的量子仿射代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 来描述[2]．利用 $U_q(\widehat{sl_2})_c$ 的对称性可以给出有质量的自旋 1/2XXX 模型的关联函数．而最近这方面的最重要进展之一是 Frenkel 和 Reshetikhin 的工作[3](下面简称 FR)，FR 工作的主要发现是找到了一种形变的 Virasoro 代数，即 q-Vir. 代数．FR 的工作由量子仿射代数 $U_q(\widehat{sl_2})_c$ (与 Yang-Baxter 方程的三角解对应) 出发，构造出了级 $k=-2$ 时的 q-Sugawara 算子、并利用量子流的自由场实现给出了级 $k=-2$ 时的 q-Miura 变换．q-Vir. 代数的应用之一是它可以给出 XYZ 模型的精确解[4]．而它与别的模型的关系也陆续被发现[5]．

而另一个同样重要的问题，即中心扩张的双重 Yangian 最近亦有许多新的进展[6-8]，而双重 Yangian 是有质量场的动力学对称性[9]，但是与双重 Yangian(对应于 Yang-Baxter 方程的有理解) 相对应的形变 Virasoro 代数，记为 $\hbar$-Vir. 仍没有答案．本文的目的就是探索这一问题．它的解决将有利于人们更多地了解有质量的可积场理论．

本文安排如下：第二节简述了中心扩张的双重 Yangian 的定义，以及它与 Yang–Baxter 方程之间的对应关系；第三节利用上一节的结果构造了 $\hbar$-Sugawara 算子，在级 $k=-2$ 时，它是双重 Yangian 的中心；第四节为量子流 $D\widehat{Y_\hbar(sl_2)}_k$ 的自由场实现；利用第三节、第四节的结果，在第五节得到了 $\hbar$-Miura 变换．

2 中心扩张的双重 Yangian $D\widehat{Y_\hbar(sl_2)}$

中心扩张的双重 Yangian $D\widehat{Y_\hbar(sl_2)}_k$ 是一个定义在 $C[[\hbar]]$ 上的 Hopf 代数[6—8]，它由导算子 d, 中心 $c(c=k)$ 及 e_m、f_m、h_m, $m\in Z$ 来给出，满足如下的定义关系：

$$[d,\ e(u)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}e(u),\ [d,\ f(u)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}f(u),$$

$$[d,\ h^{\pm}(u)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}h^{\pm}(u),$$

$$e(u)\ e(v)=\frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar}e(v)e(u),$$

$$f(u)\ f(v)=\frac{u-v-\hbar}{u-v+\hbar}\ f(v)f(u),$$

$$h^{\pm}(u)\ e(v)=\frac{u-v+\hbar\pm\hbar c/4}{u-v-\hbar\pm\hbar c/4}\ e(v)\ h^{\pm}(u),$$

$$h^{\pm}(u)\ f(v)=\frac{u-v-\hbar\mp\hbar c/4}{u-v+\hbar\mp\hbar c/4}\ f(v)\ h^{\pm}(u), \tag{2.1}$$

$$[h^{\pm}(u),\ h^{\pm}(v)]=0,$$

$$h^{+}(u)h^{-}(v)=\frac{u-v+\hbar+\hbar c/2}{u-v-\hbar+\hbar c/2}\cdot\frac{u-v-\hbar-\hbar c/2}{u-v+\hbar-\hbar c/2}h^{-}(v)h^{+}(u),$$

$$[e(u),\ f(v)]=\frac{1}{\hbar}\{\delta(u_{-}-v_{+})h^{+}(u_{-})-\delta(u_{+}-v_{-})\,h^{-}(v_{-})\},$$

