第22卷 第3期
1998年3月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol.22, No.3
Mar., 1998

双参数变形多模玻色算符的代数结构及其应用(Ⅲ)

于肇贤[1)]　张德兴
(大庆石油学院　安达　151400)
刘业厚
(重庆石油高等专科学校　重庆　630042)

摘要　构造了双参数变形多模玻色算符高次幂的本征态，发现它们构成完备Hilbert空间．另外，还给出了双参数变形量子代数 $SL_{q,s}(3)$ 的数学结构、玻色实现以及 $SL_{q,s}(2)$ 的$\frac{1}{2}$阶类张量算符．指出将 $SL_{q,s}(3)$ 的上述结果推广到多模情况是容易的．

关键词　多模玻色算符　本征态，Hilbert空间量子代数 $SL_{q,s}(3)$　$SL_{q,s}(2)$ 的$\frac{1}{2}$阶类张量算符

1　引言

近年来，量子代数、量子杨-Baxter方程的研究引起了物理学和数学工作者的极大兴趣[1]．人们发现，量子代数与当前理论物理与数学研究的一些热门课题，如统计可解模型[2]、量子反散射方法[3]、共形场论[4]等问题有着密切的联系．量子代数在物理学中的应用是一个人们十分关注的问题．类似于通常的简谐振子可以给出角动量理论的Jordan-Schwinger实现，1989年几位作者各自独立地提出了 q 变形振子的概念[5-7]，来给出最简单的量子代数 $SU(2)_q$ 的玻色实现．作为对通常 Glauber[8]相干态的推广，人们又得到了 q 变形 Glauber 相干态，并借助 q 积分工具证明了该态构成完备 Hilbert 空间[9]．从发展物理应用的角度，人们又进一步提出了双参数变形振子的概念，借此可以得到量子代数 $SU(2)_{q,s}$ 和 $SU(1,1)_{q,s}$ 的 Jordan-Schwinger实现[10,11]、Nodvik 实现和 Holstein-Primakoff实现[12,13]以及 Clebsch-Gordan系数[14,15]等．另外，也可以构造出双参数变形玻色振子湮没算

1997-03-24收稿
1) 胜利油田职工大学，山东东营257004

225—233

符二次幂及高次幂的本征态[16,17]．最近，我们提出了双参数变形多模玻色振子的概念，作为应用，给出了量子代数 $SU(2)_{q,s}$ 和 $SU(1,1)_{q,s}$ 的多模 Jordan-Schwinger 实现[18]、多模 Holstein-Primakoff实现以及双参数变形多模玻色振子湮没算符二次幂的本征态[19]．

本文结构安排如下：第2部分将构造双参数变形多模玻色振子湮没算符高次幂的本征态，并给出完备性的证明；第3部分将给出双参数变形量子代数 $SL_{q,s}(3)$ 的数学结构、玻色实现以及 $SL_{q,s}(2)$ 的 $\frac{1}{2}$ 阶类张量算符；第4部分将 $SL_{q,s}(3)$ 的结果推广到多模情况；第5部分是有关讨论．

2 双参数变形多模玻色振子湮没算符高次幂的本征态

2.1 双参数变形多模玻色算符的代数结构[18,19]

对于多模场，定义两个独立的双参数变形 k 模玻色算符 A_k 和 B_k:

$$A_k = a_1a_2\cdots a_k\left\{\frac{[n_1^a]_{q,s}[n_2^a]_{q,s}\cdots[n_k^a]_{q,s}}{\min([n_1^a]_{q,s},\ [n_2^a]_{q,s},\cdots,[n_k^a]_{q,s})}\right\}^{-1/2}, \tag{1}$$

$$B_k = b_1b_2\cdots b_k\left\{\frac{[n_1^b]_{q,s^{-1}}[n_2^b]_{q,s^{-1}}\cdots[n_k^b]_{q,s^{-1}}}{\min([n_1^b]_{q,s^{-1}},\ [n_2^b]_{q,s^{-1}},\cdots,[n_k^b]_{q,s^{-1}})}\right\}^{-1/2}. \tag{2}$$

