第23卷 第9期
1999 年9月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.23, No.9
Sep., 1999

非均匀束团在储存环高频腔中产生的高次模功率*

赵 振 堂

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 通过分析束流频谱与高频腔高次模的相互作用,提出了计算单束流和双束流储存环中非均匀束团产生的高频腔高次模功率的方法,推导出了这两种情况下的一般通用公式,并对所得到的解析结果进行了比较和讨论.

关键词 高频腔 束流 高次模 阻抗 功率

1 引言

在强流对撞机和光源储存环中,束流与高频腔高次模相互作用会产生两方面的有害效应.一是束流激励起的高次模式电磁场反作用于束流,引起束流不稳定;二是束流通过束腔相互作用将基模的高频功率转换成了高次模功率,导致寄生模损耗过大.为此,近年来国外几家实验室研制出了多种深度阻尼高次模的常温和超导高频腔[1],以控制束流不稳定性的增长速率和高次模功率的大小.高频腔高次模的抑制深度既可能由不稳定性增长速率的要求来决定,也可能由腔内高次模功率的限制来决定.无论如何,高次模抑制器的功率承受能力和高次模功率大小的确定都是首先要考虑和解决的问题.因此,如何计算储存环中高频腔高次模功率是一项既有理论意义又有实际应用价值的工作.

人们一般可在两种特殊条件下严格计算高次模功率[2,3].1)纯粹的单束团情况:即高次模被深度阻尼,束团每次与高频腔作用时,前面激起的高次模电磁场已经完全衰减掉了.2)均匀分布多束团情况:即束团每次与高频腔作用时,腔中仍然剩有前面激起的高次模电磁场,并且储存环中束流是由等距均匀分布的相同束团组成的.在这两种理想情况下,人们可以给出计算高次模功率的解析表达式.实际储存环中的束流大都不属于这两种理想情况,由于电子环中清理离子和质子环中考虑注入元件上升时间等方面的要求,储存环中粒子束团通常呈非均匀分布,一般沿环有一个或几个较大的束团间距.为了控制非均匀束团引起的瞬态效应,一部分储存环采用了高频反馈技术[4,5],用以保持恒定加速

1998-07-08收稿
* 中国科学院"九五"基础性研究项目资助

电压和加速相位．本文通过分析束流频谱与高频腔中高次模电磁场的作用，研究了计算储存环中单束和双束非均匀束团在腔中产生的高次模功率的方法，推导并给出了计算高次模功率的解析表达式．

2　单束储存环中高频腔的高次模功率

2.1　储存环中的束流频谱

如果储存环中有 B 个稳定运动的非均匀分布的束团，由束团间距可以得出一个最小的束团谐波数 M，即储存环一周有 M 个均匀分布的束团位置，B 个束团非均匀地填充到这 M 个位置中．设每一束团具有相同的粒子分布，束团的流强用归一化因子 a_k 控制，$0 \leqslant a_k \leqslant 1, k = 0, 1, \cdots, M-1$．$a_k = 0$ 时，相当于此处没有束团填充．用壁电流探测器观测，储存环中的束流可表示为：

$$I(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{M-1} a_k I_0(t - lT_0 - kT_0 / M), \tag{1}$$

式中，$T_0 = 2\pi / \omega_0$ 为粒子在储存环中的回旋周期，$I_0(t)$ 为最强的一个单束团在时域内的流强分布，l 表示束团回旋的圈数．通过富氏和反富氏变换，束流可表示为：

$$\tilde{I}(\omega) = \omega_0 \tilde{I}_0(\omega) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-jk\omega T_0 / M} \right) \delta(\omega - l\omega_0) , \tag{2}$$

$$I(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{M-1} A_n \tilde{I}_0(\omega_{pn}) e^{j\omega_{pn} t} , \tag{3}$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{M-1} a_k e^{-j2\pi nk / M} , \tag{4}$$

$$\tilde{I}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(t) e^{-j\omega t} dt , \tag{5}$$

$$\omega_{pn} = (pM + n)\omega_0 . \tag{6}$$

式中，A_n 是考虑非均匀束团后的束流频谱分量调节系数，A_n 可分为实部 A_{nr} 和虚部 A_{ni}，即 $A_n = A_{nr} + jA_{ni}$，且 $A_{M+n} = A_n$．在实域内束流可表示为：

$$\mathrm{Re}[I(t)] = I_D + \frac{2}{T_0} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{M} | A_n | \tilde{I}_0(\omega_{pn}) \cos(\omega_{pn} t + \theta_I), \tag{7}$$

