

# 远程束-束作用的研究

王兰法<sup>1)</sup> 张 闯 王书鸿 国智元

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

林郁正 童德春

(清华大学工程物理系 北京 100084)

**摘要** 已有的和建造中的对撞机的运行常常被束-束相互作用引起的非线性效果所限制,特别是大流强的束流,如正在研究中的 BEPC 多束团对撞方案(以下简称 BEPC II)。BEPC II 上的束-束相互作用非常复杂,束团除了在南对撞点正撞外,还在环上其余 11 个位置有远程相互作用。本文计算了远程束-束相互作用的频移和频散。

**关键词** 远程束-束作用 频移 频散

## 1 引言

已有的和建造中的对撞机的运行常常被束-束相互作用引起的非线性效果所限制,特别是大流强的束流,如正在研究中的方案 BEPC II。BEPC II 是单环多束团对撞机,每个束流有六个束团准均匀地分布于环上,束团除了在南对撞点正撞外,还在环上其余 11 个位置有远程相互作用,因此 BEPC II 上的束-束相互作用非常复杂。本文的目的是详细研究近程束-束相互作用和远程束-束相互作用的效应,计算由束-束相互作用引起频移和频散。

## 2 束-束相互作用力

储存环中的带电粒子在对撞点受到反向运动束流激发的电磁场的周期性作用力,当流强增大到一定程度时,这种作用力对束流运动会有很大的影响,并最终限制了束流强度。

对于呈高斯分布的束团,其粒子密度分布为

---

1998-01-09收稿

1) 现清华大学工程物理系博士后

$$\rho = \frac{N}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)\right], \quad (1)$$

其势函数为

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{eN}{2^{3/2}\pi^{1/2}} \int_0^\infty \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2+t} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2+t} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2+t}\right)\right]}{(t+\sigma_x^2)^{1/2}(t+\sigma_y^2)^{1/2}(t+\sigma_z^2)^{1/2}} dt, \quad (2)$$

在该势作用下, 弱束水平方向动量增量为

$$\Delta p_x = \frac{e^2 N}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma_x^2+t} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2+t}\right]}{(t+2\sigma_x^2)^{1/2}(t+2\sigma_y^2)^{1/2}} dt, \quad (3)$$

式中,  $\sigma_{x,y}$  分别为束团的水平和垂直尺寸,  $N$  为电子束团中的粒子数目,  $\epsilon_0$  为介电常数,  $c$  为光速,  $e$  为电子电量.

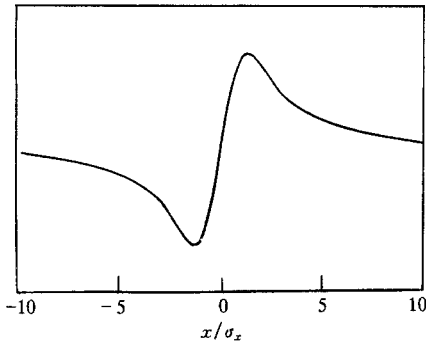


图1 水平束-束kick随x的变化

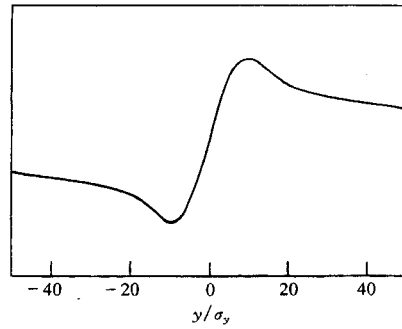


图2 垂向束-束kick随x的变化

当弱束与强束相互作用时, 弱束垂直方向动量增量有相似的表达式. 图 1 给出了  $y = 0$  时, 弱束受到的水平束-束 kick 随  $x$  的变化, 图 2 给出了  $x = 0$  时, 弱束受到的垂直束-束 kick 随  $x$  的变化 (两图中  $\sigma_x / \sigma_y = 1.2 / 0.05 = 24$ ). 由图知道, 在束团的中心附近束-束相互作用力是线性的并且是聚焦的, 当远离束团的中心时束-束相互作用力是非线性的.