式中 a_i，$b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 分别为双参数变形玻色振子 $\{a_i^+,\ a_i,\ n_i^a\}$ 和 $\{b_i^+, b_i, n_i^b\}$ 的湮没算符，且满足以下关系[10,11]

$$a_i^+a_i=[n_i^a]_{q,s},\ a_ia_i^+=[n_i^a+1]_{q,s},\ [n_i^a,a_i^+]=a_i^+,\ [n_i^a,\ a_i]=-a_i, \tag{3a}$$

$$a_ia_i^+-s^{-1}qa_i^+a_i=(sq)^{-n_i^a},\ a_ia_i^+-(sq)^{-1}a_i^+a_i=(s^{-1}q)^{n_i^a}. \tag{3b}$$

$$b_i^+b_i=[n_i^b]_{q,s^{-1}},\ b_ib_i^+=[n_i^b+1]_{q,s^{-1}},\ [n_i^b,\ b_i^+]=b_i^+,\ [n_i^b,\ b_i]=-b_i, \tag{3c}$$

$$b_ib_i^+-sqb_i^+b_i=(sq^{-1})^{n_i^b}. \tag{3d}$$

式中记号 $[x]_{q,s}=s^{1-x}[x]=s^{1-x}(q^x-q^{-x})/(q-q^{-1})$，$[x]_{q,s^{-1}}=s^{x-1}[x]$，$x$ 可以是算符或通常的数．容易证明

$$A_kA_k^+-s^{-1}qA_k^+A_k=(sq)^{-N_k^a},\ A_kA_k^+-(sq)^{-1}A_k^+A_k=(s^{-1}q)^{N_k^a}, \tag{4a}$$

$$[N_k^a,\ A_k^+]=A_k^+,\quad [N_k^a,\ A_k]=-A_k. \tag{4b}$$

$$B_kB_k^+-sqB_k^+B_k=(sq^{-1})^{N_k^b}, \tag{5a}$$

$$[N_k^b,\ B_k^+]=B_k^+,\quad [N_k^b,\ B_k]=-B_k. \tag{5b}$$

式中记号

$$N_k^a=\min(n_1^a,\ n_2^a,\ \cdots,\ n_k^a),\ N_k^b=\min(n_1^b,\ n_2^b,\ \cdots,\ n_k^b). \tag{6}$$

可见，$\{A_k^+,\ A_k,\ N_k^a\}$ 和 $\{B_k^+,\ B_k,\ N_k^b\}$ 分别等效于两个不同的双参数变形多模玻色振子．在理论上唯象地构造出 A_k 和 B_k 的高次幂的本征态是合理的．

2.2 算符 A_k^M 和 $B_k^M(M\geqslant3)$ 的本征态

以下讨论的出发点是基于构成 A_k 和 B_k 的 k 个独立的双参数变形玻色振子分别同时处

于量子态 $|r\rangle$ 和 $|\bar{r}\rangle$ 上．对于玻色系统，该限定条件在理论上是允许的．

2.2.1　算符 $A_k^M(M\geqslant 3)$ 的本征态

在 k 模 Fock 空间

$$\{|r,r,\cdots\rangle=\frac{1}{\sqrt{[r]_{q,s}!}}(A_k^+)^r|0,0,\cdots\rangle,\ r=0,1,2,\cdots\},\tag{7}$$

内，算符 A_k^+，A_k 对态矢 $|r,\ r,\ \cdots\rangle$ 的作用分别为

$$A_k^+|r,\ r,\cdots\rangle=\sqrt{[r+1]_{q,s}}\,|r+1,r+1,\cdots\rangle,\tag{8a}$$

$$A_k|r,r,\cdots\rangle=\sqrt{[r]_{q,s}}\,|r-1,\ r-1,\ \cdots\rangle,\quad A_k|0,0,\cdots\rangle=0.\tag{8b}$$