式中，I_D 为储存环中的平均流强

$$I_D = \frac{1}{T_0} \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) \tilde{I}_0(0), \tag{8}$$

$$\theta_I = \tan^{-1} \frac{A_{ni}}{A_{nr}} \tag{9}$$

2.2 束流激励起的电压

高频腔有无穷多个纵向谐振模式，每一模式可用谐振角频率ω_m、分流阻抗 $R_m^{/\!/}$和有载品质因数 Q_m来表征．高频腔的纵向阻抗 $Z^{/\!/}(\omega)$可分解为实部 $Z_r^{/\!/}(\omega)$和虚部$Z_i^{/\!/}(\omega)$两部分，根据激励源的频率还可确定高频腔某一模式被激励时的失谐角ψ_m，按照上述定义高频腔的纵向阻抗可表示为：

$$Z^{/\!/}(\omega) = Z_r^{/\!/}(\omega) + jZ_i^{/\!/}(\omega) = \sum_{m=1}^{+\infty} Z_m(\omega) =$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{R_m^{/\!/}}{1 + jQ_m(\omega / \omega_m - \omega_m / \omega)} \quad . \tag{10}$$

实部和虚部纵向阻抗的奇偶对称性在$\omega = \omega_{pn}$时可写为：

$$Z_r^{/\!/}(\omega_{pn}) = Z_r^{/\!/}(-\omega_{pn}) = \sum_{m=1}^{+\infty} Z_{mr}(\omega_{pn}) = \sum_{m=1}^{+\infty} R_m^{/\!/}\cos^2\psi_m \ , \tag{11}$$

$$Z_i^{/\!/}(\omega_{pn}) = -Z_i^{/\!/}(-\omega_{pn}) = \sum_{m=1}^{+\infty} Z_{mi}(\omega_{pn}) = \sum_{m=1}^{+\infty} R_m^{/\!/}\cos\psi_m\sin\psi_m \ , \tag{12}$$

$$\tan\psi_m = -Q_m\left(\frac{\omega_{pn}}{\omega_m} - \frac{\omega_m}{\omega_{pn}}\right) \ . \tag{13}$$

在频域内，束流激励起的电压为：

$$\tilde{V}(\omega) = \tilde{I}(\omega)Z^{/\!/}(\omega) \ . \tag{14}$$

通过反富氏变换，束流激励起的电压在时域内可表示为：

$$V(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=1}^{\infty} A_n\tilde{I}_0(\omega_{pn})\, Z_m^{/\!/}(\omega_{pn})\, e^{j\omega_{pn}t} \quad . \tag{15}$$

将上式写为实域内的表达式

$$\mathrm{Re}[V(t)] = \frac{1}{T_0}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=1}^{\infty} |A_n|\tilde{I}_0(\omega_{pn})R_m^{/\!/}\cos\psi_m\cos(\omega_{pn}t + \theta_I + \psi_m) \ . \tag{16}$$

2.3 高次模功率

根据束流 $I(t)$在高频腔中激励起的电压 $V(t)$，束流在一个回旋周期内产生的高次模功率可表示为：

$$P_{\mathrm{HOM}} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} I(t)V(t)\,\mathrm{d}t \ . \tag{17}$$

由(3)和(15)式可得：

$$P_{\mathrm{HOM}} = \frac{2}{T_0^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{M} B_n\tilde{I}_0^2(\omega_{pn})Z_r(\omega_{pn}) \ , \tag{18}$$

式中，$B_n = A_n A_n^* = |A_n|^2$是由非均匀束团产生的功率调节系数，具体表达式可写为：

$$B_n = \sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{M-1} a_j a_k \cos\left(\frac{2\pi n(j-k)}{M}\right) . \tag{19}$$

3 双束储存环中高频腔的高次模功率

对于单环对撞机，不能直接采用上述频谱分析法来求得双束储存环中高频腔的高次模功率解析表达式．由于两股束流的运动方向相反，必须考虑其激励起的电压在迭加时的相位关系，其中包括：

