# $SU(2)$群的非齐次逆微分实现

于肇贤[1)]　张德兴
(大庆石油学院　安达　151400)

刘业厚
(重庆石油高等专科学校　重庆　630042)

**摘要**　利用玻色振子的逆算符构造了 $SU(2)$ 群的生成元和不可约表示的相干态，进而导出了 $SU(2)$ 群的非齐次逆微分实现.

**关键词**　$SU(2)$群　非齐次逆微分实现　玻色振子　逆算符

## 1　引言

众所周知，玻色子实现的方法是研究群表示理论的一个有效途径，通常可借助玻色振子的产生和湮没算符来得以实现. 另一方面，关于玻色振子逆算符的性质也曾引起过人们的注意[1]，且近年来这方面的工作又有了新的进展[2,3]，但利用玻色振子的逆算符讨论 $SU(2)$ 群的逆微分实现(一种新的非齐次微分实现)尚未见报道. 鉴于量子力学中的准精确可解问题与李群的非齐次微分实现有着密切的关系[4]，本文将给出 $SU(2)$ 群在 Bargmann 空间的逆微分实现.

## 2　玻色振子逆算符的性质与 $SU(2)$ 群的复合逆算符生成元

以 $a^{-1}$, $(a^{+})^{-1}$ 分别代表玻色振子湮没算符 $a$ 和产生算符 $a^{+}$ 的逆算符，它们对态矢 $|n\rangle$ 的作用可定义为[2]

$$a^{-1}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\ |n+1\rangle\ , \tag{1}$$

$$(a^{+})^{-1}|n\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,|n-1\rangle & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0)\ . \end{cases} \tag{2}$$

1997-07-02收稿

1) 胜利油田职工大学，山东东营257004

相应地，$a^{-1}$ 和 $(a^+)^{-1}$可表示为

$$a^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ |n+1\rangle\langle n|\ ,\tag{3}$$

$$(a^+)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\ |n\rangle\langle n+1|=(a^{-1})^+\ .\tag{4}$$

容易发现

$$aa^{-1}=(a^+)^{-1}a^+=1,\ a^{-1}a=a^+(a^+)^{-1}=1-|0\rangle\langle 0|\ .\tag{5}$$

这表明算符 $a$ 只有右逆而无左逆，而算符 $a^+$ 只有左逆而无右逆.

引入两个彼此独立的玻色振子 $\{a_i^+,a_i,N_i\}(i=1,2)$，它们满足对易关系

$$[a_i,\ a_i^+]=1,\ [N_i,\ a_i]=-a_i,\ [N_i,\ a_i^+]=a_i^+\ .\tag{6}$$

考虑下面的复合逆算符

$$J_+^{-1}=(a_1^+)^{-1}a_2^{-1},\ J_-^{-1}=(a_2^+)^{-1}a_1^{-1},\tag{7}$$

$$J_0^{-1}=\frac{1}{2}[(N_1+1)^{-1}N_2^{-1}-N_1^{-1}(N_2+1)^{-1}]\ .\tag{8}$$

式中

$$N_i^{-1}=a_i^{-1}(a_i^+)^{-1}\ ,\quad (N_i+1)^{-1}=(a_i^+)^{-1}a_i^{-1}\quad (i=1,2)\ .\tag{9}$$

容易证明算符 $N^{-1}$和$(N+1)^{-1}$对态矢$|n\rangle$的作用分别为

$$N^{-1}|n\rangle=\frac{1}{n}\ |n\rangle\ ,\quad (N+1)^{-1}|n\rangle=\frac{1}{n+1}\ |n\rangle\ .\tag{10}$$

则有

$$J_+^{-1}J_-^{-1}-J_-^{-1}J_+^{-1}=2J_0^{-1}\ .\tag{11}$$

这表明复合逆算符 $J_+^{-1}$，$J_-^{-1}$和 $J_0^{-1}$构成一个非封闭的准 $SU(2)$群. 换言之，它们是 $SU(2)$群的复合逆算符生成元.

定义 $SU(2)$群的不可约么正表示$|j,m\rangle$为

$$|j,m\rangle=|j+m\rangle_1\otimes|j-m\rangle_2\quad(-j\leqslant m\leqslant j)\ .\tag{12}$$

该不可约表示是有限维的，而且依赖于量子数 $j(j=0,\frac{1}{2},1,\cdots)$. $SU(2)$群的生成元对$|j,m\rangle$的作用分别为

$$J_+^{-1}|j,m\rangle=\frac{1}{\sqrt{(j+m)(j-m+1)}}\ |j,\ m-1\rangle\ ,\tag{13}$$

$$J_-^{-1}|j,m\rangle=\frac{1}{\sqrt{(j+m+1)(j-m)}}\ |j,\ m+1\rangle\ ,\tag{14}$$

$$J_0^{-1}|j,m\rangle = \frac{m}{(j+m+1)(j+m)(j-m)(j-m+1)}\,|j,\,m\rangle\ . \tag{15}$$

## 3 $SU(2)$群在 Bargmann 空间的逆微分实现

以下讨论将在一个复变量的整函数空间——所谓的 Bargmann 空间中进行.