其中，

$$e^{\pm}(u)=\pm\sum_{\substack{m\geqslant 0\\ m<0}}e_m\ u^{-m-1},$$

$$f^{\pm}(u)=\pm\sum_{\substack{m\geqslant 0\\ m<0}}f_m\ u^{-m-1}, \tag{2.2}$$

$$h^{\pm}(u)=1\pm\hbar\sum_{\substack{m\geqslant 0\\ m<0}}h_m u^{-m-1},$$

$$u_{\pm}=u\pm\frac{c}{4}\hbar,\quad \delta(u-v)=\sum_{n\in Z}u^{-n-1}\ v^{n},$$

以及，

$$e(u)=e^{+}(u)-e^{-}(u),$$
$$f(u)=f^{+}(u)-f^{-}(u).$$

由于中心扩张的双重 Yangian 描述的是有质量的可积量子场理论，因此在数学物理中占有重要的地位.

(2.1)式可以从 Yang-Baxter 方程，或称为 RS 实现[10]中得到. 这种实现源于量子反散射方法. 首先引入如下的 R 矩阵[3, 7]:

$$R(u) = \rho(u)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{u}{u+\hbar} & \dfrac{\hbar}{u+\hbar} & 0 \\ 0 & \dfrac{\hbar}{u+\hbar} & \dfrac{u}{u+\hbar} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

其中$\rho(u)$由下式给出:

$$\rho(u) = \frac{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{u}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{u}{2\hbar}\right)\Gamma\left(1 - \dfrac{u}{2\hbar}\right)}, \tag{2.4}$$

容易证明(2.3)式的 R 矩阵满足如下的交叉对称关系:

$$(C \otimes \mathrm{id})\ R(u-\hbar)\ (C \otimes \mathrm{id})^{-1} = (R(-u)^{-1})^{t_1}, \tag{2.5}$$

t_1表示第一空间的转置; 而电荷共轭矩阵 C 由下式定义:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

RS 实现给出的$D\widehat{Y_\hbar(gl_2)}_k$的定义关系为[7, 8]:

$$\begin{aligned} R(u-v)\ L_1^{\pm}(u)\ L_2^{\pm}(v) &= L_2^{\pm}(v) L_1^{\pm}(u) R(u-v), \\ R(u_- - v_+)\ L_1^{+}(u)\ L_2^{-}(v) &= L_2^{-}(v) L_1^{+}(u) R(u_+ - v_-), \end{aligned} \tag{2.7}$$

这里 $L_1^{\pm}(u) = L^{\pm}(u) \otimes I_2$, $L_2^{\pm}(u) = I_1 \otimes L^{\pm}(u)$. 为了得到所需的量子流的关系，对 $L^{\pm}$矩阵进行如下的高斯分解[11, 8, 3]:

$$L^{\pm}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hbar f^{\pm}(u_{\mp}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^{\pm}(u) & 0 \\ 0 & k_2^{\pm}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \hbar e^{\pm}(u_{\pm}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

将(2.8)式代入(2.7)式中，可以得到如下的$D\widehat{Y_\hbar(gl_2)}_k$的关系式:

$$k_i^{\pm}(u)k_j^{\pm}(v) = k_j^{\pm}(v)k_i^{\pm}(u),$$

$$\rho(u_- - v_+)k_i^{+}(u)k_i^{-}(v) = k_i^{-}(v)k_i^{+}(u)\rho(u_+ - v_-),\ i = 1,\ 2,$$

$$\rho(u_+ - v_- - \hbar)k_2^{+}(u)k_1^{-}(v) = k_1^{-}(v)k_2^{+}(u)\rho(u_- - v_+ - \hbar),$$

$$\rho(u_+ - v_- + \hbar)k_1^{+}(u)k_2^{-}(v) = k_2^{-}(v)k_1^{+}(u)\rho(u_- - v_+ + \hbar),$$

$$k_1^{\pm}(u)\ e(v) = \frac{u_{\pm} - v}{u_{\pm} - v + \hbar}\ e(v)\ k_1^{\pm}(u),$$