### 3 线性频移与分离量

考虑一般情形, 设正负电子束团在水平方向的分离量为  $X$ , 在垂直方向的分离量为  $Y$ , 则振荡幅度为零的粒子受强束-束作用的影响产生的线性频移为<sup>[1]</sup>,

$$\xi_x = \frac{N\beta_x r_e}{2\pi\gamma} \int_0^\infty \left(1 - \frac{2X^2}{2\sigma_x^2+t}\right) \frac{\exp\left[-\frac{X^2}{2\sigma_x^2+t} - \frac{Y^2}{2\sigma_y^2+t}\right]}{(2\sigma_x^2+t)^{3/2}(2\sigma_y^2+t)^{1/2}} dt; \quad (4)$$

$$\xi_y = \frac{N\beta_y r_c}{2\pi\gamma} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{2Y^2}{2\sigma_y^2 + t}\right) \frac{\exp\left[-\frac{X^2}{2\sigma_x^2 + t} - \frac{Y^2}{2\sigma_y^2 + t}\right]}{(2\sigma_x^2 + t)^{1/2}(2\sigma_y^2 + t)^{3/2}} dt, \quad (5)$$

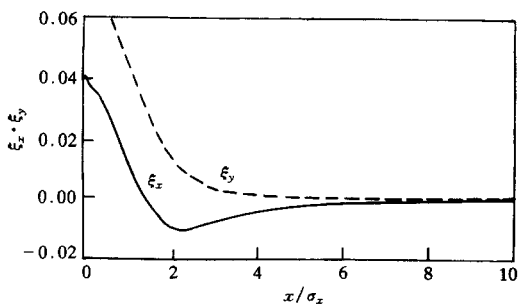


图3 束-束作用线性频移随水平分离量的变化( $Y=0$ )

上式中 $\beta$ 为作用点的束流包络函数, $r_c$ 为电子的经典半径, $\gamma$ 为相对论能量,图3给出了束-束作用线性频移随水平分离量的变化( $Y=0$ )。由图知道,当水平分离量大于约 $1\sigma_x$ 时水平方向的束-束作用表现为散焦,而垂直方向的束-束作用一直表现为聚焦作用。

当水平分离量远大于束团横向尺寸时,远距离束-束作用的线性频移有如下近似表达式:

$$\xi_x = \frac{r_c N\beta_x}{2\pi\gamma} \frac{1}{X^2}, \quad (6)$$

$$\xi_y = \frac{r_c N\beta_y}{2\pi\gamma} \frac{1}{X^2}. \quad (7)$$

#### 4 远程束-束作用的频散

频散是对撞机设计和运行的最重要的参数之一。为了稳定地运行,频散必须限制在一定的范围,以避免穿越危险的共振线。当频率穿越共振线时,就会激发束流,引起不稳定性,影响机器的运行(如寿命减小、亮度降低等),并在探测器中产生干扰,因此希望束流的频散尽可能小。

频散的主要贡献来源于束-束作用(头对头对撞和远程束-束作用),这个频散是由于束团在相遇点受到反向运动的束团的非线性束-束作用力引起的,束-束作用的非线性可以从图1和图2中看出。

当考虑粒子的 $\beta$ 振荡时,不同振荡幅度的粒子由于束-束作用引起的频移不同<sup>[2]</sup>,

$$\frac{\Delta v_x}{\xi_x} = \frac{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)}{2\pi^2 a_x} \int_0^{2\pi} (d_x + a_x \sin\varphi_x) \sin\varphi_x d\varphi_x$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_y \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{(d_x + a_x \sin\varphi_x)^2 \sigma_x^2}{2\sigma_x^2 + t} - \frac{(d_y + a_y \sin\varphi_y)^2 \sigma_y^2}{2\sigma_y^2 + t}\right]}{(2\sigma_x^2 + t)^{3/2}(2\sigma_y^2 + t)^{1/2}} dt, \quad (8)$$

$$\frac{\Delta v_y}{\xi_y} = \frac{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}{2\pi^2 a_y} \int_0^{2\pi} (d_y + a_y \sin\varphi_y) \sin\varphi_y d\varphi_y$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_x \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{(d_x + a_x \sin\varphi_x)^2 \sigma_x^2}{2\sigma_x^2 + t} - \frac{(d_y + a_y \sin\varphi_y)^2 \sigma_y^2}{2\sigma_y^2 + t}\right]}{(2\sigma_x^2 + t)^{1/2} (2\sigma_y^2 + t)^{3/2}} dt, \quad (9)$$

式中  $\xi_x$  和  $\xi_y$  分别为正撞时水平和垂直方向的束-束作用参数,  $a_x, a_y$  分别为水平和垂直方向的相对振荡幅度,  $d_x$  和  $d_y$  分别为水平和垂直方向的相对分离量,

$$a_x = \frac{A_x}{\sigma_x}, \quad a_y = \frac{A_y}{\sigma_x}, \quad d_x = \frac{X}{\sigma_x}, \quad d_y = \frac{Y}{\sigma_y}, \quad (10)$$

