

# 用改进的哈密顿量计算 1+1 维格点 QCD 中矢量介子质量谱\*

江俊勤

(广东教育学院物理系 广州 510303)

罗向前

(中山大学物理系 广州 510275)

**摘要** 用变分法计算 1+1 维格点 QCD 中矢量介子的质量谱  $M_V$ ，验证了理论的预言：对带 Wilson 夸克的格点哈密顿量的改进能使有限格距所引起的误差明显减小。

**关键词** 格点 1+1 维 QCD Wilson 夸克 改进哈密顿量 有限格距误差

## 1 引言

格点规范理论从第一原理出发(没有 QCD 以外的任意参数),是研究 QCD 非微扰性质的最可靠方法. 格点规范理论中有两种等价的理论形式——作用量形式和哈密顿量形式. 哈密顿量形式的优点在于既能计算粒子质量又能计算粒子波函数, 中山大学粒子物理组采用哈密顿量形式作出了有意义的工作<sup>[1]</sup>.

在 Wilson 提出的格点规范理论中, 格点作用量与连续理论作用量之间存在着由有限格距引起的误差(称为有限格距误差), 对于带夸克的作用量而言, 误差为  $O(a)$ ,  $a$  为格距. 由于目前格点计算只能到达中间耦合区, 因而误差  $O(a)$  较大, 这正是格点计算在过去一段时间内进展较慢的原因.

改进格点作用量(或哈氏量), 目的在于减小它与连续理论作用量(或哈氏量)之间的误差. Hamber 和 Wu 首先提出了作用量的改进方案<sup>[2]</sup>, 在此基础上, 罗向前等人提出了哈氏量的改进方案<sup>[3,4]</sup>. 理论分析表明: 在带 Wilson 夸克的情况下, 改进后的格点哈氏量与连续理论哈氏量之间的误差减小为  $O(a^2)$  (未改进时误差为  $O(a)$ ), 即有限格距误差由  $O(a)$  减小为  $O(a^2)$ .

1998-05-11 收稿

\* 国家杰出青年科学基金, 国家自然科学基金, 理论物理专款, 国家教委留学回国人员基金和博士点专项基金, 国家科委攀登计划, 中山大学、香港中山大学高等学术研究中心基金资助

由于 1 + 1 维 QCD 与 3 + 1 维 QCD 之间有许多相同或相似的特征(例如有相似的质量谱), 而且 1 + 1 维 QCD 容易研究, 因此, 人们希望在 1 + 1 维 QCD 中发现的某些物理性质可以推广到 3 + 1 维理论中去.

本文通过对 1 + 1 维格点 QCD 中矢量介子质量谱  $M_v$  的计算, 验证了理论的预言: 对带 Wilson 夸克的格点哈密顿量的改进能使有限格距引起的误差明显减小.

## 2 改进哈密顿量

1990 年, 为了解决“费米子加倍”问题, 提出了带 Wilson 费米子的格点哈密顿量<sup>[5,6]</sup>

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_x E_j^\alpha(x) E_j^\alpha(x) + m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x,k) \psi(x+k) + \frac{r}{2a} \sum_{x,k} [\bar{\psi}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) U(x,k) \psi(x+k)]. \quad (1)$$

其中,  $E_j^\alpha(x)$  为规范群的生成元,  $U(x,k)$  为规范链变量,  $k = \pm 1, j = 1$ ,  $\gamma_{-k} = -\gamma_k$ ,  $\gamma_k$  为 Pauli 矩阵:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1. \quad (2)$$

$a, r, m$  分别为格距, Wilson 参数, fermion 质量(在本文中, 实际为夸克质量),  $g = ea$  为无量纲的裸耦合常数,  $e$  为带质量量纲的裸耦合常数. 二分量旋量场  $\psi(x)$  表示为

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

裸真空定义为  $\xi(x)|0\rangle = \eta(x)|0\rangle = E_j^\alpha(x)|0\rangle = 0$ .

由于 Wilson 项(即(1)式的最后一项)的引入, 使得(1)式与连续理论的哈氏量之间的误差为  $O(a)$ . 在目前格点计算只能到达中间耦合的情况下, 误差  $O(a)$  比较大.