$$
\begin{aligned}
k_2^{\pm}(u)\, e(v) &= \frac{u_{\pm} - v}{u_{\pm} - v - \hbar}\, e(v)\, k_2^{\pm}(u), \\
k_1^{\pm}(u)\, f(v) &= \frac{u_{\mp} - v + \hbar}{u_{\mp} - v}\, f(v)\, k_1^{\pm}(u), \\
k_2^{\pm}(u)\, f(v) &= \frac{u_{\mp} - v - \hbar}{u_{\mp} - v}\, f(v)\, k_2^{\pm}(u), \\
e(u)\ e(v) &= \frac{u - v + \hbar}{u - v - \hbar}\ e(v)\ e(u), \\
f(u)\ f(v) &= \frac{u - v - \hbar}{u - v + \hbar}\ f(v)\ f(u),
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

$$
[e(u),\ f(v)] = \frac{1}{\hbar}\{\delta(u_- - v_+)\, k_2^+(u_-)k_1^+(u_-)^{-1} - \delta(u_+ - v_-)k_2^-(v_-)k_1^-(v_-)^{-1}\}.
$$

由(2.9)式可以得到如下的结果,

$$
k_2^{\pm}(u + \hbar)k_1^{\pm}(u) - 1 = \text{中心} \tag{2.10}
$$

并且令

$$
h^{\pm}(u) = k_2^{\pm}(u)k_1^{\pm}(u)^{-1}, \tag{2.11}
$$

从(2.9)式中抹去(2.10)式所定义的中心，这样就得到了$D\widehat{Y_{\hbar}(sl_2)}_k$的关系式(2.1).

3 $\hbar$ – Sugawara 算子

上一节简单介绍了中心扩张的双重 Yangian 的 RS 实现；本节利用上节的结果来构造 $\hbar$ – Sugawara 算子. 引入如下的量子流[10, 3]:

$$
L(u) = L^-(u_+)L^+(u_-)^{-1}, \tag{3.1}
$$

并定义其迹为:

$$
l(u) = \mathrm{tr}(L(u)), \tag{3.2}
$$

将(2.8)代入(3.1)中容易得到,

$$
\begin{aligned}
L_{11}(u) &= k_1^-(u_+)k_1^+(u_-)^{-1} + \hbar^2 k_1^-(u_+)(e^+(u) - e^-(u))k_2^+(u_-)^{-1}f^+(u - \frac{k}{2}\hbar), \\
L_{22}(u) &= k_2^-(u_+)\, k_2^+(u_-)^{-1} - \hbar^2 f^-(u + \frac{k}{2}\hbar)k_1^-(u_+)(e^+(u) - e^-(u))k_2^+(u_-)^{-1},
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

利用(2.7)式，结果有:

$$
\begin{aligned}
k_2^+(u_-)^{-1}f^+(u - \frac{k}{2}\hbar) &= f^+(u - \frac{k}{2}\hbar - \hbar)\ k_2^+(u_-)^{-1}, \\
f^-(u + \frac{k}{2}\hbar)\ k_1^-(u_+) &= k_1^-(u_+)f^-(u + \frac{k}{2}\hbar + \hbar),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

因此当级 $k = -2$ 时，有如下的结果:

$$
l(u) = k_1^-(u_+)\, k_1^+(u_-)^{-1} + k_2^-(u_+)k_2^+(u_-)^{-1}
$$

$$+\hbar^2 k_1^-(u_+):e(u)f(u):k_2^-(u_-)^{-1}$$
$$=k_1^-\left(u-\frac{\hbar}{2}\right)k_1^+\left(u+\frac{\hbar}{2}\right)^{-1}+k_1^-\left(u-\frac{3}{2}\hbar\right)k_1^+\left(u-\frac{\hbar}{2}\right)$$
$$+\hbar^2 k_1^-\left(u-\frac{\hbar}{2}\right):e(u)f(u):k_1^-\left(u-\frac{\hbar}{2}\right),\tag{3.5}$$