式中 $|r,\ r,\ \cdots\rangle=|r\rangle_1|r\rangle_2\cdots|r\rangle_k$．Fock 空间的完备性由单元分解表征，即

$$I=\sum_{r=0}^{\infty}|r,\ r,\ \cdots\rangle\langle r,\ r,\ \cdots|.\tag{9}$$

考虑下面 $M(M\geqslant 3)$ 个态矢

$$|\psi_j\rangle_M=C_j(|\alpha|^2)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{Mr+j}}{\sqrt{[Mr+j]_{q,s}!}}|Mr+j,\ Mr+j,\ \cdots\rangle,\tag{10}$$

式中 $C_j(j=0,1,2,\cdots,M-1)$ 为态矢 $|\psi_j\rangle_M$ 的归一化系数，α 为复参量．容易发现

$$A_k^M|\psi_j\rangle_M=\alpha^M|\psi_j\rangle_M\ ,\tag{11}$$

$${}_M\langle\psi_j|\psi_{j'}\rangle_M=0\quad(j,\ j'=0,1,2,\cdots,\ M-1,\ 且\ j\neq j')\ .\tag{12}$$

这表明态矢 $|\psi_j\rangle_M$ 是算符 A_k^M 的 M 重简并本征态，其本征值为 α^M，且这 M 个本征态是相互正交的．利用归一化条件可确定归一化系数为

$$C_j(|\alpha|^2)=\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(|\alpha|^2)^{Mr+j}}{[Mr+j]!}\right)^{-1/2}\ .\tag{13}$$

算符 A_k^M 的 M 个正交归一化本征态能否构成完备 Hilbert 空间，取决于是否存在下面的单元分解：

$$\int d\mu(\alpha)\sum_{j=0}^{M-1}C_j^{-2}(|\alpha|^2)|\psi_j\rangle_{MM}\langle\psi_j|=I,\tag{14}$$

式中 $d\mu(\alpha)$ 为积分测度[16]

$$d\mu(\alpha)=(2\pi s^2)^{-1}e_{q,s^{-1}}^{-|\alpha|^2/s^2}\,d_{q,s^{-1}}|\alpha|^2d\theta\ .\tag{15}$$

(14)式的证明如下：

$$左边=(2\pi s^2)^{-1}\int e_{q,s^{-1}}^{-|\alpha|^2/s^2}\sum_{j=0}^{M-1}C_j^{-2}(|\alpha|^2)|\psi_j\rangle_{MM}\langle\psi_j|d_{q,s^{-1}}|\alpha|^2d\theta=$$

$$(2\pi s^2)^{-1}\int e_{q,s^{-1}}^{-|\alpha|^2/s^2}\sum_{j=0}^{M-1}\left(\sum_{M,r,r'}\frac{\alpha^{Mr+j}(\alpha^*)^{Mr'+j}}{\sqrt{[Mr+j]_{q,s}![Mr'+j]_{q,s}!}}e^{iM(r-r')\theta}\cdot\right.$$

$$\left.|Mr+j,\ Mr+j,\ \cdots\rangle\langle Mr'+j,\ Mr'+j,\ \cdots|\right)d_{q,s^{-1}}|\alpha|^2d\theta=$$

$$s^{-2}\int e_{q,s^{-1}}^{-|\alpha|^2/s^2}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{M,r}\frac{(|\alpha|^2)^{Mr+j}}{[Mr+j]_{q,s}!}|Mr+j,\ Mr+j,\ \cdots\rangle\langle Mr+j,\ Mr+j,\ \cdots|\cdot$$

$$d_{q,s^{-1}}|\alpha|^2=\sum_{M,r,j}\int d_{q,s^{-1}}|\alpha|^2(s^2[Mr+j]_{q,s}!)^{-1}e_{q,s^{-1}}^{-|\alpha|^2/s^2}\cdot(|\alpha|^2)^{Mr+j}\cdot$$
$$|Mr+j,\ Mr+j,\ \cdots\rangle\langle Mr+j,\ Mr+j,\ \cdots|=$$
$$\sum_{M,r,j}|Mr+j,\ Mr+j,\ \cdots\rangle\langle Mr+j,\ Mr+j,\ \cdots|=I. \tag{16}$$