为了减小误差, 1994 年罗向前, 陈启洲, 许国材和江俊勤提出了格点哈密顿量的改进方案:<sup>[3]</sup>

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_x E_j^\alpha(x) E_j^\alpha(x) + m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2a} \sum_{x,k} [b_1 \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x,k) \psi(x+k) + b_2 \bar{\psi}(x) \gamma_k U(x,2k) \psi(x+2k)] +$$

$$\frac{r}{2a} \sum_{x,k} [\bar{\psi}(x) \psi(x) - c_1 \bar{\psi}(x) U(x, k) \psi(x+k) - c_2 \bar{\psi}(x) U(x, 2k) \psi(x+2k)]. \quad (4)$$

式中,  $U(x, 2k) = U(x, k) U(x+k, k)$ .  $b_1, b_2, c_1, c_2$  由过渡到连续理论的要求决定:

$$b_1 = 4/3, \quad b_2 = -1/6, \quad c_1 = 4/3, \quad c_2 = -1/3.$$

理论分析知, (4) 式最后一项 (即 Wilson 项) 的误差减小为  $O(a^2)$ , 从而 (4) 式与连续理论哈密顿量之间的误差减小为  $O(a^2)$ .

### 3 1 + 1 维 QCD 中 $M_v$ 的格点计算

文献 [3] 利用 (4) 式计算了 Schwinger 模型中的  $M_v$ , 得到较好的结果. 由于 1 + 1 维 QCD 更加接近于 3 + 1 维 QCD, 故对 1 + 1 维 QCD 中  $M_v$  的计算更有意义.

对于 1 + 1 维 QCD, (4) 式中的  $U(x, k)$  和  $E_j^\alpha(x)$  满足如下对易关系<sup>[6,7]</sup>

$$\begin{aligned} [U(x, k), E_j^\alpha(y)] &= \frac{1}{2} \lambda^\alpha U(x, k) \delta_{xy} \delta_{kj}, \\ [U^+(x, k), E_j^\alpha(y)] &= -\frac{1}{2} U^+(x, k) \lambda^\alpha \delta_{xy} \delta_{kj}. \end{aligned} \quad (5)$$

对于  $SU(2)$  群,  $\lambda^\alpha$  为 Pauli 矩阵, 对于  $SU(3)$  群,  $\lambda^\alpha$  为 Gell-Mann 矩阵.

取带 fermion 的规范场的物理真空态为<sup>[7,8]</sup>

$$|\Omega\rangle = e^{i\theta_1 S_1 + i\theta_2 S_2} |0\rangle. \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} S_1 &= i \sum_{x,k} \psi^\dagger(x) \gamma_k U(x, k) \psi(x+k), \\ S_2 &= i \sum_{x,k} \psi^\dagger(x) \gamma_k U(x, 2k) \psi(x+2k). \end{aligned} \quad (7)$$

$\theta_1, \theta_2$  为独立变分参数.

真空能量由下式给出

$$E_\Omega = \langle \Omega | H | \Omega \rangle / \langle \Omega | \Omega \rangle. \quad (8)$$

利用  $E_\Omega$  取极小值的条件

$$\frac{\partial E_\Omega}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial E_\Omega}{\partial \theta_2} = 0. \quad (9)$$

可求出  $\theta_i = \theta_i(1/g^2, r, m)$ , ( $i = 1, 2$ ).

为了计算  $M_v$ , 引入介子波函数<sup>[3]</sup>

$$|V\rangle = \left[ A \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_1 \psi(x) + B \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_1 U(x, k) \psi(x+k) + \right.$$

$$C \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) \gamma_1 U(x, 2k) \psi(x+2k) \Big] |\Omega\rangle. \quad (10)$$

式中,  $A, B, C$  为变分参数, 可以由

$$M_v = \frac{\langle V|H|V\rangle}{\langle V|V\rangle} - \frac{\langle \Omega|H|\Omega\rangle}{\langle \Omega|\Omega\rangle}. \quad (11)$$

取极小值的条件决定. 即由

$$\frac{\partial M_v}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial M_v}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial M_v}{\partial C} = 0. \quad (12)$$

可以确定  $M_v$  所满足的久期方程

$$\begin{vmatrix} F_1 M_v a + K_1 & F_2 M_v a + K_2 & F_3 M_v a + K_3 \\ F_2 M_v a + K_2 & F_4 M_v a + K_4 & F_5 M_v a + K_5 \\ F_3 M_v a + K_3 & F_5 M_v a + K_5 & F_6 M_v a + K_6 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

式中,  $F_i, K_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  是  $\theta_1, \theta_2, r, ma$  的函数.