在得到(3.5)式的最后一步中，用到了(2.10)式，而其中的::表示正规乘积，

$$:e(u)f(u):=e(u)f^+(u)-f^-(u)e(u),\tag{3.6}$$

不难证明(3.6)式所定义的算子是$D\widehat{Y_\hbar(sl_2)}_{-2}$的中心．至此我们得到了 $\hbar$ − Sugawara 算子．

4　$\mathrm{D}\widehat{Y_\hbar(sl_2)}_k$的自由场实现

(2.1)式所定义的量子流可以用自由场来实现．对于级 $k=1$ 的$D\widehat{Y_\hbar(sl_2)}_1$可用一个自由场给出[6−8]；而对于级为注意值时，则需要三个自由场[12]．设这三个自由场的产生子的对易关系为：

$$\begin{aligned}&[\lambda_m,\ \lambda_n]=\frac{k+2}{2}m\delta_{m+n,\,0},\ [\partial_\lambda,\ Q_\lambda]=\frac{k+2}{2};\\&[b_m,\ b_n]=-m\delta_{m+n,\,0},\ [\partial_b,\ Q_b]=-1;\\&[c_m,\ c_n]=m\delta_{m+n,\,0},\ [\partial_c,\ Q_c]=1;\quad m,\ n\neq 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

而与此相对应的产生函数为，

$$X(u;\ A,\ B)=\sum_{n>0}\frac{X_{-n}}{n}(u+A\hbar)^n-\sum_{n>0}\frac{X_n}{n}(u+B\hbar)^{-n}+\log(u+B\hbar)\partial_x+Q_x,\tag{4.2}$$

X代表λ、b 或 c．为了后面方便起见，记 $X(u;\ A)\equiv X(u;\ A,\ A)$．有了上面所给的产生子，容易验证(2.1)式所定义的量子流 $e(u)$, $f(u)$及 $h^\pm(u)$可由如下的流给出[12]，它们分别为：

$$e(u)=-\frac{1}{\hbar}:[\exp\{-c(u;\ -(k+1))\}-\exp\{-c(u;\ -(k+2))\}]$$
$$\times\exp\{-b(u;-(k+1),-(k+2))\}:,\tag{4.3}$$
$$f(u)=\frac{1}{\hbar}:\left[\Lambda^+(u)\exp\left\{b\left(u;\ -\frac{k+2}{2},\ -\frac{k}{2}\right)+c\left(u;\ -\frac{k+2}{2}\right)\right\}\right.$$
$$\left.-\Lambda^-(u)\exp\left\{b\left(u;\ -\frac{3k+6}{2},\ -\frac{3k+4}{2}\right)+c\left(u;\ -\frac{3k+4}{2}\right)\right\}\right]:,\tag{4.4}$$

$$h^+(u)=\Lambda^+(u_-)\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{b_n}{n}\left[(u_+-(k+2)\hbar)^{-n}-(u_+-k\hbar)^{-n}\right]\right\}$$
$$\times\left(\frac{u_+-k\hbar}{u_+-(k+2)\hbar}\right)^{\partial_b}\tag{4.5}$$

$$h^-(u)=\Lambda^-(u_+)\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{b_{-n}}{n}\left[(u_- -(k+3)\hbar)^n-(u_- -(k+1)\hbar)^n\right]\right\}. \tag{4.6}$$

上述后面三个表达式中的$\Lambda^\pm(u)$由下式定义:

$$\Lambda^+(u)=\lambda_+(u+\hbar)\lambda_+(u-\hbar)^{-1},$$

$$\Lambda^-(u)=\lambda_-\left(u+\frac{k+2}{2}\hbar\right)^{-1}\lambda_-\left(u-\frac{k+2}{2}\hbar\right). \tag{4.7}$$

而其中的

$$\lambda_+(u)=\left(u-\frac{k+2}{2}\hbar\right)^{\partial_b}\exp\left\{-\sum_{n>0}\frac{\lambda_n}{n}\left(u-\frac{k+2}{2}\hbar\right)^{-n}\right\},$$

$$\lambda_-(u)=\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{2\lambda_{-n}}{(k+2)n}(u-(k+2)\hbar)^n\right\}. \tag{4.8}$$

(4.4)—(4.6)三式的结果与文献[12]相差谱参数的移动.

