

三胶子张量算符反常量纲的计算

端怀宇 刘觉平¹⁾

(武汉大学物理系 武汉 430072)

摘要 计算了两个与量子数为 $J^{PC} = 1^{-+}$ 的胶球流算符密切相关的三胶子张量算符 $\Omega_1^{ab} = G_{a,\mu}^a G_{b,\nu}^b G_{c,\lambda}^c f_{abc}$ 和 $\Omega_2^{ab} = g_s^3 G_{a,\mu}^a G_{b,\nu}^b G_{c,\lambda}^c f_{abc}$ 的重整化矩阵和反常量纲矩阵。

在 Lorentz 规范下, 计算算符 Ω_i^{ab} 去外腿三点 Green 函数(顶点动量不为零)发散项的过程中, 到 g_s^2 级为止, 没有发现其它规范不变的算符参与混合. 在定义 $\tilde{\Omega}_1^{ab} = \Omega_1^{ab} - \frac{1}{4}\Omega_2^{ab}$ 后, 求得最小减除方案(MS)下(空间维数 $D = 4 + 2\epsilon$) $\tilde{\Omega}_1^{ab}$ 的重整化系数(物理部分)为 $Z_{\tilde{\Omega}_1} = 1 + \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{7}{6} + O(g_s^4)$. $\tilde{\Omega}_1^{ab}$ 的反常量纲(物理部分)是一个规范无关量, 为 $\gamma_{\tilde{\Omega}_1} = \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{7}{3}$.

关键词 胶子算符 重整化 反常量纲

1 引言

Wilson^[1] 提出, 两个局域算符 $\mathcal{A}(x)$ 和 $\mathcal{B}(y)$ 的乘积, 在 $x \rightarrow y$ 时可以用一组局域算符集展开

$$\mathcal{A}(x)\mathcal{B}(y) \xrightarrow{x \rightarrow y} \sum_n C_n(x-y) \mathcal{O}_n\left(\frac{1}{2}(x+y)\right), \quad (1)$$

这种算符展开的方法在深度非弹散射的理论计算中有着重要的应用, 用以从重整化理论中获得物理结果, 然而方程(1)右边算符的 Green 函数通常具有发散的部分, 其中, 一部分发散来自于算符 \mathcal{O}_n 本身. 因而, 需要对这些算符进行重整化, 以期得到有意义的结果.

文中试图对文献[2]提出的量子数为 $J^{PC} = 1^{-+}$ 的胶球流算符进行重整化, 并计算它的反常量纲. 这个由三胶子场构造的规范不变的流算符具有下面的形式:

$$J_a = g_s^3 \partial^\mu (G_{a,\mu}^\alpha G_{b,\nu}^\beta G_{c,\lambda}^\gamma f_{abc}). \quad (2)$$

式中 a, b, c 表示色指标, $\alpha, \lambda, \mu, \nu$ 表示 Lorentz 指标, 对色指标和 Lorentz 指标都用了 Einstein 求和规则, f_{abc} 是 $SU(3)$ 群的全反对称结构常数. G_a^μ 是胶子场强张量, g_s 是

1999-6-24 收稿

1) 联系人 E-mail: jpliu@thphys.whu.edu.cn

强相互作用耦合常数. 为了减少计算的复杂程度, 实际计算的算符是

$$\Omega_1^{ab} = G_{a,\mu}^a G_{b,\nu}^b G_c^{\nu\beta} f_{abc}$$

和

$$\Omega_2^{ab} = g^{ab} G_{a,\mu}^a G_{b,\nu}^b G_c^{\nu\sigma} f_{abc}.$$

这是因为 J^β 是 Ω_1^{ab} 的全微分再乘以 g_s^3 ,

$$J^\beta = g_s^3 \partial_a \Omega_1^{ab},$$

而 Ω_1^{ab} 在重整化过程中与 Ω_2^{ab} 发生了混合.

2 算符重整化理论

算符的重整化与 Lagrangian 中所出现的量的重整化有所不同. 对算符 \hat{Q}_i 的重整化是为了获得不发散的 Green 函数而减除发散项, 重整化后的算符并不一定具有原来算符的形式, 因为发散项中一般包括了具有其它算符因子形式的部分:

$$\hat{Q}_i = \sum_j Z_{ij} R[Q_j], \quad (6)$$

这种情况被称为算符混合. 用 \hat{Q}_i 表示未经重整化的算符, $R[Q_j]$ 表示重整化后的算符, Q_j 表示把 \hat{Q}_i 中的裸量用对应的重整化量替代得到的算符; 此外, 用加“ \cdot ”的字母表示出现在 Lagrangian 中的未经重整化的量(裸量), 不加“ \cdot ”的字母表示重整化量.