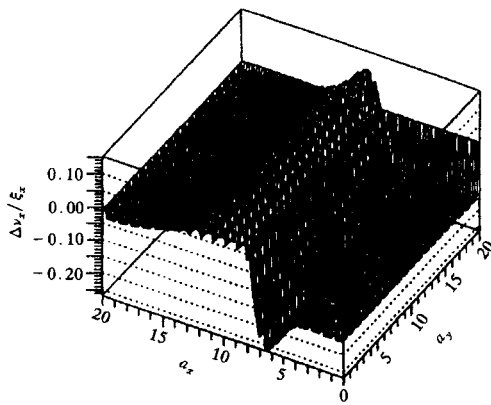


图 4 水平相对束-束频移随振荡幅度的变化  
 $d_x = 8, \sigma_x = 24\sigma_y$ .

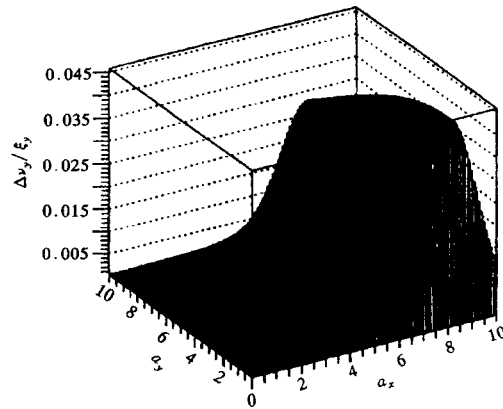


图 5 垂直相对束-束频移随振荡幅度的变化  
 $d_x = 8, \sigma_x = 24\sigma_y$ .

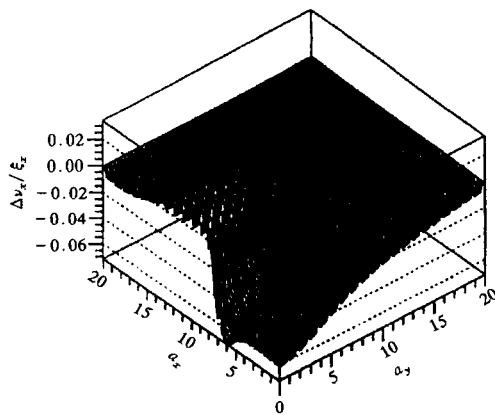


图 6 水平相对束-束频移随振荡幅度的变化  
 $d_x = 8, \sigma_x = \sigma_y$ .

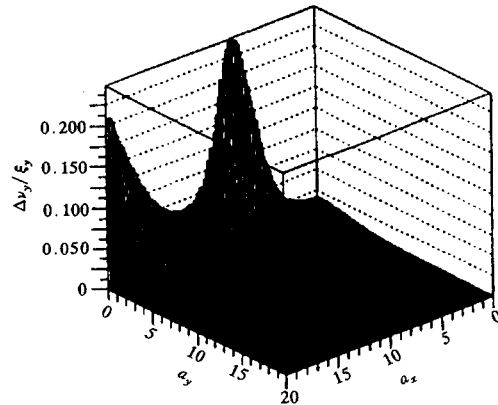


图 7 垂直相对束-束频移随振荡幅度的变化  
 $d_x = 8, \sigma_x = \sigma_y$ .

上式中  $A_x, A_y$  分别为水平和垂直分向的振荡幅度。

当  $d_x = 8, d_y = 0, \sigma_x = 0.6\text{mm}, \sigma_y = 0.0261\text{mm}$  时水平和垂直方向的束-束频移分别由图 4 和图 5 给出。当  $d_x = 8, d_y = 0, \sigma_x = \sigma_y = 0.600\text{mm}$  时水平和垂直方向的束-束频移分别由图 6 和图 7 给出。从图 (4) — (7) 可以得到: 对于扁平束 ( $\sigma_x > \sigma_y$ ), 当束团在水平方向分离时, 水平和垂直相对束-束频移随垂直横向振荡幅度的变化缓慢变化, 而随水平横向振荡幅度的变化较快。同时还可看出, 水平方向的束-束频移在一定的横向振荡幅度范围内 ( $d_x = 8$ ) 小于零 (散焦)。