5 $\hbar$ – Miura 变换

Miura变换是从一种联络到另一种联络的变换，它在二维共形场理论的研究中起着非常重要的作用. 本节将利用上节所给出的结果，得到一个形变的Miura变换，称之为$\hbar$-Miura变换.

显然，由$\hbar$-Sugawara算子的表达式(3.5)看出，除已有的流$e(u)$, $f(u)$外，仍需给出$k_i^\pm(u)$ | $i=1, 2$), 以及$e(u)$、$f(v)$的正规乘积的结果.

一种得到$k_i^\pm(u)$ ($i=1, 2$)的方法是利用(4.5)、(4.6)及(2.10)式直接求解差分方程(2.11). 其结果是

$$k_1^+(u)=\lambda_+(u_-)\lambda_+(u_-+\hbar)^{-1}$$
$$\times\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}b_n[(u_+-k\hbar)^{-n}-(u_+-(k+1)\hbar)^{-n}]\right\}\left(\frac{u_+-(k+1)\hbar}{u_+-k\hbar}\right)^{\partial_b}, \tag{5.1}$$

$$k_1^-(u)=g(\lambda_-(u+\hbar))^{-1}\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{b_{-n}}{n}[(u_- -(k+1)\hbar)^n-(u_- -(k+2)\hbar)^n]\right\}, \tag{5.2}$$

(5.2)式中的$g(\lambda_-(u))$为$\lambda_-(u)$的函数，并满足如下的差分方程:

$$g(\lambda_-(u))g(\lambda_-(u+\hbar))=\Lambda^-(u_+), \tag{5.3}$$

$g(\lambda_-(u))$的明显形式将在后面给出. 另一方面，要写出量子流$e(u)$、$f(v)$的正规乘积则需给出$e(u)$、$f(v)$的算子积. 由(4.3)、(4.4)并利用(4.1)所给的对易关系，不难得到如下的算子积:

$$e(u)f(v)=-\frac{u-v-\frac{k+2}{2}\hbar}{u-v-\frac{k}{2}\hbar}\cdot\frac{1}{\hbar^2}\Lambda^+(v)\exp\left\{-c(u;-(k+1))+c\left(v;-\frac{k+2}{2}\right)\right.$$

$$- b(u;-(k+1),\ -(k+2)) + b\left(v;-\ \frac{k+2}{2},-\frac{k}{2}\right)\Bigg\}$$

$$+\frac{u-v-\frac{k+2}{2}\hbar}{u-v-\frac{k+2}{2}\hbar}\cdot\frac{1}{\hbar^2}\Lambda^{+}(v)\exp\Bigg\{-c(u;-(k+2))+c\left(v;-\frac{k+2}{2}\right)$$

$$- b(u;-(k+1),\ -(k+2)) + b\left(v;-\frac{k+2}{2},-\frac{k}{2}\right)\Bigg\}$$

$$+\frac{u-v+\frac{k+2}{2}\hbar}{u-v+\frac{k+2}{2}\hbar}\cdot\frac{1}{\hbar^2}\Lambda^{-}(v)\exp\Bigg\{-c(u;-(k+1))+c\left(v;-\left(\frac{3}{2}k+2\right)\right)$$

$$- b(u;-(k+1),\ -(k+2)) + b\left(v;\ -\left(\frac{3}{2}k+3\right),\ -\left(\frac{3}{2}k+2\right)\right)\Bigg\}$$

$$-\frac{u-v+\frac{k+2}{2}\hbar}{u-v-\frac{k}{2}\hbar}\cdot\frac{1}{\hbar^2}\Lambda^{-}(v)\exp\Bigg\{-c(u;-(k+2))+c\left(v;-\left(\frac{3}{2}k+2\right)\right)$$

$$- b(u;-(k+1),\ -(k+2)) + b\left(v;\ -\left(\frac{3}{2}k+3\right),\ -\left(\frac{3}{2}k+2\right)\right)\Bigg\}. \tag{5.4}$$