在证明中，利用了双参数变形 Euler 公式[16]

$$\int_0^{\xi} e_{q,s^{-1}}^{-x/s^2}x^n d_{q,s^{-1}}x=s^2[n]_{q,s}!. \tag{17}$$

至此，可以说态矢 $|\psi_j\rangle_M$ ($j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ M-1$)能构成完备 Hilbert 空间．换言之，可以作为一个独立的表象使用．例如，双参数变形 k 模相干态在该表象中可以表示为

$$|\alpha\rangle=e_{q,s}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{j=0}^{M-1}C_j^{-1}(|\alpha|^2)\,|\psi_j\rangle_M. \tag{18}$$

此外，在由算符 $A_k^M(M\geqslant 3)$ 的 M 个本征态矢(子空间)所张成的空间里，借助算符 A_k 的连续作用可实现这 M 个子空间的相互转换；另一方面，当复参量 α 取不同的值时，子空间的内积将不为零．这意味着在复 α 平面上的这 M 个子空间与通常的 Glauber 相干态一样本身并不正交[8]．

2.2.2 算符 $B_k^M(M\geqslant 3)$ 的本征态

在另一 k 模 Fock 空间

$$\{|\widetilde{r,r,\cdots}\rangle=\frac{1}{\sqrt{[r]_{q,s^{-1}}!}}(B_k^+)^r|0,0,\cdots\rangle,\ r=0,1,2,\cdots\}, \tag{19}$$

内，算符 B_k^+，B_k 对态矢 $|\widetilde{r,r,\cdots}\rangle$ 的作用分别为

$$B_k^+|\widetilde{r,r,\cdots}\rangle=\sqrt{[r+1]_{q,s^{-1}}}\,|\widetilde{r+1,r+1,\cdots}\rangle, \tag{20a}$$

$$B_k|\widetilde{r,r,\cdots}\rangle=\sqrt{[r]_{q,s^{-1}}}\,|\widetilde{r-1,r-1,\cdots}\rangle,\ B_k|0,0,\cdots\rangle=0. \tag{20b}$$

式中 $|\widetilde{r,r,\cdots}\rangle=|\tilde{r}\rangle_1|\tilde{r}\rangle_2\cdots|\tilde{r}\rangle_k$. Fock 空间的完备性由单元分解表征，即

$$I=\sum_{r=0}^{\infty}|\widetilde{r,r,\cdots}\rangle\langle\widetilde{r,r,\cdots}|. \tag{21}$$

考虑如下 M 个态矢

$$|\tilde{\psi}_j\rangle_M=\tilde{C}_j(|\alpha|^2)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{Mr+j}}{\sqrt{[Mr+j]_{q,s^{-1}}!}}|\widetilde{Mr+j,\ Mr+j,\cdots}\rangle, \tag{22}$$

式中 $\tilde{C}_j$ ($j=0,1,2,\cdots,M-1$)为态矢 $|\tilde{\psi}_j\rangle_M$ 的归一化系数，α 为复参量．容量发现

$$B_k^M|\tilde{\psi}_j\rangle_M=\alpha^M|\tilde{\psi}_j\rangle_M, \tag{23}$$

$${}_M\langle\tilde{\psi}_j|\tilde{\psi}_{j'}\rangle_M=0(j,j'=0,1,2,\cdots,M-1,\ \text{且}\ j\neq j'). \tag{24}$$

这意味着态矢 $|\tilde{\psi}_j\rangle_M$ 是算符 B_k^M 的 M 重简并本征态，其本征值为 α^M，且这 M 个态矢是相互正交的．借助下面的积分测度和 Euler 公式

$$\mathrm{d}\,\widetilde{\mu(\alpha)} = (\alpha\pi s^{-2})^{-1}\mathrm{e}_{q,s}^{-s^2|\alpha|^2}\,\mathrm{d}_{q,s}|\alpha|^2\mathrm{d}\theta\ , \tag{25}$$

$$\int_0^{\xi}\mathrm{e}_{q,s}^{-s^2x}\,x^n\mathrm{d}_{q,s}x = s^{-2}[n]_{q,s^{-1}}!\ , \tag{26}$$