相应的重整化群方程写为

$$\left[\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_s) \frac{\partial}{\partial g_s} - n\gamma_A(g_s) \right) \delta_{ij} + \gamma_{ij}(g_s) \right] \Gamma_{ij}^{(n)}(g_s, \mu) = 0. \quad (7)$$

γ_A 是胶子场的反常量纲. Q_i 的反常量纲矩阵定义为:

$$\gamma_{ij}(g_s) = \left(\mathcal{X}^1 \mu \frac{d}{d\mu} \Big|_{\tilde{g}_s} \mathcal{X} \right)_{ij}, \quad (8)$$

其中 \mathcal{X} 是以 \mathcal{X}_{ij} 为矩阵元的重整化常数矩阵

$$(\mathcal{X})_{ij} = \mathcal{X}_{ij}. \quad (9)$$

对于规范不变算符在重整化过程中会与其它算符混合的问题, Joglekar 和 Lee 曾得到三条定理^[3]. 设 $\{\mathcal{G}_i\}$ 代表一类完备的规范不变算符集, 即它们在重整化过程中不与其它规范不变算符相混合, $\{\mathcal{E}_i\}$ 代表在 \mathcal{G}_i 重整化中出现的但可用运动方程消去的算符的集合, $\{\mathcal{A}_i\}$ 代表所有在 \mathcal{G}_i 重整化过程中混合进来的可以表述为某个算符的 BRST 变换的算符, 则根据 Joglekar-Lee 的三条定理, 重整化系数矩阵具有上三角形式

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathcal{G}} \\ \hat{\mathcal{A}} \\ \hat{\mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{\mathcal{G}\mathcal{G}} & Z_{\mathcal{G}\mathcal{A}} & Z_{\mathcal{G}\mathcal{E}} \\ 0 & Z_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & Z_{\mathcal{A}\mathcal{E}} \\ 0 & 0 & Z_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R[\mathcal{G}] \\ R[\mathcal{A}] \\ R[\mathcal{E}] \end{pmatrix}, \quad (10)$$

且对物理矩阵元来说, 只存在规范不变算符之间的混合^[4]

由于上三角矩阵的逆矩阵也是上三角矩阵, 并且

$$(\mathcal{L}^{-1})_{gg} = Z_{gg}^{-1}, \quad (11)$$

所以

$$\gamma_{gg} = Z_{gg}^{-1} \mu \frac{d}{d\mu} \Big|_{g_s} Z_{gg}.$$

3 算符 Ω_i^{ab} 的重整化

计算了近似到 g_s^2 级的算符 Ω_1^{ab} 和 Ω_2^{ab} 的去外腿三点 Green 函数. 所计算的 Feynman 图如附录 1 所示. 所用的 Feynman 规则列在附录 2 中; 使用的是 Lorentz 规范. 计算中使用的是重整化过的场量并且只计算了发散部分. 计算结果比较庞大 (Ω_1^{ab} 的 Green 函数的发散项有 524 项, Ω_2^{ab} 的是 100 项), 用“other poles”表示不能写为 Ω_i^{ab} 三胶子顶点 ($i = 1, 2$) 形式的发散项:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \Omega_1^{ab} A_a^\mu A_b^\nu A_c^\rho | 0 \rangle_{\text{amputated}} & \stackrel{\text{div}}{=} \delta_{11} \Omega_{1abc}^{ab\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2, k_3) + \\ & \delta_{12} \Omega_{2abc}^{ab\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2, k_3) + \text{other poles} + O(g_s^4), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \Omega_2^{ab} A_a^\mu A_b^\nu A_c^\rho | 0 \rangle_{\text{amputated}} & \stackrel{\text{div}}{=} \delta_{22} \Omega_{2abc}^{ab\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2, k_3) + \\ & \text{other poles} + O(g_s^4). \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\delta_{11} = \frac{g_s^2 C_A}{64\pi^2 \epsilon} \left(\frac{53}{3} - \frac{3}{\xi} \right), \quad (15)$$

$$\delta_{12} = -\frac{g_s^2 C_A}{96\pi^2 \epsilon}, \quad (16)$$

$$\delta_{22} = \frac{g_s^2 C_A}{64\pi^2 \epsilon} \left(15 - \frac{3}{\xi} \right). \quad (17)$$