存在$\hbar$形变时，要给出一个自洽的理论，需对没有形变时的正规乘积的定义作适当推广．因此，给出如下的正规乘积：

$$:e(u)f(u):=\oint_{C_R}\frac{e(u)\,f(v)}{u-v-\frac{k+2}{2}\hbar}\,\mathrm{d}v-\oint_{C_r}\frac{f(v)\,e(u)}{u-v+\frac{k+2}{2}\hbar}\,\mathrm{d}v, \tag{5.5}$$

环路积分的围道半径分别是 $R>\left|u-\frac{k+2}{2}\hbar\right|$, $r<\left|u+\frac{k+2}{2}\hbar\right|$，显然，当$\hbar\to 0$，或$k=-2$时，(5.5)式又回到通常的正规乘积的定义上去．同样用计算(5.4)式的方法，可以求得 $e(v)f(u)$，再将所得结果代入(5.5)式的定义，则推广的正规乘积的为

$$\begin{aligned}:e(u)f(u):=\frac{1}{\hbar^2}\Bigg[&-\Lambda^{+}\left(u-\frac{k}{2}\hbar\right)\exp\{b(u;-(k+1),\ -k)\\&\qquad-b(u;-(k+1),\ -(k+2))\}\\&+\Lambda^{+}\left(u-\frac{k+2}{2}\hbar\right)\exp\{b(u;-(k+2),\ -(k+1))\\&\qquad-b(u;-(k+1),\ -(k+2))\}\\&+\Lambda^{-}\left(u+\frac{k+2}{2}\hbar\right)\exp\{b(u;-(k+2),\ -(k+1))\\&\qquad-b(u;-(k+1)\ \ -(k+2))\}\end{aligned}$$

$$-\Lambda^{-}\left(u+\frac{k}{2}\hbar\right)\exp\{b(u;\,-(k+3),\quad-(k+2))$$

$$\left.-b(u;\,-(k+1),\quad-(k+2))\}\right], \tag{5.6}$$

同样，由(5.1)、(5.2)式直接可得

$$k_1^-(u_+)k_1^+(u_-)^{-1}=g(\lambda_-(u_++\hbar))^{-1}\lambda_+\left(u-\frac{k-2}{2}\hbar\right)\lambda_+\left(u-\frac{k}{2}\hbar\right)^{-1}$$
$$\times\exp\{b(u;\,-(k+1),\,-k)-b(u;\,-(k+2),\,-(k+3))\}, \tag{5.7}$$

$$k_1^-(u_+-\hbar)^{-1}k_1^+(u_--\hbar)=g(\lambda_-(u_+))\lambda_+\left(u-\frac{k+2}{2}\hbar\right)\lambda_+\left(u-\frac{k}{2}\hbar\right)^{-1}$$
$$\times\exp\{b(u;\,-(k+3),\,-(k+2))-b(u;\,-(k+2),\,-(k+1))\}, \tag{5.8}$$

将上述三式及(5.1)、(5.2)式代入 $\hbar$ – Sugawara算子(3.5)式，并利用差分方程(5.3)，可得到如下的表达式:

$$l(u)=g(\lambda_-(u_++\hbar))^{-1}\lambda_\pm\left(u-\frac{k+2}{2}\hbar\right)\lambda_+\left(u-\frac{k+4}{2}\hbar\right)^{-1}$$

$$+g(\lambda_-(u_++2\hbar))\lambda_+\left(u-\frac{k}{2}\hbar\right)^{-1}\lambda_+\left(u-\frac{k+2}{2}\hbar\right), \tag{5.9}$$