(1) 正向束团和反向束团到达某一高频腔处的时间差；

(2) 根据每股束流带电的正负性和运动方向以及高频腔每一模式电磁场的轴向对称性，确定其激励起的电场与束流运动方向的关系．

如果以对撞点为起点，以某一对相互对撞的正反向束团为参考标志，来观查该对束团通过某一高频腔 q 的时间差，设正向束团在 $t = T_q^+$ 时通过该腔中心，反向束团在 $t = T_q^-$ 时通过该腔中心；再设正向和反向束流稳定运动，其束团归一化控制因子分别为 a_k^+ 和 a_k^-，最强单束团的时域内分布为 $I_0^+(t)$ 和 $I_0^-(t)$；反向束流的电性用μ来表示，$\mu = 1$ 时电性与正向束流相反，$\mu = -1$ 时与正向束流相同；仍用壁电流探测器在 q 处测量，则正向束流 $I_q^+(t)$ 和反向束流 $I_q^-(t)$ 可表示为：

$$I_q^+(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{M-1} a_k^+ I_0^+(t - T_q^+ - lT_0 - kT_0/M), \tag{20}$$

$$I_q^-(t) = \mu\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{M-1} a_k^- I_0^-(t - T_q^- - lT_0 - kT_0/M), \tag{21}$$

$$T_0 = T_q^+ + T_q^- . \tag{22}$$

通过富氏变换可得：

$$I_q^+(\omega) = \omega_0 \tilde{I}_0^+(\omega)\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k^+ \mathrm{e}^{-jk\omega T_0/M}\right)\mathrm{e}^{-jl\omega_0 T_q^+}\delta\left(\omega - l\omega_0\right), \tag{23}$$

$$I_q^-(\omega) = \mu\omega_0 \tilde{I}_0^-(\omega)\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k^- \mathrm{e}^{-jk\omega T_0/M}\right)\mathrm{e}^{-jl\omega_0 T_q^-}\delta\left(\omega - l\omega_0\right), \tag{24}$$

$$I_q(\omega) = I_q^+(\omega) + I_q^-(\omega) . \tag{25}$$

再经过反富氏变换得：

$$I_q^+(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{M-1} A_n^+ \tilde{I}_0^+(\omega_{pn})\mathrm{e}^{-j\omega_{pn}T_q^+}\mathrm{e}^{j\omega_{pn}t} , \tag{26}$$

$$I_q^-(t) = \frac{\mu}{T_0}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{M-1} A_n^- \tilde{I}_0^-(\omega_{pn})\mathrm{e}^{-j\omega_{pn}T_q^-}\mathrm{e}^{j\omega_{pn}t} , \tag{27}$$

$$I_q(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{M-1}[A_n^+\tilde{I}_0^+(\omega_{pn})\,\mathrm{e}^{-j\omega_{pn}T_q^+}+\mu A_0^-\tilde{I}_0^-(\omega_{pn})\,\mathrm{e}^{-j\omega_{pn}T_q^-}]\mathrm{e}^{j\omega_{pn}t}\ ,\tag{28}$$

式中，A_n^+和 A_n^-及 $\tilde{I}_0^+(\omega_{pn})$和 $\tilde{I}_0^-(\omega_{pn})$表示正反向束流相应的 A_n和 $\tilde{I}_0(\omega_{pn})$，在实域内可表示为：

$$\mathrm{Re}[I_q(t)]=I_{D\mu}+\frac{2}{T_0}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{M}[(|A_n^+|\tilde{I}_0^+(\omega_{pn}))^2+(|A_n^-|\tilde{I}_0^-(\omega_{pn}))^2+$$

$$2\mu|A_n^+||A_n^-|\tilde{I}_n^+(\omega_{pn})\tilde{I}_n^-(\omega_{pn})\cos(2\omega_{pn}T_q^+-\theta_I^++\theta_I^-)]^{1/2}\cos(\omega_{pn}t+\theta_{pn})\ ,\tag{29}$$

$$I_{D\mu}=\frac{1}{T_0}\sum_{k=0}^{M-1}(a_k^+\tilde{I}_0^+(0)+\mu a_k^-\tilde{I}_0^-(0)),\tag{30}$$

$$\theta_{pn}=\tan^{-1}\left[\frac{\mu|A_n^-|\tilde{I}_0^-(\omega_{pn})\sin(\omega_{pn}T_q^++\theta_I^-)-|A_n^+|\tilde{I}_0^+(\omega_{pn})\sin(\omega_{pn}T_q^+-\theta_I^+)}{\mu|A_n^-|\tilde{I}_0^-(\omega_{pn})\cos(\omega_{pn}T_q^++\theta_I^-)+|A_{n+}|\tilde{I}_0^+(\omega_{pn})\cos(\omega_{pn}T_q^+-\theta_I^+)}\right].\tag{31}$$