从图 4 和图 5 可以看出: 当  $a_x = 8, a_y = 0$  时, 水平方向的远程束-束作用频散有最大值 ( $\Delta v_x / \xi_x = -0.25$ ), 垂直方向有相同的结论 ( $\Delta v_y / \xi_y = 0.045$ )。由图可见, 垂直方向横向振荡幅度增加不会引起大的远程束-束作用频散, 而水平方向横向振荡幅度的增加却会引起大的远程束-束作用频散。因此水平分离时, 垂直注入比水平注入有利。BEPC II 实行水平注入, 因此远程束-束作用影响较大。

## 5 多个远程束-束作用频移的模拟

BEPC II 有一个头对头作用点和 11 个远程束-束作用点, 这些远程束-束作用可激发相干束-束作用模。由于分离量是有限的, 远程束-束作用一般是非线性的, 这会激发高阶相干共振。

因为只考虑相干二极振荡, 束团被视为一个质点。每个束团在相遇点受到一个束-束作用偏转<sup>[3]</sup>:

$$\Delta y' + i\Delta x' = -\frac{Nr_c}{\gamma} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}} \left[ w\left(\frac{x + iy}{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}\right) - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) w\left(\frac{ax + iby}{\sqrt{2(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)}}\right) \right], \quad (11)$$

这里  $a = 1/b = \sigma_y/\sigma_x$ ,  $w$  为误差函数。此后束团的运动  $(x, x')$  利用传输矩阵传输到下一个束-束作用点。

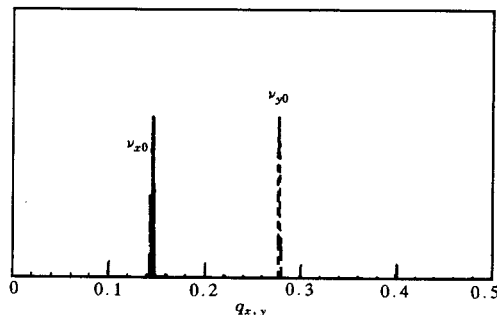


图8 注入模式的束-束作用束流谱  
 $d_x = 11$

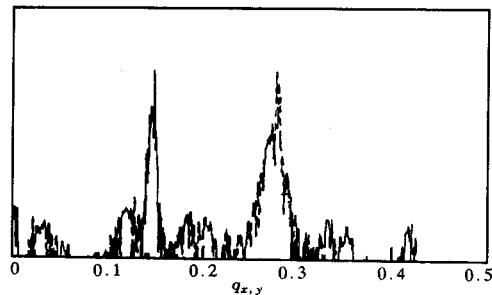


图9 注入模式的注入束-束作用束流谱  
 $d_x = 11, a_x = 5$

在寄生作用点, 由于束团之间在水平方向有一个分离量  $d_x$ , 它仅引起水平方向闭轨的变化, 该贡献可在分离量中考虑, 因此在寄生作用点, 水平偏转取:

$$\Delta x' = \Delta x'(x + d, y) - \Delta x'(d, y). \quad (12)$$

模拟程序从输入文件中读入各作用点的参数, 然后进行模拟跟踪. 对于束团串情形, 每个束团的束-束作用点并不完全相同, 由程序自动判断选择每个束团的对撞点. 程序中每个束团的流强也可不同, 以便研究一般的情形.

当只有两个束团正撞时, 有两个模式: 0 模和  $\pi$  模, 0 模的振荡频率不变, 而  $\pi$  模的振荡频率增加. 如果多个束团对撞 (包括正撞和远距离束-束作用), 就有多个模式, 表现在束流横向频谱上就是有多个横向振荡频率, 称这种横向振荡频率分为多个谱线的现象为工作点的分裂.

表 1 是 BEPC II 注入模式的主要参数, 图 8 为注入模式 12 个寄生作用点的远程束-束作用的模拟跟踪结果, 水平方向有很小的远距离束-束频移, 而垂直方向没有看到明显的