类似于 2.2.1 节的证明，容易得到

$$\int\mathrm{d}\,\widetilde{\mu(\alpha)}\sum_{j=0}^{M-1}\tilde{C}_j^{-2}(|\alpha|^2)|\tilde{\psi}_j\rangle_{MM}\langle\tilde{\psi}_j| = I. \tag{27}$$

这表明态矢 $|\tilde{\psi}_j\rangle_M(j = 0,1,2,\cdots,M-1)$ 能构成完备 Hilbert 空间，可以作为独立表象使用．例如，双参数变形 k 模相干态在该表象中可以表示为

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \mathrm{e}_{q,s^{-1}}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{j=0}^{M-1}\tilde{C}_j^{-1}(|\alpha|^2)|\tilde{\psi}_j\rangle_M\ . \tag{28}$$

关于算符 B_k^M 本征态的其它性质的讨论同 2.2.1 节最后一段，不再赘述．

3　双参数变形量子代数 $SL_{q,s}(3)$ 的数学结构

众所周知，群论是研究对称性的有力工具，群论方法已在物理中得到了广泛的应用．量子代数实际上是李代数理论的直接推广，它描写的新的对称性也必将在物理上得到广泛的应用．事实上，人们业已发现了在不对称的 Heisenberg 自旋链(*XYZ* model)[20,21]、量子光学[22]、核的转动激发[23,24]以及共形场理论[25,26]等问题中存在某些对称性．鉴于量子代数在物理应用中的重要性，近年来人们又成功地发展了构造单参数变形量子代数的方法[27—33]．我们发现该方法对构造双参数变形量子代数同样也是适用的[34,35]．下面的任务是研究双参数变形量子代数 $SL_{q,s}(3)$ 的数学结构．

引入三个彼此独立的双参数变形玻色振子 $\{a_1^+,\ a_1,\ N_1\}$，$\{a_2^+, a_2,\ N_2\}$ 和 $\{a_3^+,\ a_3,\ N_3\}$，它们满足

$$a_1^+a_1 = [N_1]_{q,s},\quad a_1a_1^+ = [N_1+1]_{q,s}\ , \tag{29a}$$

$$a_2^+a_2 = [N_2]_{q,s^{-1}},\quad a_2a_2^+ = [N_2+1]_{q,s^{-1}}\ , \tag{29b}$$

$$a_3^+a_3 = [N_3]_{q,s},\quad a_3a_3^+ = [N_3+1]_{q,s}\ . \tag{29c}$$

$$[N_i,\ a_j^+] = \delta_{ij}a_j^+,\ [N_i,\ a_j] = -\delta_{ij}a_j\quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \tag{30a}$$

$$a_ia_i^+ - s^{-1}qa_i^+a_i = (sq)^{-N_i}\qquad (i = 1,\ 3), \tag{30b}$$

$$a_3a_3^+ - sq^{-1}a_3^+a_3 = (sq)^{N_3}\ . \tag{30c}$$

如同 $SL_q(3)$ 是一个结合代数一样[27]，$SL_{q,s}(3)$ 仍将是一个结合代数．选用 Chevalley 基：

$$h_1 = N_1 - N_2,\ h_2 = N_2 - N_3, \tag{31a}$$

$$e_i = a_1^+a_2,\ e_{-1} = a_2^+a_1,\ e_2 = a_2^+a_3,\ e_{-2} = a_3^+a_2\ . \tag{31b}$$