解方程 (13) 式可求得  $M_v a$ .

## 4 结果与讨论

### 4.1 $M_v a/g$ 与 $1/g^2$ 的关系

$M_v a/g$  (即  $M_v/e$ ) 是无量纲的物理量, 按过渡到连续理论的要求, 格点计算得到的  $M_v a/g$  应当不明显依赖于  $1/g^2$  和  $r$ , 否则不是好的结果.

为了便于讨论, 先取  $m = 0$ , 把 (1) 式和 (4) 式分别代入 (9) 式求出  $\theta_1, \theta_2$ , 再由 (13) 式求出  $M_v a/g$  与  $1/g^2$  的关系, 如图 1 和图 2 所示.

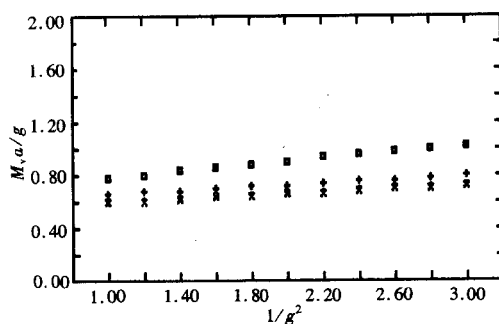


图1  $SU(2)$  中  $M_v a/g$  与  $1/g^2$  的关系

□, ● 分别为使用未改进的  $H$  时  $r=1.0, 0.2$  的结果;

+, × 分别为使用改进的  $H$  时  $r=1.0, 0.2$  的结果.

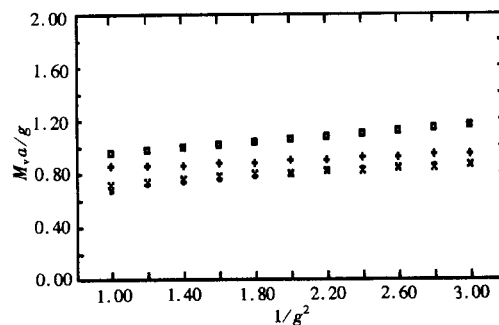


图2  $SU(3)$  中  $M_v a/g$  与  $1/g^2$  的关系

(各符号的意义与图1相同)

由图 1 和图 2 可知, 当使用未改进的哈密顿量(1)式时,  $M_v a/g$  有较好的标度行为(即与  $1/g^2$  的依赖关系不明显), 但与  $r$  的依赖关系较明显, 这说明(1)式与连续理论的哈密顿量之间的误差(称为有限格距误差)比较大. 当使用改进的哈密顿量(4)式时,  $M_v a/g$  的标度行为进一步改善, 而更为重要的是  $M_v a/g$  与  $r$  的依赖关系明显减小, 也就是说, 通过对带 Wilson 夸克的格点哈密顿量的改进能使有限格距误差明显减小. 由于  $M_v$  的计算比较复杂, 本文在引入带夸克的规范场的物理真空态(6)式时, 仅考虑一、二链项  $S_1$ 、 $S_2$  的贡献, 若仔细计入三链项  $S_3$  的贡献, 相信会得到更好的结果.

## 4.2 $M_v a$ 与 $ma$ 的关系

取不同的  $r$  值和不同的  $1/g^2$ , 把(4)式代入(9)式和(13)式, 求出  $M_v a$  与  $ma$  的关系曲线, 如图 3 和图 4 所示.