k_1, k_2 和 k_3 是 3 个外腿的动量. ‘ $\stackrel{\text{div}}{=}$ ’ 表示等号两边的发散部分是一样的. $\Omega_{iabc}^{ab\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2, k_3)$ 是算符 Ω_i^{ab} 的三胶子顶点 ($i = 1, 2$). 为了确定是否有其它的规范不变的算符混合进来, 把上式与胶子的极化矢量缩并, 并对外动量取质壳条件

$$k_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (18)$$

得到

$$\begin{aligned} \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu} \epsilon_{3\rho} \langle 0 | T \Omega_1^{ab} A_a^\mu A_b^\nu A_c^\rho | 0 \rangle_{\text{amputated}} & \stackrel{\text{div}}{=} \\ \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu} \epsilon_{3\rho} (\delta_{11} \Omega_{1abc}^{ab\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2, k_3) + \delta_{12} \Omega_{2abc}^{ab\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2, k_3)) & + O(g_s^4), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu} \epsilon_{3\rho} \langle 0 | T \Omega_2^{ab} A_a^\mu A_b^\nu A_c^\rho | 0 \rangle_{\text{amputated}} & \stackrel{\text{div}}{=} \\ \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu} \epsilon_{3\rho} \delta_{22} \Omega_{2abc}^{ab\alpha\beta\gamma}(k_1, k_2, k_3) & + O(g_s^4), \end{aligned} \quad (20)$$

上式还用到了胶子极化矢量与其动量正交的横胶子条件:

$$\epsilon_i \cdot k_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (21)$$

注意到方程 (19), (20) 的右边确实不含其它的规范不变算符, 说明至少在 g_s^2 级没有其它的规范不变算符参与混合.

仅考虑物理矩阵元,即那些加了外腿传播子质壳条件且与横胶子极化矢量缩并后不为零的矩阵元,由

$$\begin{aligned} R[\Omega_1^{ab}] &= \Omega_1^{ab} - \delta_{11}\Omega_1^{ab} - \delta_{12}\Omega_2^{ab} + O(g_s^4) = \\ & [1 + (Z_A^{-\frac{3}{2}} - 1) - \delta_{11}]\hat{\Omega}_1^{ab} - \delta_{12}\hat{\Omega}_2^{ab} + O(g_s^4) = \\ & \left(1 - \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{7}{6}\right)\hat{\Omega}_1^{ab} + \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{6}\hat{\Omega}_2^{ab} + O(g_s^4), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} R[\Omega_2^{ab}] &= \Omega_2^{ab} - \delta_{22}\Omega_2^{ab} + O(g_s^2) = \\ & [1 + (Z_A^{-\frac{3}{2}} - 1) - \delta_{22}]\hat{\Omega}_2^{ab} + O(g_s^4) = \\ & \left(1 - \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{2}\right)\hat{\Omega}_2^{ab} + O(g_s^4), \end{aligned} \quad (23)$$

可知

$$\begin{pmatrix} R[\Omega_1] \\ R[\Omega_2] \end{pmatrix} = \mathcal{Y}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\Omega}_1 \\ \hat{\Omega}_2 \end{pmatrix}.$$

其中

$$(\mathcal{Y}^{-1})_{11} = 1 - \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{7}{6} + O(g_s^4), \quad (25)$$

$$(\mathcal{Y}^{-1})_{12} = \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{6} + O(g_s^4), \quad (26)$$

$$(\mathcal{Y}^{-1})_{21} = O(g_s^4), \quad (27)$$

$$(\mathcal{Y}^{-1})_{22} = 1 - \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{1}{2} + O(g_s^4). \quad (28)$$

那么再由式(12)可算出反常量纲矩阵为:

$$\gamma = \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2} \begin{pmatrix} 7/3 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4 计算结果分析

观察 Ω_i^{ab} 的反常量纲矩阵(29)可以发现,它是规范无关的. 这很好理解:反常量纲与 Green 函数的标度变换有关,而规范不变算符的物理矩阵在标度变换前后当然都不会与规范有关,所以规范不变算符反常量纲矩阵仅与规范不变算符有关的部分应该是规范无关的.

另外,我们还注意到 Ω_1^{ab} 和 Ω_2^{ab} 在重整化的过程中相互混合. 定义新的一组胶子算符为:

$$\tilde{\Omega} = \Omega_1 - \frac{1}{4}\Omega_2, \quad (30)$$

$$\tilde{\Omega}_2 = \Omega_2. \quad (31)$$

$\tilde{\Omega}_1$ 是一个无迹的对称张量算符,具有量子数 $J^{PC} = 2^{++}$; 而 $\tilde{\Omega}_2$ 实际是一个 $J^{PC} = 0^{++}$ 的标量算符,它们具有不同的空间旋转对称性. 对称性的限制将使得 $\tilde{\Omega}_1$ 和 $\tilde{\Omega}_2$ 不会在重整化

的过程中发生混合.