它们满足对易关系

$$[h_i,\ e_{\pm i}] = \pm 2e_{\pm i}\qquad (i = 1,2), \tag{32}$$

$$[h_i,\ e_{\pm j}] = \mp e_{\pm j} \qquad (i,j = 1,2 \quad 且\ i \neq j), \tag{33}$$

$$e_1 e_{-1} - s^2 e_{-1} e_1 = [h_1]_{q,s}\ , \tag{34}$$

$$e_2 e_{-2} - s^{-2} e_{-2} e_2 = [h_2]_{q,s^{-1}}\ . \tag{35}$$

此外还满足 Serre 类关系

$$e_1^2 e_2 + s^2 e_2 e_1^2 = [2]_{q,s^{-1}}\ e_1 e_2 e_1, \tag{36}$$

$$s^2 e_{-1}^2 e_{-2} + e_{-2} e_{-1}^2 = [2]_{q,s^{-1}}\ e_{-1} e_{-2} e_{-1}\ . \tag{37}$$

定义 $SL_{q,s}(3)$的两个辅助算符 e_3, e_{-3}为

$$e_3 = s^{N_3} a_1^+ a_3, \qquad e_{-3} = a_3^+ a_1 s^{N_3}\ . \tag{38}$$

可证

$$[h_i,\ e_{\pm 3}] = \pm e_{\pm 3} \qquad (i = 1,\ 2)\ , \tag{39}$$

$$e_3 e_{-3} - s^2 e_{-3} e_3 = [h_1 + h_2]_{q,s}\ . \tag{40}$$

和 Serre 类关系

$$s^2 e_{-1}^2 e_3 + e_3 e_{-1}^2 = [2]_{q,s^{-1}}\ e_{-1} e_3 e_{-1}, \tag{41}$$

$$e_1^2 e_{-3} + s^2 e_{-3} e_1^2 = [2]_{q,s^{-1}}\ e_1 e_{-3} e_1\ . \tag{42}$$

根据以上结果,可以重新定义 $SL_{q,s}(3)$的生成元:

$$J_0 = \frac{h_1}{2},\ J_\pm = e_{\pm 1},\ Q = -(h_1 + 2h_2), \tag{43a}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = -e_{-2},\ T_{\frac{-1}{2}} = e_{-3},\ V_{\frac{1}{2}} = e_3,\ V_{\frac{-1}{2}} = e_2\ . \tag{43b}$$

显然有

$$V_t = (-1)^{\frac{1}{2}-t}(T_{-t})^+ \qquad (t = \pm\frac{1}{2})\ . \tag{44}$$

不难证明

$$[Q,\ J_0] = [Q,\ J_\pm] = 0, \tag{45}$$

$$[J_0,\ J_\pm] = \pm J_\pm, \quad s^{-1} J_+ J_- - s J_- J_+ = s^{-2J_0}[2J_0], \tag{46}$$

$$[J_0,\ T_s] = sT_s, \quad [J_0,\ V_s] = sV_s \qquad (s = \pm\frac{1}{2}), \tag{47}$$

$$[Q,\ T_s] = 3T_s,\ [Q,\ V_s] = -3V_s \qquad (s = \pm\frac{1}{2})\ . \tag{48}$$

和

$$s^2 J_-^2 T_{\frac{1}{2}} + T_{\frac{1}{2}} J_-^2 = [2]_{q,s^{-1}}\ J_- T_{\frac{1}{2}} J_-, \tag{49}$$

$$J_+^2 T_{\frac{-1}{2}} + s^2 T_{\frac{-1}{2}} J_+^2 = [2]_{q,s^{-1}}\ J_+ T_{\frac{-1}{2}} J_+ . \tag{50}$$

特别地,当 $s \to 1, q \to 1$时,以上式子即为通常 $SU(3)$的形式. 另外,$e_{\pm 3}$和 $SL_{q,s}(3)$的两生成元 $e_{\pm 2}$是 $SL_{q,s}(2)$的$\frac{1}{2}$阶类张量算符. 当 $s \to 1$时,本节结果退化为 $SL_q(3)$的数学结构[27] .