在此给出 $g(\Lambda_-(u))$的具体形式:

$$g(\lambda_-(u_+))=\prod_{l=0}^{\infty}\lambda_-(u+(2l-1)\hbar)\lambda_-(u+2l\hbar)^{-1}$$
$$\lambda_-(u+(2l+1+k)\hbar)^{-1}\lambda_-(u+(2l+2+k)\hbar), \tag{5.10}$$

引入如下的记号:

$$\Lambda_-(u)=g\left(\lambda_-\left(u_++\frac{3}{2}\hbar\right)\right),$$

$$\Lambda_+(u)=\lambda_+\left(u-\frac{k+1}{2}\hbar\right)^{-1}\lambda_+\left(u-\frac{k+3}{2}\hbar\right); \tag{5.11}$$

及

$$\Lambda(u)=\Lambda_-(u)\Lambda_+(u), \tag{5.12}$$

则(5.9)式的结果可重新写为对称的形式，

$$l(u)=\Lambda\left(u+\frac{\hbar}{2}\right)+\Lambda\left(u-\frac{\hbar}{2}\right)^{-1}, \tag{5.13}$$

当级 $k=-2$ 时，

$$l(u)\to s(u)=\Lambda\left(u+\frac{\hbar}{2}\right)+\Lambda\left(u-\frac{\hbar}{2}\right)^{-1}. \tag{5.14}$$

$s(u)$正是我们所得到的 $\hbar$–Miura．在 $k=-2$ 时，需要计算 $s(u)$的泊松括号[3]．有关泊松

括号的计算将在后面的工作中给出.

本文作者之一丁祥茂感谢同朱重远教授、吴可教授及范桁博士的有益讨论.

参　考　文　献

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B241**(1984)333.

[2] M. Jimbo, T. Miwa, Algebraic Analysis of Solvable Lattice Modes, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, val. 85, AMS (1994).

[3] E. Frenkel, N. Reshetikhin, *Commun. Math. Phys.*, **178**(1996)237; q-alg / 9505025.

[4] S. Lukyanov, Y. Pugai, Bosonization of ZF Algebras: Direction Toward Deformed Virasoro Algebra, hep-th / 9412128; S. Lukyanov, A Note on the Deformed Virasoro Algebra, hep-th / 9509037.

[5] J.Shiraishi, H. Kubo, H. Awata *et al. Lett. Math Phys.*, **38** (1996)33; q-alg / 9507034.

[6] S. M. Khoroshkin, V. N. Tolsty, *Letl. Math. Phys*, **36**(1996)373.

[7] S. M. Khoroshkin, Central Extension of the Yangian Double, q-alg / 9602031.

[8] K. Iohura, M. Kohno, *Letl. Math. Phys.*, **37**(1996)319.

[9] F. A. Sminov, *Internat. J. Mocl. Phys.*, **A**. Suppl, 1B(1992)813; 839.

[10] N. Yu. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Lett. Math. Phys.*, **19**(1990)33.

[11] J. Ding, I. B. Frenkel, *Commun. Math. Phys.*, **156**(1993)277.

[12] H. Kormo, Free Ficlel Representation of Level-k Yangian Double D $Y(sl_2)_k$ and Deformation of Wakimoto Modules, *Lett. Math. Phys.*, to appear.

$\hbar$ − Miura Transformation in the $DY_\hbar(sl_2)_k$ Case

Ding Xiangmao

(*Institute of Theoretical Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Hou Boyu　　Zhao Liu

(*Institute of Modern Physics Northwest University, Xi'an* 710069)

Received 6 January 1997

Abstract

The $\hbar$-analogue of the Sugawara operater is constructed for the Yangian double with central extension in the sl_2 case. Using the free fields realization of the quantum currents, the $\hbar$-analogue Miura transformation is obtained.

Key words　level, Yangian double, $\hbar$-analogue Sugawara operator, $\hbar$-analogue Miura transformation.