当正反向束流的分布和流强完全对称和相同、电性相反时，即：$\mu=1, A_n=A_n^+=A_n^-$，$\tilde{I}_0(\omega_{pn})=\tilde{I}_0^+(\omega_{pn})=\tilde{I}_0^-(\omega_{pn})$．则：

$$\tilde{I}_q(t)=I_{D\mu}+\frac{4}{T_0}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{M}|A_n|\tilde{I}_0(\omega_{pn})\cos(\omega_{pn}T_q^+)\cos(\omega_{pn}t+\theta_I)\ .\tag{32}$$

采用与前面类似的方法可求得正反向束流在高频腔中激励起的电压，但这里必须注意束流运动方向和高次模纵向电场分布的轴向对称性与其场相位的关系．对于反向束流，用 v_m表示高次模 m 场分布的轴向对称性，偶对称时 $v_m=1$，奇对称时 $v_m=-1$．这样双束激励起的高频腔电压可表示为：

$$V_q(t)=\sum_{m=1}^{+\infty}V_{qm}(t)\ ,\tag{33}$$

$$V_{qm}(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{M-1}[A_n^+\tilde{I}_0^+(\omega_{pn})\mathrm{e}^{-j\omega_{pn}T_q^+}+v_m\mu A_n^-\tilde{I}_0^-(\omega_{pn})\,\mathrm{e}^{-j\omega_{pn}T_q^-}]\,Z_m^{/\!/}(\omega_{pn})\mathrm{e}^{j\omega_{pn}t}.\tag{34}$$

同样，当正反向束流的分布和流强完全对称和相同、电性相反时，

$$V_{qm}(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{M-1}[2+2v_m\cos(2\omega_{pn}T_q^+)]^{1/2}|A_n|\tilde{I}_0(\omega_{pn})\,Z_m^{/\!/}(\omega_{pn})\,\mathrm{e}^{j(\omega_{pn}t+\theta_{pn,m})}\ ,\tag{35}$$

式中，

$$\theta_{pn,m}=\tan^{-1}\left[\frac{v_m-1}{v_m+1}\tan(\omega_{pn}T_q^+)\right]+\theta_I\ .\tag{36}$$

在实域内 $V_{qm}(t)$可表示为：

$$\mathrm{Re}[V_{qm}(t)] = \frac{1}{T_0}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{M}\{[2+2v_m\cos(2\omega_{pn}T_q^+)]^{1/2}\times$$

$$|A_n|\tilde{I}_0(\omega_{pn})R_m^{/\!/}\cos\psi_m\cos(\omega_{pn}t+\psi_m+\theta_{pn,m})\} \ . \tag{37}$$

由于双束与储存环高频腔相互作用时要考虑高次模纵向电场分布的轴向对称性，所以不能用(17)式，而要用下式求出高次模功率的表达式

$$P_{\mathrm{HOM},q} = \frac{1}{T_0}\sum_{m=1}^{+\infty}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2}\frac{|V_{qm}(t)|^2}{R_m^{/\!/}}\mathrm{d}t \ . \tag{38}$$

由(34)式可得：

$$P_{\mathrm{HOM},q} = \frac{1}{T_0^2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{m=1}^{+\infty}[|A_n^+\tilde{I}_0^+(\omega_{pn})|^2+|A_n^-\tilde{I}_0^-(\omega_{pn})|^2+$$

$$2v_m\mu|A_n^+A_n^-\tilde{I}_0^+(\omega_{pn})\tilde{I}_0^-(\omega_{pn})|\cos(2\omega_{pn}T_q^+ + \theta_I^+ - \mu\theta_I^-)]\,Z_{mr}^{/\!/}(\omega_{pn}) \ . \tag{39}$$

4 结果与讨论

单束流产生的高频腔高次模功率由高次模阻抗和束流谱线强度以及束流谱线与高次模谐振峰的重合程度决定．如果储存环的周长比较小或高次模 Q 值比较高，将会有些谐振峰不与束流谱线重合，因而这些谐振模式对高次模功率的贡献不大．但当储存环周长比较大或高次模 Q 值很低时，将会有多个束流谱线与同一高次模谐振峰相互作用，产生高次模功率。束流谱线强度取决于束团分布和流强大小，由此可见，不仅高次模的频率和阻抗，而且束团的非均匀分布形态也影响所产生的高次模功率的大小．

单环双束产生的高次模功率不仅取决于束流频谱与高次模谐振峰的重合程度，而且还与高次模场形的轴向奇偶对称性以及高频腔的位置有关．由(39)式还可看出，相同谐振频率同样阻抗大小的高次模，如果其轴向场为奇对称时所产生的高次模功率最大，则轴向场为偶对称时所产生的高次模功率最小；反之亦然．