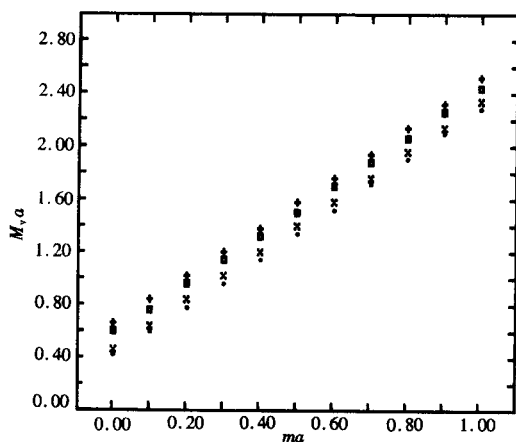


图 3 使用改进哈密顿量时  $SU(2)$  中  $M_v a$  与  $ma$  的关系  
+, □ 分别为取  $1/g^2=1$  时  $r=1.0, 0.2$  的结果;  
×, ● 分别为取  $1/g^2=3$  时  $r=1.0, 0.2$  的结果.

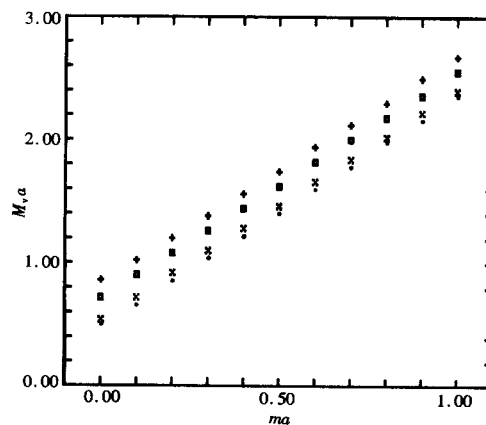


图 4 使用改进的哈密顿量时  $SU(3)$  中  $M_v a$  与  $ma$  的关系  
(各符号的意义与图 3 相同)

从图 3 和图 4 可以看到, 介子质量谱  $M_v$  与夸克质量  $m$  的变化关系不明显依赖于耦合常数  $g$  和 Wilson 参数  $r$ , 也就是说, 使用改进的哈密顿量(4)式, 求得的  $M_v$  有好的标度行为, 而且有限格距所产生的误差明显地减小了.

由于  $1+1$  维 QCD 与  $3+1$  维 QCD 有许多相同或相似的特征, 本文的结果令我们相信, 把改进格点哈密顿量的方案应用于  $2+1$  维和  $3+1$  维 QCD 的计算中, 会得到好的结果.  $2+1$  维 QCD 和  $3+1$  维 QCD 的格点计算正在进行之中, 相信很快就会有结果.

## 参 考 文 献

- 1 Luo Xiangqian, Chen Qizhou. Mod. Phys. Lett., 1996, A11:2435
- 2 Hamber H, Wu C M. Phys. Lett., 1983, B133:251
- 3 Luo Xiangqian et al. Phys. Rev., 1994, D50:501
- 4 Luo Xiangqian et al. Nucl. Phys., 1998, B(Proc. Suppl.)63A-C:931

- 5 Chen Qizhou, Luo Xiangqian. *Phys. Rev.*, 1990, **D42**:1293
- 6 Luo Xiangqian, He Baopeng et al. *Z. Phys.*, 1991, **C51**:423
- 7 Luo Xiangqian, Chen Qizhou. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.* (in Chinese), 1992, **16**:685  
(罗向前, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1992, **16**:685)
- 8 Jiang Junqin. *High Energy Phys. and Nucl. Phys.* (in Chinese), 1998, **22**:891  
(江俊勤. 高能物理与核物理, 1998, **22**:891)

## Calculation of the Vector Meson Mass in 1 + 1 Dimensional Lattice QCD by Using the Improved Hamiltonian \*

Jiang Junqin

*(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303)*

Luo Xiangqian

*(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)*

**Abstract** The vector meson mass in 1 + 1 dimensional lattice QCD is calculated by using the variational method. The predictions are proved: The errors which come from the finite lattice spacing can be greatly reduced evidently by improving the lattice Hamiltonian with Wilson quark.

**Key words** Lattice, 1 + 1 dimensional QCD, Wilson quark, improved Hamiltonian, finite lattice spacing errors

---

Received 11 May 1998

\* Supported by the National Science Fund for Outstanding Young Scientists, National Natural Science Foundation, Special Fund for Theoretical Physics, Fund for Returned Overseas Chinese Scholar and Doctoral Fund of National Education Committee, the National Climbing Plan, the Zhongshan University Administrations and Hong Kong Foundation of the Zhongshan University Advanced Research Center.