表1 BEPC II 注入模式的主要参数

物理量	符号	单位	数值
能量	$E$	GeV	2.000
周长	$C$	m	240.400
束团数目	$N$		6/6
对撞点数目	$N_{int}$		0
动量压缩因子	$\alpha_p$		0.038
每圈同步辐射损失	$U_0$	MeV	0.136
对撞点水平 $\beta$ 函数	$\beta_x^*$	m	2.000
对撞点垂直 $\beta$ 函数	$\beta_y^*$	m	0.180
水平自然发射度	$\epsilon_{x0}$	mm · mrad	0.352
水平同步辐射阻尼时间	$\tau_x$	ms	23.624
垂直同步辐射阻尼时间	$\tau_y$	ms	23.624
纵向同步辐射阻尼时间	$\tau_z$	ms	11.812
单束团流强	$I_b$	mA	25.250
每束团粒子数	$N$		$1.264 \times 10^{11}$
自然色品	$Q_x' / Q_y'$		-9.390 / -10.830
水平工作点	$Q_x$		5.860
垂直工作点	$Q_y$		6.720

工作点的分裂. 图中,  $q$  为横向振荡频率的小数部分的绝对值. 考虑注入束的束-束作用, 设注入束的水平相对振荡幅度为  $a_x = 5.0$ , 这时的束流谱由图 9 给出, 由图可看出非线性作用力的影响, 跟踪表明, 注入束的振荡幅度随时间逐渐增加, 频散增加. 当分离量减小时, 在水平和垂直方向都看到了明显的工作点的分裂, 如图 10 所示, 并且有

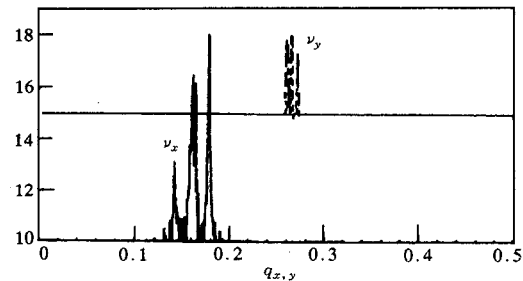


图10 注入模式的束-束作用束流谱

$$d_x = 5.0$$

$$\Delta v_{x\pi} = v_{x\pi} - v_{x0} < 0, \quad \Delta v_{y\pi} = v_{y\pi} - v_{y0} > 0, \quad (13)$$

这与理论计算是一致的, 表明远程束-束相互作用在水平方向是散焦的, 而在垂直方向是

聚焦的. 由于 BEPC II 水平和垂直工作点都在 0.5 以上因而水平  $\pi$  模出现在 0 模右侧, 垂直  $\pi$  模则在 0 模左侧.

## 6 结论

当正负电子在水平方向分离时, 对振荡幅度小于分离量的粒子, 远程束-束相互作用力在水平方向是散焦的, 在垂直方向是聚焦的, 而在头对头对撞情形, 两个方向上的束-束相互作用力都是聚焦的. 当正负电子在水平方向分离且在水平注入时, 远程束-束相互作用频散很大, 发射度有明显的增长; 而采用水平方向分离、垂直方向注入时, 远程束-束相互作用频散会相对小得多. 当水平方向的相对分离量为 11.0 时, 由远程束-束相互作用引起的工作点的分裂最大量小于 10kHz. 此外远程束-束相互作用还会对闭轨产生影响, 也会使横向模耦合不稳定性的阈值降低.

### 参 考 文 献

- 1 Wang Lanfa. Study of Multibunch collision Scheme in BEPC, Master thesis, IHEP  
(王兰法. BEPC 多束团对撞提高亮度的研究, 硕士论文, 中国科学院高能物理研究所)
- 2 Wang Lanfa. BEPC Multibunch collision and Coupled Bunch Instabilities, PH.D. thesis, IHEP  
(王兰法. BEPC 多束团对撞与耦合束不稳定性, 博士论文, 中国科学院高能物理研究所)
- 3 Kohji HIRTATA. A Symplectic Beam-Beam Interaction with Energy Change, KEK Preprint 92-117

### Study of Long Range Beam-Beam Effects

Wang Lanfa      Zhang Chuang      Wang Shuhong      Guo Zhiyuan

(Institute of High Engineering Physics, CAS, Beijing 100039)

Lin Yuzheng      Tong Dechun

(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

**Abstract** The operation of colliders are often limited by the nonlinear effects of beam-beam interaction, especially for the strong current machines, such as BEPC II (BEPC multibunch collision scheme). The beam-beam interaction in BEPC II is very complicated. The bunch will collide with another bunch head on at the south interaction point and interact with another bunches due to the long distance beam-beam force at other eleven points along the ring. This paper has studied the tune shift and tune spread due to the long distance beam-beam interaction effects. The long distance beam-beam effects of BEPC II injection mode have also been studied.

**Key words** long distance beam-beam interaction, tune shift, tune spread