4 双参数变形多模量子代数 $SL_{q,s}(3)$ 的数学结构

限于篇幅，本节仅给出构造多模 $SL_{q,s}(3)$ 数学结构的思路．定义三个彼此独立的双参数变形 k 模玻色振子 $\{A_k^+, A_k, N_k^a\}$、$\{B_k^+, B_k, N_k^b\}$(这两个振子的定义见第 2 节)和 $\{C_k^+, C_k, N_k^c\}$．其中

$$C_k = C_1 C_2 \cdots C_k \left\{ \frac{[n_1^c]_{q,s}[n_2^c]_{q,s}\cdots[n_k^c]_{q,s}}{\min([n_1^c]_{q,s}, [n_2^c]_{q,s}, \cdots, [n_k^c]_{q,s})} \right\}^{-1/2}, \tag{51}$$

$$c_i^+ c_i = [n_i^c]_{q,s}, \; c_i c_i^+ = [n_i^c + 1]_{q,s}, \; [n_i^c, c_i^+] = c_i^+, \; [n_i^c, c_i] = -c_i, \tag{52a}$$

$$c_i c_i^+ - s^{-1} q c_i^+ c_i = (sq)^{-n_i^c}, \; c_i c_i^+ - (sq)^{-1} c_i^+ c_i = (s^{-1}q)^{n_i^c}. \tag{52b}$$

容易证明

$$C_k C_k^+ - s^{-1} q C_k^+ C_k = (sq)^{-N_k^c}, \; C_k C_k^+ - (sq)^{-1} C_k^+ C_k = (s^{-1}q)^{N_k^c}, \tag{53a}$$

$$[N_k^c, C_k^+] = C_k^+, \; [N_k^c, C_k] = -C_k. \tag{53b}$$

式中记号 $N_k^c = \min(n_1^c, n_2^c, \cdots, n_k^c)$.

将第 3 节中有关符号用本书记号替换，即

$$a_1 \to A_k, \quad a_1^+ \to A_k^+, \quad N_1 \to N_k^a; \tag{54a}$$

$$a_2 \to B_k, \quad a_2^+ \to B_k^+, \quad N_2 \to N_k^b; \tag{54b}$$

$$a_3 \to C_k, \quad a_3^+ \to C_k^+, \quad N_3 \to N_k^c. \tag{54c}$$

其它符号不变，但应理解为多模情况的．容易发现第 3 节中所有关系式仍将成立．这样也就得到了多模 $SL_{q,s}(3)$ 的数学结构．

5 讨论

(1) 本文构造的双参数变形 k 模玻色算符 A_k 和 B_k 与双参数变形玻色振子湮没算符具有相同的性质．正如激光(运转良好的单模激光器输出的光是通常玻色振子湮没算符的本征态的物理实现)有很多重要的应用一样，k 模玻色算符 A_k 和 B_k 高次幂的本征态的物理实现可望也会有一些重要的实际应用．问题的关键在于通过何种实际的物理光学过程制备出这些本征态，其中的一个技术性问题是如何使得这 k 个独立的玻色振子均处于相同的量子态上．

(2) 本文给出的构造多模 $SL_{q,s}(3)$ 的方法对构造其它双参数变形多模量子代数相信也将是适用的．这将有助于发展多模双参数变形量子代数在物理上的应用．

参　考　文　献

[1] Ma Z Q, Yang-Baxter Equation and Quantum Enveloping Algebras (in Chinese). Beijing: Science Press, 1993, 334—343
(马中骐．杨-巴克斯特方程和量子包络代数．北京：科学出版社，1993．第 334—343 页中所列有关文献.)