$\tilde{\Omega}_i$ 的裸量与重整化量满足

$$\tilde{\Omega}_i = Z_{\tilde{\Omega}_i} R[\tilde{\Omega}_i],$$

其中

$$Z_{\tilde{\Omega}_1} = 1 + \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{7}{6},$$

$$Z_{\tilde{\Omega}_2} = 1 + \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{1}{2}.$$

这里都近似到 g_s^2 级且只考虑物理矩阵元.

$\tilde{\Omega}_i$ 的反常量纲是

$$\gamma_{\tilde{\Omega}_1} = \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{7}{3},$$

$$\gamma_{\tilde{\Omega}_2} = \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2}. \quad (36)$$

由我们的计算可以看到,文献[2]所提出的胶球流算符 $J^\beta = g_s^3 \partial_a \Omega_1^{a\beta}$ 在重整化过程中与流算符 $g_s^3 \partial_a \Omega_2^{a\beta}$ 发生混合. 这里定义两个新的流算符:

$$J_1^\beta \equiv g_s^3 \partial_a \tilde{\Omega}_1^{a\beta} = g_s^3 \partial_a (G_{a,\mu}^\sigma G_{b,\nu}^\mu G_{c,\rho}^\nu - \frac{1}{4} g^{ab} G_{a,\mu}^\sigma G_{b,\nu}^\mu G_{c,\rho}^\nu) f_{abc}, \quad (37)$$

$$J_2^\beta \equiv g_s^3 \partial_a \tilde{\Omega}_2^{a\beta} = g_s^3 \partial^\beta (G_{a,\mu}^\sigma G_{b,\nu}^\mu G_{c,\rho}^\nu) f_{abc}. \quad (38)$$

它们的重整化系数(仅与规范不变算符有关的部分)是:

$$Z_{J_1} = Z_{\kappa_s}^3 Z_{\tilde{\Omega}_1} = 1 + \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{20}{3}, \quad (39)$$

$$Z_{J_2} = Z_{\kappa_s}^3 Z_{\tilde{\Omega}_2} = 1 + \frac{6g_s^2 C_A}{(4\pi)^2}.$$

反常量纲

$$\gamma_{J_1} = \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{40}{3}, \quad (41)$$

$$\gamma_{J_2} = \frac{12g_s^2 C_A}{(4\pi)^2}. \quad (42)$$

这一非零的反常量纲,将对算符乘积展开有贡献,因而对于精确决定胶球质量有重要意义.

参考文献 (References)

- 1 Wilson K G. Phys. Rev. ,1969,197:1499
- 2 LU WenTao, LIU JuePing. Chin. Phys. Lett. ,1996,13:340
- 3 Joglekar S D, Lee B W. Ann. Phys. ,1976,97:160
- 4 Collins J C. Renormalization. , New York: Cambridge University Press, 1984. 316

附录 1

Feynman 图

本文在对算符 Ω_i^{ab} 进行重整化的过程中计算的 Feynman 图见图 1.