定义 $SU(2)$群不可约表示的相干态为

$$|jZ) = \exp(ZJ_-^{-1})|j,-j\rangle =$$

$$\sum_{m=-j}^{j}\frac{1}{(j+m)!}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(2j)!(j+m)!}}\;Z^{j+m}|j,m\rangle\ , \tag{16}$$

其归一化系数为

$$A_j(|Z|^2) = \sum_{m=-j}^{j}\frac{(j-m)!}{(2j)![(j+m)!]^3}\,(|Z|^2)^{j+m}\ . \tag{17}$$

为了构造相干态$|jZ)$的完备性关系,定义$P(j+m,\ Z)$为在相干态$|jZ)$中观察到态矢$|j,m\rangle$的概率,即有

$$P(j+m,\ Z) = |\langle j,m|jZ)|^2 = \frac{(j-m)!}{(2j)![(j+m)!]^3}\,(|Z|^2)^{j+m}\ . \tag{18}$$

令 $P(j+m)\equiv\int P(j+m,\ Z)\mathrm{d}Z^2$ ,并让$\rho$表示态矢$|j,m\rangle$的密度矩阵,则有

$$\rho = \sum_{m=-j}^{j}P(j+m)|j,m\rangle\langle j,m|\ . \tag{19}$$

这样,相干态$|jZ)$的完备性关系为

$$\frac{1}{\pi}\rho^{-1}\int\frac{|jZ)(jZ|}{A_j(|Z|^2)}\,\mathrm{d}Z^2 = 1\ . \tag{20}$$

类似于文献 [5,6] 的方法,(20)式的证明将是容易的.

在不可约表示空间中定义一个态矢量$|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \sum_{m=-j}^{j}C_m|j,m\rangle\ , \tag{21}$$

则有

$$(j\bar{Z}|J_-^{-1}|\Psi\rangle = \sum_m C_m(j\bar{Z}|J_-^{-1}|j,m\rangle =$$

$$\sum_m\frac{C_m}{(j+m+1)^2(j+m)!(j-m)}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(2j)!(j+m)!}}\;Z^{j+m+1}\ . \tag{22}$$

另一方面,借助逆微分公式[7]可以得到

$$\frac{1}{\left(2j-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)^2}(j\bar{Z}|\Psi\rangle=$$

$$\sum_m \frac{C_m}{(j+m+1)^2(j+m)!(j-m)}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(2j)!(j+m)!}}\,Z^{j+m+1}\,. \tag{23}$$

从(22)、(23)两式可发现算符 $J_-^{-1}$的逆微分 Bargmann 实现为

$$B_j(J_-^{-1})=\frac{1}{\left(2j-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)^2}\,. \tag{24}$$

同理可得到

$$(j\bar{Z}|J_+^{-1}|\Psi\rangle=\sum_m \frac{C_m}{(j+m-1)!}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(2j)!(j+m)!}}\,Z^{j+m-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}(j\bar{Z}|\Psi\rangle\,, \tag{25}$$

$$(j\bar{Z}|J_0^{-1}|\Psi\rangle=$$

$$\sum_m \frac{m\,C_m}{(j+m)!(j+m)(j+m+1)(j-m)(j-m+1)}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(2j)!(j+m)!}}\,Z^{j+m}=$$

$$\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}-j\right)\frac{1}{\left(2j-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(2j-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)(Z^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)}(j\bar{Z}|\Psi\rangle\,. \tag{26}$$

这样，算符 $J_+^{-1}$和 $J_0^{-1}$的逆微分 Bargmann 实现的

$$B_j(J_+^{-1})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\,, \tag{27}$$

$$B_j(J_0^{-1})=\left(Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}-j\right)\frac{1}{\left(2j-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{1}{Z}\right)\left(2j-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)(Z^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Z}\right)}\,. \tag{28}$$

至此，上面得到的(24)、(27)、(28)式就是 *SU*(2)群的非齐次逆微分实现.

## 参　考　文　献


[1] Dirac P A M. Lectures on Quantum Field Theory. New York: Academic Press, 1966.18

[2] Fan Hongyi. Phys Rev., 1993, **A47**(5):4521—4523

[3] Fan Hongyi. Phys Lett., 1994, **A191**:347—351

[4] Turbiner A V. Ushveridze A G. Phys Lett, 1987, **A126**:181; Turbiner A V. Commun Math Phys, 1988, 118:467

[5] Yu Zhaoxian, Liu Yehou, Li Qinglin et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1995, 19(3): 258—263

(于肇贤,刘业厚,李庆林等. 高能物理与核物理,1995,**19**(3):258—263)

[6] Yu Zhaoxian, Zhang Dexing, Yu Ge. Commun Theor Phys, 1995, **23**(4):505—508

[7] Ye Y Q. Lecture Notes on Differential Equations With Constant Coefficients. Beijing: People's Education Press, 1979. 181—195
(叶彦谦. 常微分方程讲义. 北京:人民教育出版社,1979. 181—195)

# Inhomogeneous Inverse Differential Realizations of the *SU*(2) Group

Yu Zhaoxian Zhang Dexing

(*Daqing Institute of Petroleum, Anda* 151400)

Liu Yehou

(*Chongqing Petroleum Advanced Polytechnic College, Chongqing* 630042)

**Abstract** The generators and irreducible representation coherent state of the *SU*(2) group are constructed using the inverse operators of bose harmonic oscillator. The inhomogeneous inverse differential realizations of the *SU*(2) group are derived.

**Key words** *SU*(2) group, inhomogeneous inverse differential realization, bose harmonic oscillator, inverse operator

Received 2 July 1997