上述计算高次模功率的一般公式很容易退化到一些简单情况下的计算公式，例如，单束团和多束团单次、单束团和多束团多次通过高频腔的情况．在单束团情况下，$a_0=1, a_k=0, k=1,2\cdots M-1$，由(18)和(19)式可得：

$$P_{\mathrm{HOM}} = \frac{2}{T_0^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\tilde{I}_0^2(p\omega_0)\,Z_r^{/\!/}(p\omega_0) \ . \tag{40}$$

当ω_0远小于高次模的带宽时，定义 $k_{\mathrm{HOM}}^{/\!/}$为高次模的损失参数，Q 为单束团的电荷量，则高次模功率的计算公式可退化到如下标准公式：

$$P_{\mathrm{HOM}} = \frac{1}{2\pi T_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{I}_0^2(\omega)Z_r^{/\!/}(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{k_{\mathrm{HOM}}^{/\!/}Q^2}{T_0} \ . \tag{41}$$

在均匀多束团情况下，$a_k=1, k=1,2\cdots M-1$，有：

$$P_{\mathrm{HOM}}=\frac{2M^2}{T_0^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\tilde{I}_0^2(pM\omega_0)Z_r^{/\!/}(pM\omega_0)\ . \tag{42}$$

当 $M\omega_0$远小于高次模的带宽时,

$$P_{\mathrm{HOM}}=\frac{M}{2\pi T_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{I}_0^2(\omega)Z_r^{/\!/}(\omega)\,\mathrm{d}\omega=\frac{Mk_{\mathrm{HOM}}^{/\!/}Q^2}{T_0}\ . \tag{43}$$

上述这些推论结果与已有的常用公式[2,3,6]是完全一致的．不仅如此,在双束高次模功率的计算公式中略去与反向束流有关的项,(39)式便可退化成单束高次模功率的计算公式(18)式,当ω_0远小于高次模的带宽时,(39)式和(18)还可退化成:

$$P_{\mathrm{HOM}}=\frac{1}{T_0}k_{\mathrm{HOM}}^{/\!/}\sum_{k=0}^{M-1}[(a_k^+Q^+)^2+(a_k^-Q^-)^2]\ , \tag{44}$$

$$P_{\mathrm{HOM}}=\frac{1}{T_0}k_{\mathrm{HOM}}^{/\!/}\sum_{k=0}^{M-1}a_k^2Q^2\ , \tag{45}$$

式中 a_kQ、$a_k^+Q^+$和 $a_k^-Q^-$为相应的束团电荷量．从以上结果可以看出(39)式是一个最一般的通用公式．

5 结论

通过上述分析和解析推导,得到了求解储存环高频腔高次模功率的一般公式．这些公式既适于计算单束流和双束流储存环中非均匀束团产生的高频腔高次模功率,也可用于计算均匀束团产生的高次模功率．此外,这些公式还适用于计算类腔结构如静电分离器等部件中的高次模功率．

参 考 文 献

1 Kirchgessner J. Review of the Development of RF Cavities for High Currents. Proc. of PAC95. Dallas USA, 1995. 1469

2 Haebel E. RF Design-Higher Order Modes, Lecture Notes in Physics No. 425. In: Beiglbock W et al eds. Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992. 312

3 Wilson P. High Energy Electron Linacs: Application to Storage Ring RF Systems and Linac Collider. SLAC-PUB-2884, Feb. 1982

4 Boussard D. RF Power Requirement for High Inthensity Proton Collider. CERN SL/91-16 (RFS)

5 Akai K, Ezura E. Simulation of Influence of a Bunch Gap in TRISTAN-II. Proc. of EPAC 94, London England, 1994. 1141

6 Hofmann A. Physics of Beam Instabilities. Lecture Notes in Physics No. 296. In: Beiglbock W et al eds. Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988. 99

HOMs Power Generated by Unequally Spaced and Populated Bunches in Storage Ring*

Zhao Zhentang

(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

Abstract The method to calculate the RF cavity higher-order modes (HOMs) power generated by unequally spaced and populated bunches in the storage rings with single beam and colliding beams is developed and presented in this paper. The corresponding analytical formulae for calculating the HOMs power are derived.

Key words RF cavity, beam, higher-order modes, impedance, power

---

Received 8 July 1998

* Supported by the Basic Science Research Program of the Chinese Academy of Sciences