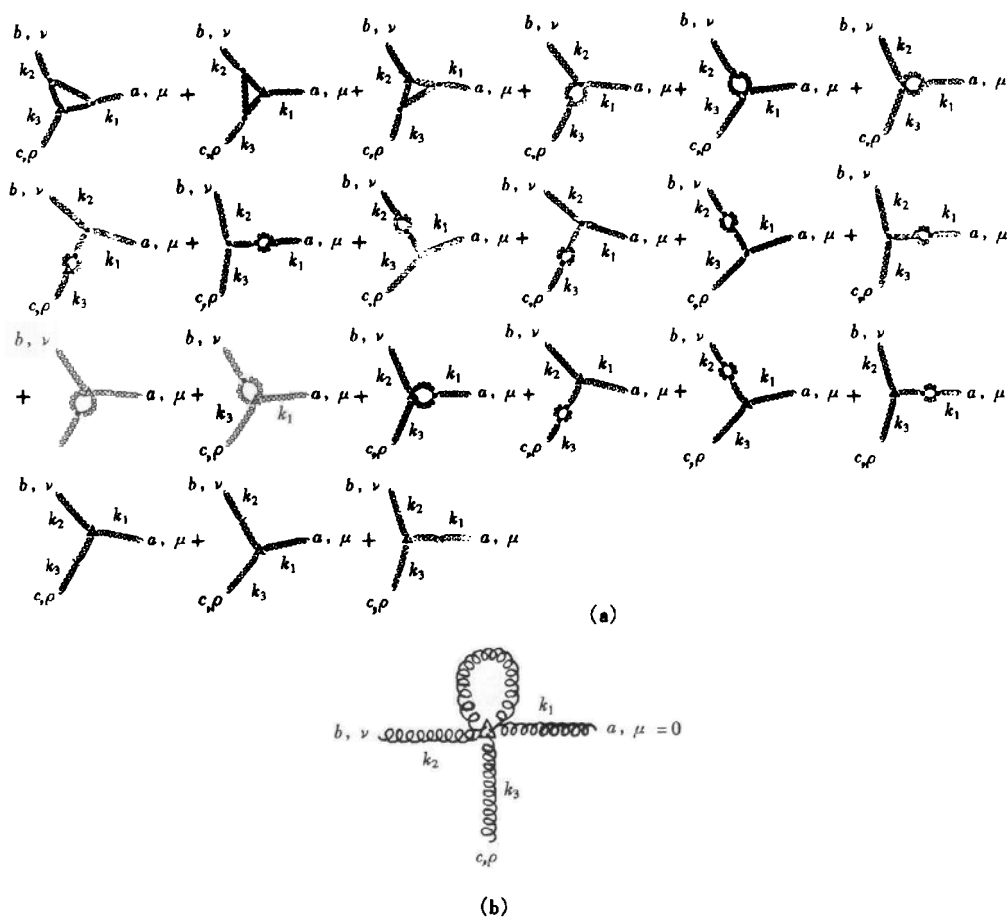


图 1 Feynman 图

图中填有阴影的三角形符号表示算符 Ω_i^{ab} 的顶点,且所有外动量都指向顶点.

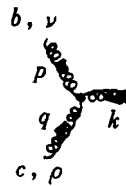
附录 2

Feynman 规则

胶子场传播子

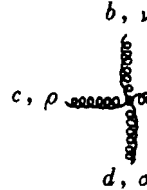
$$a, \mu \overset{k}{\text{---}} b, \nu = \frac{i\delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left[-g^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \quad (2-1)$$

三胶子顶点



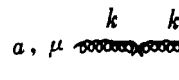
$$= g_s f_{abc} [g^{\mu\nu} (k-p)^\rho + g^{\nu\rho} (p-q)^\mu + g^{\rho\mu} (q-k)^\nu] \quad (2-2)$$

四胶子顶点



$$= -ig_s^2 [f_{abc} f_{cde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) + f_{ace} f_{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) + f_{ade} f_{bce} (g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} - g^{\nu\mu} g^{\rho\sigma})] \quad (2-3)$$

胶子传播子抵消项



$$= \frac{ig_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \left(\frac{13}{6} - \frac{1}{2\xi} \right) (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \delta_{ab} \quad (2-4)$$

此外,由于算符 Ω_i^{ab} 的顶点太复杂,这里没有给出.

Calculation of Anomalous Dimension of Three-Gluon Tensor Operators

DUAN HuaiYu LIU JuePing¹⁾

(Department of Physics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract The renormalization coefficient matrix and anomalous dimension matrix of two three-gluon tensor operator $\Omega_1^{ab} = G_{a,\mu}^\alpha G_{b,\nu}^\beta G_{c,\sigma}^\gamma f_{abc}$ and $\Omega_2^{ab} = g^{\alpha\beta} G_{a,\mu}^\alpha G_{b,\nu}^\beta G_{c,\sigma}^\gamma f_{abc}$, which are closely related to the glueball current operator with quantum number $J^{PC} = 1^{-+}$, were calculated.

The divergent terms of amputated three-point Green function of Ω_i^{ab} (nonzero momentum transfer) in Lorentz gauge were calculated explicitly up to g_s^2 order, and no other gauge-invariant operators were found to mix with them. Defining $\tilde{\Omega}_1^{ab} = \Omega_1^{ab} - \frac{1}{4}\Omega_2^{ab}$, the physical part of renormalization coefficient matrix of $\tilde{\Omega}_1^{ab}$ in minimum subtraction scheme with space dimension $D = 4 + 2\epsilon$ is $Z_{\tilde{\Omega}_1} = 1 + \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2 \epsilon} \frac{7}{6} + O(g_s^4)$. The Physical part of anomalous dimension matrix of $\tilde{\Omega}_1^{ab}$ is gauge invariant, and $\gamma_{\tilde{\Omega}_1} = \frac{g_s^2 C_A}{(4\pi)^2} \frac{7}{3}$

Key words gluon operator, renormalization, anomalous dimension

Received 24 June 1999

1) E-mail: jpliu@thphys.whu.edu.cn