[2] Baxter R J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics London, Academic Press, 1982

[3] Faddeev L D. Sov. Sci. Rev. Maths., 1981, **C1**: 107

[4] Belavin A A et al. Nucl. Phys., 1984, **B241**: 333

[5] Macfar lane A J. J. Phys., 1989, **A22**: 4581
[6] Biedenharn L C. J. Phys., 1989, **A22**: L873
[7] Sun C P et al. J. Phys., 1989, **A22**: L983
[8] Glauber R J. Phys. Rev. Lett., 1963, **10**: 84
[9] Gray R W et al. J. Phys., 1990 **A23**: L945
[10] Jing Sicong. Journal of China University of Science and Technology (in Chinese), 1993, **23**: 55; Mod. Phys. Lett., 1993, **A8**: 543
(井思聪,中国科学技术大学学报, 1993, **23**: 55)
[11] Jing S C et al. Commun. Theor. Phys., 1993, **19**: 495
[12] Zhou Huanqiang et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1995, **19**: 420
(周焕强等, 高能物理与核物理,1995, **19**: 420.)
[13] Yu Zhaoxian et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1996, **20**: 1082
(于肇贤等,高能物理与核物理, 1996, **20**: 1082)
[14] Yu Z X et al. Commun. Theor. Phys., 1995, **24**: 411
[15] Yu Z X et al. Commun. Theor. Phys., 1997, **27**: 179
[16] Zhou Huanqiang et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1995, **19**: 251
(周焕强等, 高能物理与核物理, 1995, **19**: 251)
[17] Wang Jisuo et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1996, **20**: 703
(王继锁等, 高能物理与核物理, 1996, **20**: 703
[18] Yu Zhaoxian et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1997, **21**: 999
(于肇贤等. 高能物理与核物理, 1997, **21**: 999)
[19] Yu Zhaoxian et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, **21**: 28
(于肇贤等, 高能物理与核物理,1998, **22**: 28)
[20] de Vega H. Inter. J. Mod. Phys., 1989, **A4**: 2371
[21] Batchelor M T et al. J. Phys., 1990, **A23**: L141
[22] Chaichian M et al. Phys. Rev. Lett., 1990, **65**: 980
[23] Bonatsos D et al. Phys. Lett., 1990, **B251**: 477
[24] Meng J et al. As-ITP-91-06
[25] Alvarez-Gaume A et al. Phys. Lett., 1989, **B220**: 142
[26] Moore G et al. Nucl. Phys., 1989, **B220**: 557
[27] Yu Zurong et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1992, **16**: 832
(于祖荣, 高能物理与核物理, 1992, **16**: 832)
[28] Yu Zurong et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1993, **17**: 1035
(于祖荣, 高能物理与核物理, 1993, **17**: 1035)
[29] Yu Z R. J. Phys., 1993, **A26**: 5881
[30] Yang Y P et al. Mod. Phys. Lett., 1993, **A8**: 3025
[31] Yang Y P et al. Mod. Phys. Lett., 1995, **A10**: 561
[32] Yang Y P et al. J. Math. Phys., 1994, **35**: 1037.
[33] Yang Yaping et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1993, **17**: 423
(羊亚平等, 高能物理与核物理, 1993, **17**: 423)
[34] Zhang Dexing et al. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1995, **44**: 1009
(张德兴等, 物理学报, 1995, **44**: 1009)
[35] Yu Z X et al. Commun. Theor. Phys., 1997, **27**: 369

Algebraic Structure of Two-Parameter Deformed Multi-mode Bose Operators and Their Applications (Ⅲ)

Yu Zhaoxian　　Zhang Dexing

(*Daqing Institute of Petroleum, Anda* 151400)

Liu Yehou

(*Chongqing Petroleum Advanced Polytechnic College, Chongqing* 630042)

Abstract　The eigenstates of the higher power of the two-parameter deformed multi-mode bose operators are constructed. It is found that they form a complete Hilbert space Further more, the mathematical structure and the corresponding boson realization of the two-parameter deformed quantum algebra $SL_{q,s}(3)$ are given, and the 1 / 2 rank tensor-like operators of $SL_{q,s}(2)$ are also presented. It is pointed out that the results of $SL_{q,s}(3)$ is easily generalized to a multi-mode case.

Key words　multi-mode bose operator, eigenstate, Hilbert space, quantum algebra $SL_{q,s}(3)$, 1 / 2 rank tensor-like of $SL_{q,s}(2)$

Received 24 March 1997